

УДК 519.711.7

ББК 22.1

СТОХАСТИЧЕСКАЯ КОАЛИЦИОННАЯ ДИНАМИКА УЛУЧШЕННОГО ОТВЕТА И УСТОЙЧИВОЕ РАВНОВЕСИЕ*

КОНСТАНТИН АВРАЧЕНКОВ

ВИКАС ВИКРАМ СИНГХ

INRIA Sophia-Antipolis Mediterranee

2004 route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France

e-mail: k.avrachenkov@inria.fr, vikasstar@gmail.com

Рассматривается формирование коалиций среди игроков в конечной стратегической игре с n игроками на бесконечном горизонте. В каждый момент времени случайно сформированная коалиция делает совместное отклонение от текущего профиля действий таким образом, что в новом профиле все игроки коалиции строго улучшают свой выигрыш. Такие отклонения определяют коалиционную динамику улучшенного ответа (Coalitional Better-response Dynamics – CBR), которая в общем случае является стохастической. Динамика CBR либо сходится к \mathcal{K} -устойчивому равновесию, либо попадает в замкнутый цикл. Предполагается, что в каждый момент времени выбранная коалиция делает с некоторой малой вероятностью ошибочное отклонение, что добавляет мутации (возмущения) в динамику CBR. Доказывается, что все \mathcal{K} -устойчивые равновесия и все профили действий из замкнутых циклов, которые имеют минимальный стохастический потенциал, также стохастически устойчивы. Аналогичное утверждение справедливо для строгого \mathcal{K} -устойчивого равновесия. Мы применяем динамику

СВР к изучению динамического формирования сетей в присутствии мутаций. В рамках динамики все сильно устойчивые сети и замкнутые циклы сетей стохастически устойчивы.

Ключевые слова: сильное равновесие по Нэшу, коалиционный улучшенный ответ, стохастическая устойчивость, игры формирования сетей, сильно устойчивые сети.

1. Введение

Равновесие по Нэшу является наиболее желательным решением в некооперативной теории игр. Когда стратегическая игра играется повторно на бесконечном горизонте, то равновесие по Нэшу, которое получается в итоге, зависит от начального профиля действий и от того каким образом игроки выбирают свои действия в каждый момент. Несколько динамик дискретного времени изучались в литературе, посвященной изучению выбора равновесия по Нэшу в долгосрочной перспективе. Янг [27] рассматривал стратегическую игру n игроков, в которой в каждый момент времени все игроки делают одновременный ход и каждый игрок выбирает действие, которое является наилучшим ответом в k предыдущих играх из m , $k \leq m$, последних игр за прошедшее время. В общем случае эти динамики не сходятся к равновесию по Нэшу, они могут попадать в замкнутый цикл. Янг [27] также рассматривал случай, когда в каждый момент времени с малой вероятностью каждый игрок делает ошибку и выбирает некоторое неоптимальное решение. Эти ошибки добавляют мутации в динамику. В общем случае мутации могут быть достаточно малы. Отсюда вытекает определение устойчивости равновесия по Нэшу как устранение мутаций. Данный тип устойчивости называется стохастической устойчивостью. Янг предложил алгоритм вычисления стохастически устойчивых равновесий по Нэшу. Для координационных игр 2×2 он показал, что равновесие по Нэшу в смысле доминирования рисков стохастически устойчиво. Кандори и др. [18] рассматривали другую динамическую модель, где в каждый момент времени каждый игрок играет с некоторым другим игроком в парном соревновании. Парное соревнование представляется как симметричная матричная игра 2×2 и каждый игрок выбирает действие, которое имеет наибольший ожидаемый средний выигрыш. Мутации присутствуют в динамике

благодаря ошибочным действиям, предпринимаемым игроками. Для координационных игр 2×2 они показали, что равновесие по Нэшу в смысле доминирования рисков стохастически устойчиво. Это означает, что для координационных игр 2×2 динамики, приведенные в [27] и [18], выбирают одно и то же равновесие по Нэшу. Фаденберг и др. [10] предложили динамику, в которой в каждый момент времени только одному игроку дается право выбирать действия. Также в каждый момент времени с малой вероятностью появляются мутации. Равновесие по Нэшу в смысле доминирования рисков в координационных играх 2×2 необязательно является устойчивым в рамках данной динамики.

Концепция равновесия по Нэшу неадекватна для ситуаций, в которых игроки могут общаться априори, чтобы сформировать коалицию, и совместно отклониться координированным образом. Чтобы охватить такие ситуации (строгое) \mathcal{K} -устойчивое равновесие [26] представляет адекватную концепцию решения, где \mathcal{K} является множеством всех допустимых коалиций. В случае, когда на формирование коалиций нет ограничений, (строгое) \mathcal{K} -устойчивое равновесие соответствует (строгому) сильному равновесию по Нэшу [1]. Мотивируясь приложением \mathcal{K} -устойчивых равновесий в играх формирования сети, рассмотренных в [7, 14, 13], мы ограничиваемся только чистыми стратегиями. \mathcal{K} -устойчивое равновесие необязательно существует, и в таком случае существует некоторый набор профилей действий, формирующий замкнутый цикл, такой, что возможно из одного профиля перейти в другой последовательностью улучшающих отклонений коалиций, зато невозможно достичь профиля действий за пределами замкнутого цикла из профиля действий, принадлежащего замкнутому циклу путем улучшающих отклонений коалиций.

Недавно были предложены некоторые случайные динамики формирования коалиций игроков [4, 21, 26]. Сава [26] изучал стохастическую устойчивость в обобщенных конечных играх, в которых присутствуют мутации, связанные с правилом логит-выбора. Ньютон [21] рассматривал ситуации, в которых выигрышные коалиционные отклонения более важны, чем невыигрышные отклонения одного игрока. Авраченко и др. [4] рассматривал вариант игры формирования

сети и анализировал стохастическую устойчивость сетей, когда сети формируются динамически, в присутствии мутаций, на бесконечном горизонте. В общем случае результаты стохастической устойчивости зависят от того, каким образом действия были выбраны в течение бесконечной игры. К другим известным работам, посвященным стохастической устойчивости с различными характеристиками относятся [8, 9, 10, 22, 23, 11, 25, 20, 24].

В данной статье мы предлагаем новую стохастическую динамику, связанную с формированием коалиций в стратегической игре на бесконечном горизонте. Мы назвали нашу динамику коалиционной динамикой улучшенного ответа (CBR динамикой), в которой в каждый момент времени игрокам разрешено формировать коалицию и выполнять совместное отклонение от текущего профиля действий, если оно строго выгодно для всех членов коалиции. Мы полагаем, что формирование коалиции случайно и в каждый момент времени может быть сформирована только одна коалиция из всего набора допустимых коалиций. Мы также рассматриваем ситуацию, в которой в каждый момент времени выбранная коалиция может принимать ошибочное решение с малой вероятностью, т.е. переходить к профилю действий, в котором все члены коалиции не строго выигрывают. Эти ошибки работают как мутации и добавляют возмущения в динамику CBR. Мы доказываем, что возмущенная динамика CBR выбирает в долгосрочной перспективе \mathcal{K} -устойчивые равновесия или замкнутые циклы, которые имеют минимальный стохастический потенциал среди всех профилей действий, устраняя мутации. Если нет ограничений на формирование коалиций, динамика CBR выбирает все сильные равновесия по Нэшу и замкнутые циклы, т.е. все сильные равновесия и замкнутые циклы стохастически устойчивы. Аналогичная динамика CBR может быть приведена для случая, в котором в каждый момент времени коалиция отклоняется от текущего профиля действий, таким образом, что все игроки в коалиции как минимум не ухудшают свой выигрыш в новом профиле действий и как минимум один игрок строго улучшает. В этом случае аналогичные результаты справедливы для строгого \mathcal{K} -устойчивого равновесия и строгого сильного равновесия по Нэшу (Strong Strict Nash equilibrium – SSNE). Наша динамика CBR может быть применена к игре форми-

рования сети, что показывает, что все сильно устойчивые сети также стохастически устойчивы. Наша динамика CBR обобщает стохастическую динамику, предложенную в [4], так как мы рассматриваем общие конечные игры. Стохастическая динамика для парных устойчивых сетей, рассмотренная в [15], также может быть представлена как частный случай нашей динамики CBR.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит модель и несколько определений. Мы описываем динамику CBR в разделе 3. Мы завершаем нашу статью с основными выводами в разделе 4.

2. Модель

Мы рассматриваем стратегическую игру n игроков. Обозначим $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – конечное множество игроков и A_i – конечное множество действий игрока i , элементом которого является a_i . Обозначим $A = \prod_{i=1}^n A_i$ – множество всех профилей действий и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – элемент A . Функция выигрыша игрока i определена как $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$. Мы рассматриваем игру, в которой игроки могут формировать коалицию и совместно пересматривать свои стратегии. Во многих ситуациях может быть не разрешено формировать все типы коалиций. Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(N) \setminus \phi$ – множество всех допустимых коалиций, где $\mathcal{P}(N)$ обозначает множество всех подмножеств N и ϕ – пустое множество. Для коалиции $S \in \mathcal{K}$ определим множество $A_S = \prod_{i \in S} A_i$, элементы которого обозначены a_S и a_{-S} обозначает профиль действий игроков, не входящих в коалицию S . Коалиция игроков совместно отклоняется от текущего профиля действий если в новом профиле действий каждый игрок из коалиции строго улучшает свой выигрыш. Из такого отклонения вытекает определение \mathcal{K} -устойчивого равновесия. В некоторых случаях коалиция игроков отклоняется от текущего профиля действий, если в новом профиле действий каждый игрок как минимум не ухудшает свой выигрыш и один игрок строго его улучшает. Из такого отклонения вытекает определение строгого \mathcal{K} -устойчивого равновесия.

Определение 2.1. Профиль действий a^* называется \mathcal{K} -устойчивым равновесием, если нет $S \in \mathcal{K}$ и $a \in A$ таких, что

1. $a_i = a_i^* \forall i \notin S$;
2. $u_i(a) > u_i(a^*) \forall i \in S$.

Если $\mathcal{K} = \mathcal{P}(N) \setminus \phi$, \mathcal{K} -устойчивое равновесие является сильным равновесием по Нэшу (SNE) [1]. Пусть $A(S, a)$ – множество всех профилей действий, достижимых из a путем отклонения коалиции S . Оно определяется как

$$A(S, a) = \{a' | a'_i = a_i \forall i \notin S \text{ и } a'_i \in A_i, \forall i \in S\}.$$

Коалиция всегда имеет возможность ничего не делать, поэтому $a \in A(S, a)$. Пусть $\mathcal{I}_1(S, a)$ обозначает множество улучшенных профилей действий, достижимых из профиля действий a путем отклонения коалиции S , т.е.,

$$\mathcal{I}_1(S, a) = \{a' | a'_i = a_i \forall i \notin S \text{ и } u_i(a') > u_i(a), \forall i \in S\}. \quad (2.1)$$

Для улучшенного профиля действий $a' \in \mathcal{I}_1(S, a)$ профиль действий a'_S всех игроков из S называется *улучшенным ответом* коалиции S на фиксированный профиль действий a_{-S} игроков, не входящих в S . Определим $\bar{\mathcal{I}}_1(S, a) = A(S, a) \setminus \mathcal{I}_1(S, a)$ множество всех профилей действий, получаемых в результате принятия ошибочных решений коалиции S . Ясно, что $a \in \bar{\mathcal{I}}_1(S, a)$, т.е., $\bar{\mathcal{I}}_1(S, a)$ всегда непусто для всех S и a . \mathcal{K} -устойчивое равновесие необязательно всегда существует. В таком случае существует множество профилей действий, лежащих на замкнутом цикле, и все такие профили действий могут быть достигнуты один из другого по улучшающему пути. Определения замкнутого цикла и улучшающего пути даны ниже:

Определение 2.2. *Улучшающий путь из a в a' – это последовательность профилей действий и коалиций $a^1, S_1, a^2, \dots, a^{m-1}, S_{m-1}, a^m$ такая, что $a^1 = a$, $a^m = a'$ и $a^{k+1} \in \mathcal{I}_1(S_k, a^k)$ для всех $k = 1, 2, \dots, m - 1$.*

Определение 2.3. *Множество профилей действий C образует цикл, если для любого $a \in C$ и $a' \in C$ существует улучшающий путь, соединяющий a и a' . Цикл называется замкнутым, если нет профиля действий в C , лежащего на улучшающем пути, ведущем к профилю действий, который не принадлежит C .*

Теорема 2.1. *Всегда существует либо \mathcal{K} -устойчивое равновесие, либо замкнутый цикл профилей действий, либо и \mathcal{K} -устойчивое равновесие и замкнутый цикл.*

Доказательство. Профиль действий является \mathcal{K} -устойчивым равновесием тогда и только тогда, когда никакая допустимая коалиция из множества \mathcal{K} не может выполнить улучшающее отклонение на другой профиль действий. Таким образом, начнем с некоторого профиля действий. Либо он является \mathcal{K} -устойчивым равновесием, либо существует коалиция, которая может сделать улучшающее отклонение на другой профиль действий. В первом случае теорема доказана. Для второго случая справедливо то же самое: либо новый профиль является \mathcal{K} -устойчивым равновесием, либо существует коалиция, которая может сделать улучшающее отклонение на другой профиль действий. Так как множество профилей действий конечно, вышеописанный процесс либо сведется к профилю действий, который является \mathcal{K} -устойчивым равновесием, либо будет достигнут один из предыдущих профилей, т.е. существует цикл. Таким образом, мы доказали, что существует либо \mathcal{K} -устойчивое равновесие, либо цикл. Пусть теперь нет \mathcal{K} -устойчивых равновесий. Так как множество профилей действий конечно и не существует \mathcal{K} -устойчивых равновесий, должно существовать максимальное множество C профилей действий такое, что для любых $a \in C$ и $a' \in C$ существует улучшающий путь, соединяющий a и a' , и нет профиля действий в C , лежащего на улучшающем пути, ведущем к профилю действий, не принадлежащему C . Такое множество C является замкнутым циклом. \square

Строгое \mathcal{K} -устойчивое равновесие может быть определено аналогично. Профиль действий a^* в Определении 2.1 называется строгим \mathcal{K} -устойчивым равновесием, если условие 1 остается таким же, а условие 2 выглядит как $u_i(a) \geq u_i(a^*) \forall i \in S$ с как минимум одним строгим неравенством. Далее, если $\mathcal{K} = \mathcal{P}(N) \setminus \phi$, a^* является строгим сильным равновесием по Нэшу (SSNE). В этом случае для данного профиля действий a и коалиции $S \in \mathcal{K}$ множество улучшающих профилей действий $\mathcal{I}_2(S, a)$ определяется как

$$\mathcal{I}_2(S, a) = \{a' \mid a'_i = a_i \forall i \notin S, \text{ и } u_i(a') \geq u_i(a), \forall i \in S, u_j(a') > u_j(a), \text{ для некоторого } j \in S\} \quad (2.2)$$

и $\bar{\mathcal{I}}_2(S, a) = A(S, a) \setminus \mathcal{I}_2(S, a)$. Определения улучшающего пути и циклов могут быть сформулированы аналогично предыдущему случаю. Справедлив результат, аналогичный Теореме 2.1, т.е. всегда существует как минимум строгое \mathcal{K} -устойчивое равновесие или замкнутый цикл профилей действий, или и то и другое. Строгое \mathcal{K} -устойчивое равновесие всегда является \mathcal{K} -устойчивым равновесием, т.е. множество строгих \mathcal{K} -устойчивых равновесий является подмножеством множества \mathcal{K} -устойчивых равновесий.

Теперь приведем несколько примеров игр двух игроков, иллюстрирующих наличие \mathcal{K} -устойчивого равновесия и замкнутого цикла. В частности, мы разрешим только коалиции размера 1 и тогда \mathcal{K} -устойчивое равновесие – это равновесие по Нэшу.

Пример 2.1. Рассмотрим игру двух игроков

$$\begin{matrix} & b_1 & b_2 \\ a_1 & (4, 3) & (2, 5) \\ a_2 & (6, 1) & (3, 2) \end{matrix}.$$

Здесь (a_2, b_2) является только равновесием по Нэшу, которое может быть достигнуто из любых других профилей действий путем улучшающих отклонений. Эта ситуация описана на рис. 1.

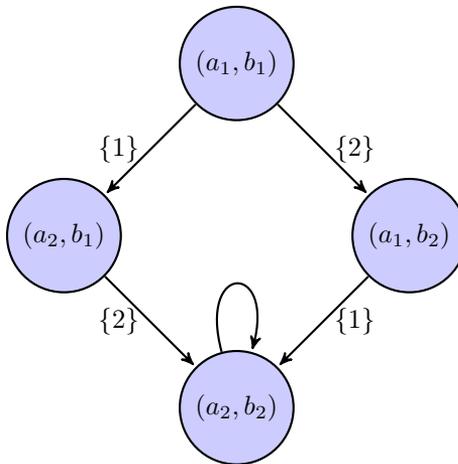


Рисунок 1. Равновесие по Нэшу и улучшающие отклонения

Направленная дуга $(a_1, b_1) \xrightarrow{\{1\}} (a_2, b_1)$ на рис. 1 представляет отклонение игрока 1. Другие направленные дуги определяются аналогично. Петля в (a_2, b_2) показывает, что единоличное отклонение из (a_2, b_2) невозможно.

Пример 2.2. Рассмотрим игру двух игроков

$$\begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc} (4, 4) & (0, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (4, 5) & (1, 6) \\ (0, 0) & (2, 5) & (6, 1) \end{array} \right).$$

В примере 2.2 имеется одновременно равновесие по Нэшу и замкнутый цикл. Профиль действий (a_1, b_1) является равновесием по Нэшу и замкнутый цикл представлен на рис. 2.

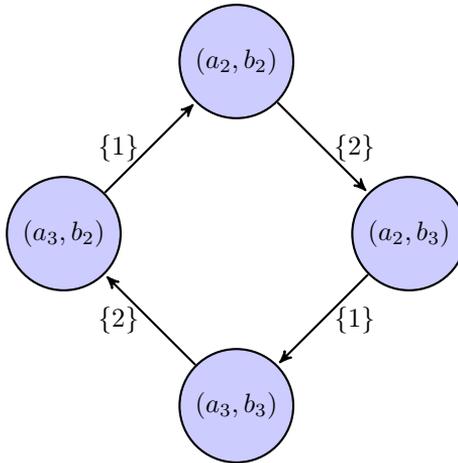


Рисунок 2. Замкнутый цикл

3. Динамическая игра

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой n игроков играют в стратегическую игру, определенную в разделе 2. Предполагаем, что игроки могут априори общаться друг с другом и, следовательно, образовывать коалиции. Тогда они совместно отклоняются от текущего профиля действий на новый профиль действий, если новый профиль

действий строго выгоден всем членам коалиции. Мы рассматриваем формирование коалиций на бесконечном горизонте. В каждый момент времени коалиция формируется случайным образом и делает улучшающее отклонение из текущего профиля действий на новый профиль действий из множества улучшенных профилей действий, определяемого (2.1). То есть в новом профиле действий действия игроков, не входящих в коалицию, остаются неизменными, а каждый игрок из коалиции строго улучшает свой выигрыш. Если нет такого улучшенного профиля действий для коалиции, тогда она не отклоняется. То же самое повторяется на следующем шаге и продолжается на бесконечном горизонте. Такие отклонения определяют коалиционную динамику улучшенного ответа (СВР). Мы полагаем, что коалиции формируются случайным образом и в каждый момент времени может быть образована только одна коалиция. Если для коалиции имеется более одного улучшенного профиля действий, тогда каждый улучшенный профиль действий может быть выбран с положительной вероятностью. То есть динамика СВР – стохастическая. Динамика СВР определяет Марковскую цепь на конечном множестве профилей действий A . Мы также полагаем, что в каждый момент времени выбранная коалиция делает ошибку и выполняет совместное отклонение на профиль действий, в котором все члены выбранной коалиции нестрого улучшают свой выигрыш. Это происходит с очень малой вероятностью. Такие ошибки добавляют мутации в динамику СВР. Эти мутации добавляют еще один уровень стохастичности в динамику СВР, и в результате мы имеем возмущенную цепь Маркова, см., например, [2, 3]. Нас интересует профиль действий, который будет выбран в долгосрочной перспективе динамикой СВР, устранив мутации. Далее мы опишем стохастическую динамику СВР.

3.1. Стохастическая динамика СВР без ошибок

В каждый момент $t = 0, 1, 2, \dots$ коалиция S_t выбирается случайным образом с вероятностью $p_{S_t} > 0$. Мы полагаем, что в каждый момент выбранная коалиция делает улучшающее отклонение от текущего профиля действий a^t , т.е. в каждый момент $t + 1$ выбирается новый профиль действий $a^{t+1} \in \mathcal{I}_1(S_t, a^t)$ с вероятностью $p_{\mathcal{I}_1}(a^{t+1}|S_t, a^t)$, где $p_{\mathcal{I}_1}(\cdot|S_t, a^t)$ – вероятностное распределение на конечном множестве $\mathcal{I}_1(S_t, a^t)$. Если нет улучшающего отклонения для

коалиции S_t , $a^{t+1} = a^t$. Пусть X_t^0 обозначает профиль действий в момент t , тогда $\{X_t^0\}_{t=0}^\infty$ – цепь Маркова на множестве A . Правило перехода P^0 цепи Маркова определяется следующим образом:

$$P^0(X_{t+1}^0 = a' | X_t^0 = a) = \sum_{S \in \mathcal{K}; \mathcal{I}_1(S, a) \neq \emptyset} p_S p_{\mathcal{I}_1}(a' | S, a) 1_{\mathcal{I}_1(S, a)}(a') + \sum_{S \in \mathcal{K}; \mathcal{I}_1(S, a) = \emptyset} p_S 1_{\{a'=a\}}(a'), \quad (3.1)$$

где 1_B – индикаторная функция для данного множества B . Ясно, что \mathcal{K} -устойчивые равновесия и замкнутые циклы являются рекуррентными классами P^0 . \mathcal{K} -устойчивое равновесие соответствует поглощающему состоянию в P^0 и замкнутый цикл соответствует рекуррентному классу в P^0 , состоящего более, чем из одного профиля действий.

Из примера 2.2 ясно, что в общем случае в игре может присутствовать замкнутый цикл вместе с \mathcal{K} -устойчивыми равновесиями. В этом случае динамика СВР необязательно сходится. В примере 2.2 динамика СВР необязательно сходится к равновесию по Нэшу (a_1, b_1) , так как в случае попадания динамики СВР в замкнутый цикл, представленный на рис. 2, она никогда его не покинет. Замкнутый цикл $C = \{(a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_3, b_2)\}$ является рекуррентным классом и (a_1, b_1) является поглощающим состоянием цепи Маркова P^0 , соответствующей игре, представленной в примере 2.2.

Мы называем игру ациклической, если она не имеет замкнутых циклов. К ациклическим играм относятся координационные игры. Из Теоремы 2.1 следует, что ациклическая игра имеет хотя бы одно \mathcal{K} -устойчивое равновесие. Для ациклических игр цепь Маркова, определенная (3.1), является поглощающей. Следовательно, из теории цепей Маркова динамика СВР, приведенная в разделе 3.1, придет в долгосрочной перспективе к \mathcal{K} -устойчивому равновесию, независимо от того, с какого профиля она начнется (см. [19]).

3.2. Стохастическая динамика СВР с ошибками

Теперь предположим, что в каждый момент времени t выбранная коалиция S_t может сделать ошибку при отклонении от a^t и в результате перейти на профиль действий, в котором некоторые игроки в коалиции S_t не строго улучшают свой выигрыш. Мы полагаем, что,

имея текущий профиль действий a^t , коалиция S_t ошибается с вероятностью $\varepsilon f(S_t, a^t) \in (0, 1)$, где $f(S_t, a^t)$ означает, что некоторые коалиции могут быть более подвержены ошибкам, чем другие, а также некоторые профили действий могут скорее привести к ошибочному выбору, чем другие. Параметр ε позволяет настраивать частоту ошибок. Следовательно, в момент $t + 1$ коалиция S_t выбирает улучшающее отклонение с вероятностью $(1 - \varepsilon f(S_t, a^t))$. В частности, она выбирает $a^{t+1} \in \mathcal{I}_1(S_t, a^t)$ согласно распределению $p_{\mathcal{I}_1}(\cdot)$, определенному выше. Комбинируя вероятности, мы получаем, что коалиция выбирает $a^{t+1} \in \mathcal{I}_1(S_t, a^t)$ с вероятностью $(1 - \varepsilon f(S_t, a^t))p_{\mathcal{I}_1}(a^{t+1}|S_t, a^t)$. Коалиция выбирает неулучшающее отклонение с вероятностью $\varepsilon f(S_t, a^t)$. Пусть $p_{\bar{\mathcal{I}}_1}(\cdot|S_t, a^t)$ – вероятностное распределение на конечном множестве $\bar{\mathcal{I}}_1(S_t, a^t)$, коалиция выбирает $a^{t+1} \in \bar{\mathcal{I}}_1(S_t, a^t)$ с вероятностью $\varepsilon f(S_t, a^t)p_{\bar{\mathcal{I}}_1}(\cdot|S_t, a^t)$. Если не существует улучшающего отклонения, то с вероятностью $(1 - \varepsilon f(S_t, a^t))$ коалиция не меняет профиль действий, т.е. $a^{t+1} = a^t$, и с дополняющей вероятностью выбирает профиль действий в $\bar{\mathcal{I}}_1(S_t, a^t)$ согласно распределению $p_{\bar{\mathcal{I}}_1}(\cdot|S_t, a^t)$. Правило перехода P^ε возмущенной цепи Маркова $\{X_t^\varepsilon\}_{t=0}^\infty$ определено следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P^\varepsilon(X_{t+1}^\varepsilon = a' | X_{t+1}^\varepsilon = a) = & \\
 & \sum_{S \in \mathcal{K}; \mathcal{I}_1(S, a) \neq \emptyset} p_S((1 - \varepsilon f(S, a))p_{\mathcal{I}_1}(a'|S, a)1_{\mathcal{I}_1(S, a)}(a') \\
 & \quad + \varepsilon f(S, a)p_{\bar{\mathcal{I}}_1}(a'|S, a)1_{\bar{\mathcal{I}}_1(S, a)}(a')) \\
 & + \sum_{S \in \mathcal{K}; \mathcal{I}_1(S, a) = \emptyset} p_S((1 - \varepsilon f(S, a))1_{\{a'=a\}}(a') \\
 & \quad + \varepsilon f(S, a)p_{\bar{\mathcal{I}}_1}(a'|S, a)1_{\bar{\mathcal{I}}_1(S, a)}(a')) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

для всех $a, a' \in A$.

Возмущенная цепь Маркова $\{X_t^\varepsilon\}_{t=0}^\infty$ является неприводимой, так как с ненулевой вероятностью ошибки можно перейти в любой профиль действий из любого другого профиля действий за конечное число шагов. Она также непериодична, так как с положительной вероятностью состояние не изменится. Следовательно, существует единственное стационарное распределение μ^ε для возмущенной цепи Маркова. Однако, когда $\varepsilon = 0$, может быть несколько стационарных распределений, соответствующих различным \mathcal{K} -устойчивым

равновесиям или замкнутым циклам. Такие цепи Маркова называются сингулярно возмущенными цепями Маркова [2, 3]. Нас интересуют профили действий, которым стационарное распределение μ^ε ставит в соответствие положительную вероятность $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда вытекает определение стохастически устойчивого профиля действий.

Определение 3.1. *Профиль действий a стохастически устойчив относительно процесса P^ε , если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_a^\varepsilon > 0$.*

Мы напомним несколько определений, данных Янгом [27]. Если $P^\varepsilon(a'|a) > 0$, $a, a' \in A$, *одношаговое сопротивление* из профиля действий a в профиль действий $a' \neq a$ определено как минимальное число ошибок (мутаций), необходимое для перехода из a в $a' \neq a$, и обозначается как $r(a, a')$. Из (3.2) ясно, что переход из a в a' имеет вероятность порядка ε , если $a' \notin \mathcal{I}_1(S, a)$ для всех S и, следовательно, имеет сопротивление 1, и порядка 1 иначе, и тогда имеет сопротивление 0. Тогда $r(a, a') \in \{0, 1\}$ для всех $a, a' \in A$. Нулевое сопротивление между двумя профилями действий соответствует переходу с положительной вероятностью согласно P^0 . Можно представить профили действий узлами ориентированного графа без петель, в котором вес направленной дуги между двумя различными узлами равен одношаговому сопротивлению между ними. Поскольку P^ε является неприводимой цепью Маркова, то должен быть как минимум один направленный путь между любыми двумя рекуррентными классами H_i и H_j в P^0 , который начинается в H_i и заканчивается в H_j . Сопротивление любого пути определяется как сумма весов соответствующих дуг. Сопротивление пути, минимального среди всех путей из H_i в H_j , называется *сопротивлением* из H_i в H_j и обозначается как r_{ij} . Сопротивление из любого профиля действий $a^i \in H_i$ в любой профиль действий $a^j \in H_j$ равно r_{ij} , поскольку внутри H_i и H_j профили действий соединены путями с нулевым сопротивлением. Теперь напомним определение стохастического потенциала рекуррентного класса H_i в P^0 из [27]. Он может быть вычислен путем сужения редуцированного графа. Построим граф \mathcal{G} , в котором общее число узлов равно числу рекуррентных классов P^0 (возьмем по одному профилю действий из каждого рекуррентного класса) и вес каждой направленной дуги из a^i в a^j равен r_{ij} . Возьмем узел $a^i \in \mathcal{G}$ и

рассмотрим все опорные деревья такие, что из каждого узла $a^j \in \mathcal{G}$, $a^j \neq a^i$ выходит единственный путь, направленный из a^j в a^i . Такие опорные деревья называются a^i -деревьями. Сопротивление a^i -дерева – это сумма сопротивлений его дуг. Стохастический потенциал a^i равен сопротивлению a^i -дерева, имеющего минимальное сопротивление среди всех a^i -деревьев. Стохастический потенциал каждого узла в H_i одинаков и равен стохастическому потенциалу H_i [27].

Теорема 3.1. *Для стохастической динамики CBR, определенной в разделе 3.2, все \mathcal{K} -устойчивые равновесия и все профили действий из замкнутого цикла, имеющие минимальный стохастический потенциал, являются стохастически устойчивыми. Более того, если один профиль действий в замкнутом цикле является стохастически устойчивым, то все профили действий в замкнутом цикле также стохастически устойчивы.*

Доказательство. Мы знаем, что цепь Маркова P^ε апериодична и неприводима. Из (3.1) и (3.2) легко заметить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^\varepsilon(a'|a) = P^0(a'|a) \quad \forall a, a' \in A.$$

Из (3.2) ясно, что если $P^\varepsilon(a'|a) > 0$ для некоторого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, то имеем

$$0 < \varepsilon^{-r(a,a')} P^\varepsilon(a'|a) < \infty.$$

Цепь Маркова P^ε удовлетворяет всем условиям Теоремы 4 в [27], из которой следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ μ^ε сходится к стационарному распределению μ^0 в P^0 , и профиль действий a стохастически устойчив, т.е. $\mu_a^0 > 0$, тогда и только тогда, когда a входит в рекуррентный класс P^0 , имеющий минимальный стохастический потенциал. Мы знаем, что рекуррентные классы цепи Маркова P^0 являются либо \mathcal{K} -устойчивыми равновесиями, либо замкнутыми циклами. Следовательно, все \mathcal{K} -устойчивые равновесия и профили действий из замкнутых циклов, имеющих минимальный стохастический потенциал, являются стохастически устойчивыми. Доказательство последней части следует из того факта, что стохастический потенциал каждого профиля действий в замкнутом цикле одинаков. \square

Замечание 3.1. Результаты стохастической устойчивости не зависят от функции $f(\cdot)$ или распределений $p_{\mathcal{I}_1}(\cdot)$, $p_{\bar{\mathcal{I}}_1}(\cdot)$ и $p = (p_S)_{S \in \mathcal{K}}$.

Следствие 3.1. *Если $\mathcal{K} = \mathcal{P}(N) \setminus \phi$, то все сильные равновесия по Нэшу и все профили действий из замкнутых циклов стохастически устойчивы в рамках стохастической динамики CBR, определенной в разделе 3.2.*

Доказательство. Если $\mathcal{K} = \mathcal{P}(N) \setminus \phi$, то все сильные равновесия по Нэшу и замкнутые циклы являются рекуррентными классами P^0 . Далее, всегда возможно достичь одного профиля действий из другого профиля действий, совершив не более одной ошибки, так как разрешено формирование гранд-коалиции. Тогда сопротивление r_{ij} между любыми двумя различными рекуррентными классами H_i и H_j всегда равно 1. Следовательно, стохастический потенциал каждого рекуррентного класса P^0 равен $J - 1$, где J – число рекуррентных классов в P^0 . В самом деле, опорное дерево в графе \mathcal{G} содержит только $J - 1$ связей, и каждая из них имеет сопротивление 1. Дальнейшее доказательство следует из Теоремы 3.1. \square

Можно получить аналогичную динамику CBR без ошибок и с ошибками, как представлено в разделах 3.1 и 3.2 соответственно, если для всех $S \in \mathcal{K}$ и $a \in A$ множество улучшенных профилей действий $\mathcal{I}_2(S, a)$ определяется с помощью (2.2). Мы имеем следующие результаты.

Теорема 3.2. *Для стохастической динамики CBR, соответствующей множеству улучшенных профилей действий, определенному с помощью (2.2), все строго \mathcal{K} -устойчивые равновесия и все профили действий из замкнутого цикла, имеющие минимальный стохастический потенциал, являются стохастически устойчивыми. Более того, если один профиль действий в замкнутом цикле является стохастически устойчивым, то все профили действий в замкнутом цикле также стохастически устойчивы.*

Доказательство. Доказательство следует из аргументации, аналогичной приведенной в доказательстве Теоремы 3.1. \square

Следствие 3.2. *Если $\mathcal{K} = \mathcal{P}(N) \setminus \phi$, то все строгие сильные равновесия по Нэшу и все профили действий из замкнутых циклов стохастически устойчивы в рамках стохастической динамики СВР, соответствующей множеству улучшенных профилей действий, определенному с помощью (2.2).*

Доказательство. Доказательство следует из аргументации, аналогичной приведенной в доказательстве Следствия 3.1. \square

3.2.1. Выбор равновесия в координационных играх

Сначала рассмотрим координационную игру 2×2 и обсудим, какое равновесие по Нэшу выбирается динамикой СВР, определенной в разделе 3.2, в долгосрочной перспективе, когда вероятность ошибки становится исчезающе малой. Наши результаты выбора равновесия в координационной игре 2×2 отличаются от результатов, представленных в [18],[27]. Сначала рассмотрим случай, в котором создаются только коалиции размера 1. В этом случае \mathcal{K} -устойчивое равновесие является равновесием по Нэшу. Рассмотрим координационную игру 2×2

$$\begin{array}{cc} & s_1 & s_2 \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{array} \right), \end{array}$$

где $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$, $j, k \in \{1, 2\}$ и $a_{11} > a_{21}$, $b_{11} > b_{12}$, $a_{22} > a_{12}$, $b_{22} > b_{21}$. $A_i = \{s_1, s_2\}$, $i = 1, 2$. Здесь (s_1, s_1) и (s_2, s_2) – два равновесия по Нэшу. В этой игре существует два типа равновесий по Нэшу: один тип в смысле доминирования выигрышей, другой - в смысле доминирования рисков. Если $a_{11} > a_{22}$, $b_{11} > b_{22}$, то (s_1, s_1) доминирует по выигрышу и, если $a_{11} < a_{22}$, $b_{11} < b_{22}$, то (s_2, s_2) доминирует по выигрышу. В других случаях равновесие по Нэшу в смысле доминирования выигрышей не существует. Из [27] определим

$$R_1 = \min \left\{ \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{b_{11} - b_{12}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} \right\},$$

$$R_2 = \min \left\{ \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} \right\}.$$

Если $R_1 > R_2$, то (s_1, s_1) является равновесием по Нэшу в смысле доминирования рисков и, если $R_2 > R_1$, то (s_2, s_2) является равновесием по Нэшу в смысле доминирования рисков.

Пространство состояний цепи Маркова таково: $\{(s_1, s_1), (s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_2, s_2)\}$, где (s_1, s_1) и (s_2, s_2) – поглощающие состояния цепи Маркова P^0 . Из замечания 3.1, результаты стохастической устойчивости не зависят от распределений $p_{\mathcal{I}_1}(\cdot)$, $p_{\overline{\mathcal{I}_1}}(\cdot)$, $p = (p_S)_{S \in \mathcal{K}}$ и функции $f(\cdot)$. Следовательно, мы полагаем, что все распределения равномерные и функция $f(\cdot)$ имеет постоянное значение 1. В рамках данных предположений матрица вероятностей переходов возмущенной цепи Маркова имеет вид

$$P^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon}{2} & \frac{\varepsilon}{4} & \frac{\varepsilon}{4} & 0 \\ \frac{1-\varepsilon}{2} & \varepsilon & 0 & \frac{1-\varepsilon}{2} \\ \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 & \varepsilon & \frac{1-\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{4} & \frac{\varepsilon}{4} & 1 - \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}.$$

Единственное стационарное распределение P^ε следующее: $\mu^\varepsilon = \left(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}, \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}, \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} \right)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $\mu^\varepsilon \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right)$. То есть оба равновесия по Нэшу стохастически устойчивы. Это происходит потому, что нам требуется только одна мутация, чтобы из одного равновесия по Нэшу достичь другого. Следовательно, сопротивление из одного равновесия по Нэшу в другое равновесие по Нэшу равно 1. Тогда стохастический потенциал обоих равновесий по Нэшу равен. Для случая, когда могут создаваться все типы коалиций, динамика СВР всегда выбирает равновесие по Нэшу в смысле доминирования выигрышей всякий раз, когда оно существует, так как оно является SNE. Когда равновесие по Нэшу в смысле доминирования выигрышей не существует, тогда оба равновесия по Нэшу являются сильными равновесиями по Нэшу, и в этом случае динамика СВР выбирает оба равновесия по Нэшу. Стохастическая динамика Янга [27] и Кандори и др. [18] всегда выбирает равновесие по Нэшу в смысле доминирования рисков.

Среди симметричных координационных игр, если мы выйдем за пределы матричных игр 2×2 , результат Янга [27] не может быть обобщен, т.е. необязательно будет выбрано равновесие по Нэшу в смысле доминирования рисков. Рассмотрим пример матричной иг-

ры 3×3 из [27]

$$\begin{array}{c}
 s_1 \\
 s_2 \\
 s_3
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 s_1 & s_2 & s_3 \\
 (6, 6) & (0, 5) & (0, 0) \\
 (5, 0) & (7, 7) & (5, 5) \\
 (0, 0) & (5, 5) & (8, 8)
 \end{pmatrix}.$$

Здесь (s_1, s_1) , (s_2, s_2) и (s_3, s_3) три равновесия по Нэшу. Стохастическая динамика Янга [27] выбирает (s_2, s_2) , которое не является равновесием по Нэшу в смысле доминирования рисков. Равновесие по Нэшу в симметричной координационной игре $m \times m$ доминирует по риску, если оно доминирует по риску во всех парных соревнованиях (см. [12]). Мы теперь обсуждаем выбор равновесия динамикой СВР в вышеописанной координационной игре 3×3 . Сначала рассмотрим случай, в котором создаются только коалиции размера 1. Пространство состояний цепи Маркова следующее: $\{(s_1, s_1), (s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_2, s_1), (s_2, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_1), (s_3, s_2), (s_3, s_3)\}$, где (s_1, s_1) , (s_2, s_2) , и (s_3, s_3) – поглощающие состояния цепи Маркова P^0 . Пометим состояния (s_1, s_1) как 1, (s_2, s_2) как 2, и (s_3, s_3) как 3. Тогда сопротивление из (s_1, s_1) в (s_2, s_2) обозначено как r_{12} , где $r_{12} = 1$. Аналогично, $r_{13} = 2$, $r_{31} = 2$, $r_{21} = 1$, $r_{23} = 1$, $r_{32} = 1$. Здесь имеется три 1-деревья, приведенных ниже.

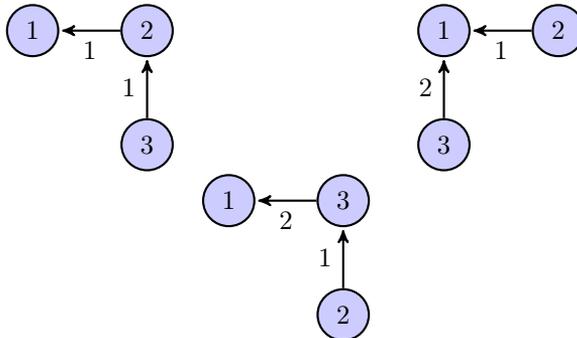


Рисунок 3. 1-деревья

Минимальное сопротивление 1-деревья среди всех 1-деревьев равно 2. Следовательно, стохастический потенциал (s_1, s_1) равен 2. Аналогично, конструируя 2-деревья и 3-деревья, мы можем вычислить

стохастический потенциал для (s_2, s_2) и (s_3, s_3) . Стохастический потенциал (s_2, s_2) и (s_3, s_3) также равен 2. Следовательно, все равновесия по Нэшу стохастически устойчивы по Теореме 3.1. Для случая, в котором нет ограничений на формирование коалиций, динамика СВР выбирает (s_3, s_3) , так как это сильное равновесие по Нэшу.

3.2.2. Приложение к играм формирования сети

В настоящее время игры формирования сети являются консолидированным ответвлением теории игр [5, 6, 13]. Игра формирования сети может быть представлена как игра формирования связей, приведенная в [7]. Парная устойчивая сеть [17] индуцирована профилем стратегий, который является \mathcal{K} -устойчивым равновесием, где \mathcal{K} – множество всех одиночных коалиций игроков и всех коалиций размера 2, в игре формирования связей. В общем случае сети, устойчивые к отклонениям всех коалиций, называются сильно устойчивыми сетями. В литературе есть два определения сильно устойчивых сетей. Первое определение принадлежит Дутта и Мутусвами [7], где сильно устойчивая сеть индуцирована профилем стратегий, который является сильным равновесием по Нэшу в игре формирования связей. Второе определение принадлежит Джексону и фон дер Ньюланду [14], где сильно устойчивая сеть индуцирована профилем стратегий, который является строгим сильным равновесием по Нэшу в игре формирования связей. В рамках стохастической динамики, приведенной Джексонем и Ваттсом [16], парная устойчивая сеть, либо сеть, принадлежащая замкнутому циклу, является стохастически устойчивой сетью, если ее стохастический потенциал минимален среди всех сетей. Этот результат следует из Теоремы 3.2, если \mathcal{K} – множество всех одиночных коалиций игроков и всех коалиций размера 2. Из Следствия 3.1 и Следствия 3.2 следует, что в рамках стохастической динамики СВР все сильно устойчивые сети и замкнутые циклы сетей являются стохастически устойчивыми.

4. Заключение

Представлено формирование коалиций среди игроков в стратегической игре n игроков на бесконечном горизонте и предложена динамика СВР. В динамике присутствуют мутации из-за ошибочных решений, принимаемых коалициями. Мы показываем, что все

\mathcal{K} -устойчивые равновесия и все профили действий из замкнутых циклов, которые имеют минимальный стохастический потенциал, стохастически устойчивы. Аналогичный результат справедлив для строгих \mathcal{K} -устойчивых равновесий. Когда нет ограничений на формирование коалиций, все сильные равновесия по Нэшу и замкнутые циклы стохастически устойчивы. Аналогичный результат выполняется для строгого сильного равновесия по Нэшу.

5. Благодарность

Авторы выражают благодарность В. Мазалову и Ю. Чирковой за замечания, которые улучшили представление работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R.J. *Acceptable points in general cooperative n-person games*. In R. D. Luce and A. W. Tucker, editors, *Contribution to the theory of game IV*, *Annals of Mathematical Study* 40. 1959. P. 287–324.
2. Avrachenkov K., Filar J. and Haviv M. *Singular perturbations of markov chains and decision processes*. In *Handbook of Markov Decision Processes*, *International Series in Operations Research and Management Science*. Springer, 2002.
3. Avrachenkov K., Filar J. and Howlett P. *Analytic perturbation theory and its applications*. SIAM, 2013.
4. Avrachenkov K., Neglia G. and Singh V.V. *Network formation games with teams*. // *Journal of Dynamics and Games* (accepted).
5. Demange G. and Wooders M., editors. *Group Formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions*. Cambridge University Press, 2005.
6. Dutta B. and Jackson M.O., editors. *Networks and Groups: Models of Strategic Formation*. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

7. Dutta B. and Mutuswami S. *Stable networks*. // Journal of Economic Theory. 1997. V. 76. P. 322–344.
8. Foster D., Young H.P. *Stochastic evolutionary game dynamics*. // Theoretical Population Biology. 1990. V. 38(2). P. 219–232.
9. Fudenberg D., Imhof L.A. *Imitation processes with small mutations*. // Journal of Economic Theory. 2006. V. 131. P. 251–262.
10. Fudenberg D., Nowak M.A., Taylor C. and Imhof L.A. *Evolutionary game dynamics in finite populations with strong selection and weak mutation*. // Theoretical Population Biology. 2006. V. 70. P. 352–363.
11. Gale D., Shapley L.S. *College admissions and the stability of marriage*. // The American Mathematical Monthly. 1962. V. 69(1). P. 9–15.
12. Harsanyi J.C., Selten R. *A general theory of equilibrium selection in games*. MIT Press, 1988.
13. Jackson M.O. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, 2010.
14. Jackson M.O., van den Nouweland A. *Strongly stable networks*. // Games and Economic Behavior. 2005. V. 51(2). P. 420–444.
15. Jackson M.O., Watts A. *The evolution of social and economic networks*. // Journal of Economic Theory. 2002. V. 106(2). P. 265–295.
16. Jackson M.O., Watts A. *On the formation of interaction networks in social coordination games*. // Games and Economic Behavior. 2002. V. 41. P. 265–291.
17. Jackson M.O., Wolinsky A. *A strategic model of social and economic networks*. // Journal of Economic Theory. 1996. V. 71(1). P. 44–74.
18. Kandori M., Mailath G.J. and Rob R. *Learning, mutation, and long run equilibria in games*. // Econometrica. 1993. V. 61(1). P. 29–56.
19. Kemeny J.G., Snel J.L. *Finite Markov Chains*. Springer-Verlag, 1976.

20. Klaus B., Klijn F. and Walzl M. *Stochastic stability for roommate markets.* // Journal of Economic Theory. 2010. V. 145(6). P. 2218–2240.
21. Newton J. *Coalitional stochastic stability.* // Games and Economic Behavior. 2012. V. 75(2). P. 842–854.
22. Newton J. *Recontracting and stochastic stability in cooperative games.* // Journal of Economic Theory. 2012. V. 147. P. 364–381.
23. Newton J., Angus S.D. *Coalitions, tipping points and the speed of evolution.* // Journal of Economic Theory. 2015. V. 157. P. 172–187.
24. Newton J., Sawa R. *A one-shot deviation principle for stability in matching problems.* // Journal of Economic Theory. 2015. V. 157. P. 1–27.
25. Roth A., Sotomayor M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis.* Cambridge University Press, 1992.
26. Sawa R. *Coalitional stochastic stability in games, networks and markets.* // Games and Economic Behavior. 2014. V. 88. P. 90–111.
27. Young H.P. *The evolution of conventions.* // Econometrica. 1993. V. 61(1). P. 57–84.

STOCHASTIC COALITIONAL BETTER-RESPONSE
DYNAMICS AND STABLE EQUILIBRIUM

Konstantin Avrachenkov, INRIA Sophia-Antipolis Mediterranee,
Professor (k.avrachenkov@inria.fr).

Vikas Vikram Singh, INRIA Sophia-Antipolis Mediterranee, PhD
(vikasstar@gmail.com).

Abstract: We consider coalition formation among players in an n -player finite strategic game over infinite horizon. At each time a randomly formed coalition makes a joint deviation from a current action profile such that at new action profile all the players from the coalition are strictly benefited. Such deviations define a coalitional better-response (CBR) dynamics that is in general stochastic. The CBR dynamics either converges to a \mathcal{K} -stable equilibrium or becomes stuck in a closed cycle. We also assume that at each time a selected coalition makes mistake in deviation with small probability that add mutations (perturbations) into CBR dynamics. We prove that all \mathcal{K} -stable equilibria and all action profiles from closed cycles, that have minimum stochastic potential, are stochastically stable. Similar statement holds for strict \mathcal{K} -stable equilibrium. We apply the CBR dynamics to study the dynamic formation of the networks in the presence of mutations. Under the CBR dynamics all strongly stable networks and closed cycles of networks are stochastically stable.

Keywords: strong Nash equilibrium, coalitional better-response, stochastic stability, network formation games, strongly stable networks.