

УДК 519.832

ББК 22.1

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ МНОГОШАГОВОЙ ИГРЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ВЛАДИМИР В. МОРОЗОВ*

Московский университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
vmorosov@mail.ru

Рассматривается задача преследования корабля бомбардировщиком, представляющая собой многошаговую игру с запаздыванием информации на два шага. Предлагается метод решения усеченной игры, в которой сброс бомбы бомбардировщиком осуществляется не позднее заданного момента времени.

Ключевые слова: антагонистическая игра, многошаговая игра с запаздыванием, оптимальные смешанные стратегии.

1. Введение

Дубинс в [1] определил следующую игру преследования. Корабль (второй игрок) в начальный момент времени $t = 0$ находится в точке O . Он совершает маневр влево или вправо (от наблюдателя) и в момент $t = 1$ перемещается в точку A или B , где совершает аналогичные маневры и т.д. В результате траектория корабля принадлежит биномиальному дереву¹ (см. рис. 1). Бомбардировщик (первый игрок)

©2017 В.В. Морозов

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00353 а.

¹Термин «биномиальное дерево» используется в модели финансового рынка Кокса-Росса-Рубинштейна [5]. Он вполне оправдан, поскольку если ребрам графа придать ориентацию, согласованную с движением корабля, то получим ориентированный граф без циклов.

имеет возможность в любой момент времени сбросить бомбу, которая достигает поверхности моря через два периода. При сбросе бомбы в момент $t = 0$ бомбардировщик может точно прицелиться в одну из вершин дерева 1, 2 или 3. Аналогично, в момент времени $t = 1$ при положении корабля в вершине A бомбардировщик прицеливается в одну из вершин 4, 5 или 6 (рис. 1) и т.д. Если корабль окажется в точке прицела, то он поражается с вероятностью 1.

Оба игрока используют смешанные стратегии. Корабль выбирает в вершинах $O, A, B, \dots$ движение влево (вправо) от наблюдателя с вероятностями $y, c, d, \dots$ ($1 - y, 1 - c, 1 - d, \dots$) соответственно, а бомбардировщик в каждый момент времени с некоторыми вероятностями выбирает одну из трех точек прицела, соответствующих возможным положениям корабля, либо откладывает сброс бомбы. Игроки осуществляют выбор указанных вероятностей в зависимости от пути, пройденного кораблем. Выигрышем бомбардировщика является вероятность поражения корабля. Итак, бомбардировщик после сброса бомбы узнает точное расположение корабля только через два периода. Аналогично, корабль узнает о сбросе бомбы также спустя два периода

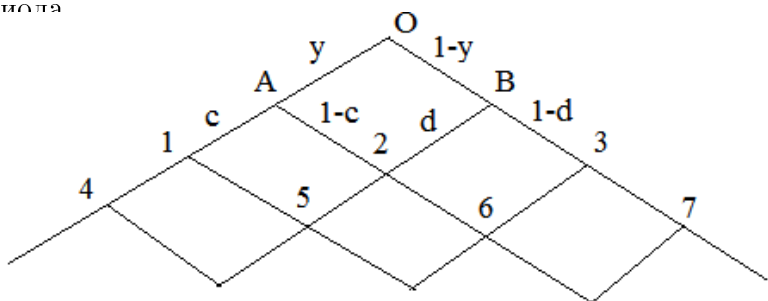


Рисунок 1. Биномиальное дерево перемещений корабля.

Дадим определение многошаговой игры (см. [1]). Пусть $\mathcal{A}$ — множество вершин бесконечного биномиального дерева с корневой вершиной O . Для каждой вершины $A \in \mathcal{A}$ через $\mathcal{H}(A)$ обозначим множество путей, ведущих из O в A . Смешанная стратегия корабля задается семейством отображений $\tau = \{\tau_A, A \in \mathcal{A}\}$, где $\tau_A : \mathcal{H}(A) \rightarrow [0, 1]$. При этом из вершины A при сложившемся пути $h \in \mathcal{H}(A)$ корабль с вероятностью $\tau_A(h)$ перемещается влево, а с вероятностью $1 - \tau_A(h)$ — вправо. Положим $P = \{p \in \mathbb{R}_+^4 | p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1\}$. Смешанная стратегия бомбардировщика задается семейством отображений

$\sigma = \{\sigma_A, A \in \mathcal{A}\}$, где $\sigma_A : \mathcal{H}(A) \rightarrow P$. При этом вектор $p = \sigma_A(h)$ задает условные вероятности p_1, p_2 и p_3 сброса бомбы в вершине A с прицелом в вершины, находящиеся впереди на два шага влево, прямо и вправо, а с вероятностью p_4 сброс откладывается.

Определим функцию выигрыша бомбардировщика. Для заданных стратегий игроков σ, τ и пути $h \in \mathcal{H}(A)$ вероятность поражения корабля в вершине A равна вероятности выбора им пути h , умноженной на вероятность его поражения бомбардировщиком при условии реализации пути h . Сумму этих вероятностей по всевозможным путям, которые могут возникнуть не позднее момента $n + 2$, обозначим через $F_n(\sigma, \tau)$, $n = 0, 1, \dots$. Последовательность $\{F_n(\sigma, \tau)\}$ не убывает и ее предел $F(\sigma, \tau)$ определим как выигрыш бомбардировщика. В результате получили бесконечношаговую игру $G = \langle \{\sigma\}, \{\tau\}, F(\sigma, \tau) \rangle$.

Дубинсом в [1] и независимо Айзексом и Карлином в [7] доказано, что $V = (3 - \sqrt{5})/2$ — значение игры G . Ими найдена оптимальная смешанная стратегия корабля, состоящая в том, что приходя в вершину дерева справа (слева), он с вероятностью $(\sqrt{5} - 1)/2$ выбирает движение влево (вправо), т.е. с этой вероятностью продолжает движение по прямой. Также доказано отсутствие оптимальной стратегии бомбардировщика. Айзексом в [6] построена ε -оптимальная стратегия бомбардировщика. Отметим, что рассматриваемая игра относится к классу игр с запаздыванием, введенных Скарфом и Шепли [3]. Еще более общие многошаговые игры с динамикой процесса, основанной на информационных функциях, изучаются в работах Н.М. Слобожанина (см., например, [4]).

При каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим усеченную игру G_n , в которой бомбардировщик сбрасывает бомбу не позднее момента n . Цель настоящей статьи состоит в разработке метода решения игры G_n .

Следуя работам [1,2], определим подыгру $G_n(y)$ игры G_n , в которой вероятность y выбора кораблем в момент $t = 0$ движения влево (см. рис. 1) предполагается фиксированной и известной бомбардировщику. Обозначим через V_n и $g_n(y)$ значения игр G_n и $G_n(y)$.

В разделе 2 сформулированы некоторые свойства функций $g_n(y)$, в разделе 3 предложен метод построения $g_n(y)$ по известной функции $g_{n-1}(y)$, а в разделе 4 указан способ нахождения оптимальных смешанных стратегий игроков в игре G_n .

2. Свойства функций $g_n(y)$

В [1,2] найдена функция $g_0(y) = \max[(1-y)/2, 1/3, y/2]$ и доказано, что $g_n(y)$ — выпуклые, кусочно-линейные функции, симметричные относительно точки $1/2$, т.е. $g_n(y) = g_n(1-y)$ для всех $y \in [0, 1]$. При этом $g_n(0) = g_n(1) = 1/2$ и

$$g_n\left(\frac{1}{2}\right) = \min_{0 \leq y \leq 1} g_n(y) = V_n < V, \quad n = 0, 1, \dots$$

Кроме того, $g_{n-1}(y) \leq g_n(y)$ для всех $y \in [0, 1]$, $V_{n-1} \leq V_n$, $n = 1, 2, \dots$, а последовательность $\{V_n\}$ сходится к V . Известно также, что

$$g_{n-1}(V_n) = V_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

и V_n является единственным корнем уравнения $g_{n-1}(y) = y$.

Положим для удобства $g_{-1}(y) \equiv 0$. Пусть c и d — вероятности движения корабля влево в вершинах A и B соответственно. Тогда при всех $y \in [0, 1]$ справедливо уравнение

$$g_n(y) = \min_{0 \leq c, d \leq 1} \max_{1 \leq i \leq 4} f_i(y, c, d), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

где

$$f_1(y, c, d) = cy, \quad f_2(y, c, d) = (1-c)y + d(1-y),$$

$$f_3(y, c, d) = (1-d)(1-y), \quad f_4(y, c, d) = yg_{n-1}(c) + (1-y)g_{n-1}(d).$$

Здесь $f_i(y, c, d)$, $i = 1, 2, 3$ — вероятности поражения корабля при сбросе бомбы в момент $t = 0$ с прицелом в вершины дерева 1, 2 и 3 соответственно, а $f_4(y, c, d)$ — гарантированный выигрыш бомбардировщика в случае отсрочки сброса.

Пусть

$$[t_n, 1 - t_n] = \text{Arg} \min_{0 \leq y \leq 1} g_n(y), \quad \alpha_n = \frac{1 - 2V_n}{1 - V_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Заметим, что $\alpha_n \leq 1/2$, $n = 0, 1, \dots$, поскольку $V_n \geq V_0 = 1/3$. Карлин в [2] установил, что $t_n \leq \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. Он полагал (см. теорему 3 в [2]), что $t_n = \alpha_n$ и использовал этот факт в доказательствах. Однако, как мы увидим в разделе 3, уже при $n = 2$ это равенство не выполнено: $t_2 < \alpha_2$. Ошибка Карлина не влияет на все сформулированные в данной статье результаты.

Утверждение 2.1. Функция $g_n(y) = (1 - y)/2$ при $y \in [0, \alpha_{n-1}/2]$ и $g_n(y) > (1 - y)/2$ при $y \in [\alpha_{n-1}/2, 1/2]$, $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Для любого $y \in [0, 1]$ справедливы неравенства $g_n(y) \geq g_0(y) \geq (1 - y)/2$. Покажем, что при $y \in [0, \alpha_{n-1}/2]$ верно обратное неравенство $g_n(y) \leq (1 - y)/2$. Возьмем $c = 1$, $d = 1/2$. Тогда из уравнения (2.2) получим неравенство

$$\begin{aligned} g_n(y) &\leq \max \left[y, \frac{1-y}{2}, yg_{n-1}(1) + (1-y)g_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= \max \left[y, \frac{1-y}{2}, \frac{y}{2} + (1-y)V_{n-1} \right] = \frac{1-y}{2}. \end{aligned}$$

Докажем последнее равенство. Для $y \in [0, \alpha_{n-1}/2]$

$$y \leq \frac{\alpha_{n-1}}{2} = \frac{1 - 2V_{n-1}}{2(1 - V_{n-1})} < \frac{1}{3}.$$

Отсюда $y < (1 - y)/2$. Наконец, неравенство $y/2 + (1 - y)V_{n-1} \leq (1 - y)/2$ эквивалентно неравенству $y \leq \alpha_{n-1}/2$. Итак, $g_n(y) = (1 - y)/2$ для всех $y \in [0, \alpha_{n-1}/2]$.

Покажем, что $g_n(y) > (1 - y)/2$ для любого $y \in [\alpha_{n-1}/2, 1/2]$. Пусть $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in P$, где p_i — вероятность выбора бомбардировщиком сброса бомбы в момент $t = 0$ с прицелом на вершину $i \in \{1, 2, 3\}$ на биномиальном дереве (см. рис. 1), а p_4 — вероятность отсрочки сброса. Имеем

$$\begin{aligned} g_n(y) &= \min_{0 \leq c, d \leq 1} \max_{1 \leq i \leq 4} f_i(y, c, d) = \min_{0 \leq c, d \leq 1} \max_{p \in P} \sum_{i=1}^4 p_i f_i(y, c, d) = \\ &= \max_{p \in P} \min_{0 \leq c, d \leq 1} \sum_{i=1}^4 p_i f_i(y, c, d) = \max_{p \in P} \left\{ y \min_{0 \leq c \leq 1} [cp_1 + (1 - c)p_2 + g_{n-1}(c)p_4] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - y) \min_{0 \leq d \leq 1} [dp_2 + (1 - d)p_3 + g_{n-1}(d)p_4] \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках возьмем при $p = (0, 1/4, 1/4, 1/2)$. Используя оценки $g_{n-1}(c) \geq c/2$ и $g_{n-1}(d) \geq V_{n-1}$, получим

$$g_n(y) \geq \frac{y}{4} + (1 - y) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} V_{n-1} \right) > \frac{1 - y}{2},$$

поскольку последнее неравенство можно записать как $y > \alpha_{n-1}/2$. $\square$

По доказанному утверждению $\alpha_{n-1}/2$ является точкой излома графика функции $g_n(y)$.

Пусть $c(y), d(y)$ доставляют минимум в правой части уравнения (2.2) при $y \in [0, 1]$. Просматривая доказательство утверждения 2.1, нетрудно установить, что $c(y) \equiv 1$, $d(y) \equiv 1/2$ на отрезке $[0, \alpha_{n-1}/2]$. Следующий результат из [2, лемма 8] формулируется здесь с некоторыми уточнениями.

Теорема 2.1. Пусть $V_{n-1} < t_{n-1}$. Тогда $V_{n-1} < V_n$ и для любого $y \in [\alpha_{n-1}/2, \alpha_n]$ пара $(c(y), d(y))$, реализующая минимум в (2.2), определяется однозначно как решение следующей системы уравнений относительно (c, d) :

$$\begin{aligned} g_n(y) &= (1 - c)y + d(1 - y) = (1 - d)(1 - y) = \\ &= yg_{n-1}(c) + (1 - y)g_{n-1}(d). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее в разделе 3 будет показано, что $V_1 = 1/3 < t_1 = 1/2$. Поэтому по теореме 2.1 $V_n > 1/3$ при $n \geq 2$.

Следствие 2.1. Функции $c(y)$ и $d(y)$ на отрезке $[\alpha_{n-1}/2, \alpha_n]$ представимы в виде

$$c(y) = \frac{1 - 2g_n(y)}{y}, \quad d(y) = 1 - \frac{g_n(y)}{1 - y} \quad (2.4)$$

и убывают от значений 1 и $1/2$ до значений $1 - V_n$ и V_n соответственно.

Доказательство. Формулы (2.4) непосредственно вытекают из системы (2.3). В точках интервала $(\alpha_{n-1}/2, \alpha_n)$ оценим производные² функций $c(y)$ и $d(y)$:

$$\begin{aligned} c'(y) &= \frac{2g_n(y) - 2g'_n(y)y - 1}{y^2} = \frac{2(g_n(y) - g_n(0) - g'_n(y)y)}{y^2} < 0, \\ d'(y) &= \frac{-g'_n(y)(1 - y) - g_n(y)}{(1 - y)^2} < \frac{(1 - y)/2 - g_n(y)}{(1 - y)^2} < 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $c(\alpha_n) = 1 - V_n$ и $d(\alpha_n) = V_n$. □

²Для точки излома y_0 выпуклой кусочно-линейной функции $f(y)$ через $f'(y_0)$ обозначим ее субградиент, т.е. любое число из отрезка $[f'_-(y_0), f'_+(y_0)]$, где $f'_-(y_0)$ и $f'_+(y_0)$ — ее левая и правая производные в точке y_0 .

Замечание 2.1. Пусть в условиях теоремы 2.1 $y \in [1 - \alpha_n, 1 - \alpha_{n-1}/2]$. Тогда пара $(c(y), d(y))$, реализующая минимум в (2.2), определяется однозначно из системы уравнений

$$g_n(y) = cy = (1 - c)y + d(1 - y) = yg_{n-1}(c) + (1 - y)g_{n-1}(d)$$

и задается формулами

$$c(y) = \frac{g_n(y)}{y}, \quad d(y) = \frac{2g_n(y) - y}{1 - y}. \quad (2.5)$$

Нетрудно показать, что функции $c(y)$ и $d(y)$ убывают на отрезке $[1 - \alpha_n, 1 - \alpha_{n-1}/2]$. Для этого следует сделать замену переменной $y = 1 - z$ и выразить функции (2.5) через функции (2.4).

3. Построение функций $g_n(y)$

С учетом результатов раздела 2 функцию $g_n(y)$ достаточно построить на отрезке $[\alpha_{n-1}/2, \alpha_n]$. Далее будет показано, что $g_n(y)$ является максимумом семейства линейных функций $s_i(y) = b_i - k_i y$, где $g_n(y) = s_i(y)$, $y \in [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \dots, m$. При этом $a_0 = 0$, $a_m = 1$. Из утверждения 2.1 следует, что

$$a_1 = \frac{\alpha_{n-1}}{2}, \quad a_{m-1} = 1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2}, \quad s_1(y) = \frac{1 - y}{2}, \quad s_m(y) = \frac{y}{2}.$$

Построим функцию $g_n(y)$, предполагая известной функцию

$$g_{n-1}(y) = \max_{1 \leq i \leq l} \hat{s}_i(y) = \max_{1 \leq i \leq l} (\hat{b}_i - \hat{k}_i y)$$

где $g_{n-1}(y) = \hat{s}_i(y)$, $y \in [\hat{a}_{i-1}, \hat{a}_i]$, $i = 1, \dots, l$, $\hat{a}_0 = 0$, $\hat{a}_l = 1$. По следствию 2.1 функции $c(y)$ и $d(y)$ убывают на отрезке $[\alpha_{n-1}/2, \alpha_n]$. Если $c(y) \in [\hat{a}_{j-1}, \hat{a}_j]$, $d(y) \in [\hat{a}_{r-1}, \hat{a}_r]$, то по теореме 2.1 при некотором i

$$g_n(y) = b_i - k_i y = yg_{n-1}(c(y)) + (1 - y)g_{n-1}(d(y)), \quad (3.1)$$

где

$$g_{n-1}(c(y)) = \hat{b}_j - \hat{k}_j c(y), \quad c(y) = \frac{1 - 2(b_i - k_i y)}{y},$$

$$g_{n-1}(d(y)) = \hat{b}_r - \hat{k}_r d(y), \quad d(y) = 1 - \frac{b_i - k_i y}{1 - y}.$$

Приравнивая в (3.1) свободные члены и коэффициенты при y левой и правой частей, получаем систему уравнений относительно (b_i, k_i) :

$$b_i = -\hat{k}_j(1 - 2b_i) + \hat{k}_r b_i + \hat{b}_r - \hat{k}_r, \quad -k_i = \hat{b}_j - 2\hat{k}_j k_i - \hat{b}_r + \hat{k}_r(1 - k_i),$$

из которой

$$b_i = \frac{\hat{b}_r - \hat{k}_j - \hat{k}_r}{1 - 2\hat{k}_j - \hat{k}_r}, \quad k_i = \frac{\hat{b}_r - \hat{b}_j - \hat{k}_r}{1 - 2\hat{k}_j - \hat{k}_r}. \quad (3.2)$$

Используя формулы (3.2), найдем функции $s_2(y), s_3(y), \dots$. Начнем с функции $s_2(y) = b_2 - k_2 y$. Будем увеличивать y от точки $a_1 = \alpha_{n-1}/2$ до некоторой точки a_2 , пока выполняются включения $c(y) \in [1 - \alpha_{n-1}/2, 1] = [\hat{a}_{j-1}, \hat{a}_j]$ и $d(y) \in [\hat{a}_{r-1}, \hat{a}_r]$, где отрезок $[\hat{a}_{r-1}, \hat{a}_r]$ содержит точку $1/2$. При этом если $V_{n-1} > 1/3$, то $\alpha_{n-1} < 1/2$ и $[\hat{a}_{r-1}, \hat{a}_r] = [t_{n-1}, 1 - t_{n-1}]$. В этом основном случае

$$\hat{s}_j(y) = \frac{y}{2}, \quad \hat{b}_j = 0, \quad \hat{k}_j = -\frac{1}{2}, \quad \hat{s}_r(y) \equiv V_{n-1}, \quad \hat{b}_r = V_{n-1}, \quad \hat{k}_r = 0,$$

и из формул (3.2) при $i = 2$ находим $b_2 = V_{n-1}/2 + 1/4$, $k_2 = V_{n-1}/2$.

Итак, функция $s_2(y)$ построена. Найдем точку излома a_2 графика функции $g_n(y)$. Пусть y_c и y_d — корни уравнений $c(y) = \hat{a}_{j-1}$ и $d(y) = \hat{a}_{r-1}$ соответственно. Тогда $a_2 = \min(y_c, y_d)$. Нетрудно проверить, что

$$y_c = \frac{1 - 2b_i}{\hat{a}_{j-1} - 2k_i}, \quad y_d = \frac{1 - \hat{a}_{r-1} - b_i}{1 - \hat{a}_{r-1} - k_i}. \quad (3.3)$$

Чтобы построить функцию $s_3(y) = b_3 - k_3 y$, поступаем следующим образом. Если $y_c < y_d$, то уменьшаем на единицу j , в противном случае уменьшаем на единицу r . После этого находим b_3, k_3 по формулам (3.2) при $i = 3$, затем по формулам (3.3) определяем точки y_c, y_d и т.д. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $j + r < l + 1$.

Отметим, что на последнем шаге, когда $j + r = l + 1$, отрезки $[\hat{a}_{r-1}, \hat{a}_r]$ и $[\hat{a}_{j-1}, \hat{a}_j]$ расположены симметрично относительно точки $1/2$ и $\hat{s}_j(y) = \hat{s}_r(1 - y)$ при $y \in [\hat{a}_{j-1}, \hat{a}_j]$. Отсюда $\hat{k}_j = -\hat{k}_r$, $\hat{b}_j = \hat{b}_r - \hat{k}_r$, и из формул (3.2) получаем $b_i = \hat{b}_r/(1 - \hat{k}_j)$, $k_i = 0$. Поскольку $k_i = 0$, $b_i = V_n$. Следовательно, $s_i(y) \equiv V_n$ и $a_{i-1} = t_n$.

Пример 3.1. Используя предложенный алгоритм, построим функцию $g_1(y)$ по функции $g_0(y) = \max[(1-y)/2, 1/3, y/2]$. Имеем

$$\hat{a}_0 = 0, \hat{a}_1 = t_0 = \frac{1}{3}, \hat{a}_2 = \frac{2}{3}, \hat{a}_3 = 1, V_0 = \frac{1}{3}, a_0 = 0, a_1 = \frac{1 - 2V_0}{1 - V_0} = \frac{1}{4},$$

$$s_2(y) = \frac{V_0}{2} + \frac{1}{4} - \frac{V_0}{2}y = \frac{5}{12} - \frac{1}{6}y, i = r = 2, j = 3, \hat{a}_{j-1} = \frac{2}{3}, \hat{a}_{r-1} = \frac{1}{3},$$

$$b_i = \frac{5}{12}, k_i = \frac{1}{6}, y_c = y_d = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $a_2 = 1/2$, $g_1(y) = \max[(1-y)/2, 5/12 - y/6, 1/4 + y/6, y/2]$ и $V_1 = g_1(1/2) = 1/3$. В данном случае отрезок $[t_1, 1-t_1]$ вырождается в точку $1/2$. Поэтому соответствующая ему функция $s_i(y) \equiv V_1 = 1/3$ не используется в выражении для $g_1(y)$. Она получается из функций $\hat{s}_j(y) = \hat{s}_3(y) = y/2$ и $\hat{s}_r(y) = \hat{s}_1(y) = (1-y)/2$, где $r+j = l+1 = 4$. Действительно, здесь $\hat{b}_j = 0, \hat{k}_j = -1/2, \hat{b}_r = \hat{k}_r = 1/2$, и по формулам (3.2) $b_i = 1/3, k_i = 0$.

Пример 3.2. Построим функцию $g_2(y)$ по функции $g_1(y)$. Имеем

$$\hat{a}_0 = 0, \hat{a}_1 = \frac{1}{4}, \hat{a}_2 = t_1 = \frac{1}{2}, \hat{a}_3 = \frac{3}{4}, \hat{a}_4 = 1, a_0 = 0, a_1 = \frac{1 - 2V_1}{1 - V_1} = \frac{1}{4},$$

$$j = l = 4, r = 2, \hat{b}_j = 0, \hat{k}_j = -\frac{1}{2}, \hat{b}_r = \frac{5}{12}, \hat{k}_r = \frac{1}{6}.$$

По формулам (3.2) находим коэффициенты $b_i = b_2 = 9/22$, $k_i = k_2 = 3/22$ и функцию $s_2(y) = 9/22 - 3y/22$. Далее, $\hat{a}_{j-1} = \hat{a}_3 = 3/4$, $\hat{a}_{r-1} = \hat{a}_1 = 1/4$. По формулам (3.3) находим $y_c = 8/21 < y_d = 5/9$. Отсюда $a_2 = 8/21$ и полагаем $j = 3$, $\hat{k}_j = -1/6$. Найдем $s_i(y) = s_3(y)$. Поскольку $j+r = 5 = l+1$, функция $s_3(y) \equiv V_2 = \hat{b}_r/(1 - \hat{k}_j) = \hat{b}_2/(1 - \hat{k}_3) = 5/14$. В результате

$$g_2(y) = \max \left[\frac{1}{2} - \frac{y}{2}, \frac{9}{22} - \frac{3y}{22}, \frac{5}{14}, \frac{6}{11} + \frac{3y}{22}, \frac{y}{2} \right].$$

Отметим, что $t_2 = a_2 = 8/21$, а $\alpha_2 = (1 - 2V_2)/(1 - V_2) = 4/9$.

Замечание 3.1. Вычисления показывают, что при $n \geq 2$ в процессе построения функции $g_n(y)$ $y_c \neq y_d$ при $j+r > l+1$. Отсюда можно вывести, что $g_n(y)$ является максимумом из $2n+1$ линейных функций. Кроме того, в ходе расчетов выполняется неравенство $V_{n-1} < t_{n-1}$ и по теореме 2.1 $V_{n-1} < V_n$. Представляет интерес строгое доказательство последнего неравенства.

4. Решение игры G_n

Учитывая замечание 3.1, значение игры G_n запишем как

$$V_n = \min_{0 \leq y \leq 1} g_n(y) = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{1 \leq i \leq 2n+1} s_i(y) = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{1 \leq i \leq 2n+1} (b_i - k_i y).$$

Утверждение 4.1. При каждом $i = 1, \dots, 2n+1$ бомбардировщик, используя подходящую смешанную стратегию в игре G_n , может обеспечить себе выигрыш $s_i(y)$ при любом $y \in [0, 1]$ и, в частности, выигрыш $s_n(y) \equiv V_n$.

Доказательство. Будем использовать метод математической индукции. Покажем, что утверждение верно для игры G_0 , в которой $V_0 = 1/3$, а $g_0(y) = \max[(1-y)/3, 1/3, y/2]$. Чтобы обеспечить выигрыш $s_1(y) = (1-y)/2$ (выигрыш $s_3(y) = y/2$) бомбардировщик выбирает точки прицела 2 и 3 (точки 1 и 2) с вероятностями $1/2$ (см. рис. 1). Чтобы получить выигрыш $s_2(y) \equiv V_0 = 1/3$, бомбардировщик выбирает точки прицела 1, 2 и 3 с вероятностями $1/3$.

Предположим, что утверждение справедливо для игры G_{n-1} . Докажем его для игры G_n . Для функций $s_1(y) = (1-y)/2$ и $s_{2n+1}(y) = y/2$ требуемые смешанные стратегии бомбардировщика указаны выше. Возьмем $i \in \{2, \dots, n\}$ и пусть функция $s_i(y) = b_i - k_i y$ получена из функций $\hat{s}_j(y) = \hat{b}_j - \hat{k}_j y$ и $\hat{s}_r(y) = \hat{b}_r - \hat{k}_r y$ по алгоритму, описанному в разделе 3. Напомним, что в момент $t = 0$ $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ — смешанная стратегия бомбардировщика, где p_i — вероятность выбора точки прицела $i \in \{1, 2, 3\}$, а p_4 — вероятность отсрочки сброса бомбы. Определим вектор

$$p = \left(0, -\frac{\hat{k}_j}{1 - 2\hat{k}_j - \hat{k}_r}, -\frac{\hat{k}_j + \hat{k}_r}{1 - 2\hat{k}_j - \hat{k}_r}, \frac{1}{1 - 2\hat{k}_j - \hat{k}_r} \right). \quad (4.1)$$

Используя формулы (3.2), нетрудно проверить справедливость тождества

$$b_i - k_i y \equiv y[cp_1 + (1-c)p_2 + (\hat{b}_j - \hat{k}_j c)p_4] + (1-y)[dp_2 + (1-d)p_3 + (\hat{b}_r - \hat{k}_r d)p_4].$$

Здесь в правой части $cp_1 + (1-c)p_2 + (\hat{b}_j - \hat{k}_j c)p_4$ — ожидаемый выигрыш бомбардировщика, если игра G_n перейдет из точки O в точку A . При этом согласно индуктивному предположению выигрыш

$\hat{b}_j - \hat{k}_j c$ в игре G_{n-1} бомбардировщик в состоянии обеспечить при любом $c \in [0, 1]$.

Аналогичное замечание можно сделать относительно выражения $dp_2 + (1 - d)p_3 + (\hat{b}_r - \hat{k}_r d)p_4$. Таким образом, используя в начальный момент вектор вероятностей (4.1), бомбардировщик обеспечивает себе выигрыш $b_i - k_i y$ при любом $y \in [0, 1]$.

Если $i \in \{n + 1, \dots, 2n\}$, то можно сначала построить смешанную стратегию бомбардировщика, гарантирующую ему при любом $y \in [0, 1]$ выигрыш $s_{2n+2-i}(y) = s_i(1 - y)$, а потом полученные в вершинах дерева вероятности приписать вершинам, симметричным относительно вертикальной оси дерева. $\square$

В доказательстве утверждения 4.1 содержится метод построения оптимальной смешанной стратегии бомбардировщика. Укажем оптимальную смешанную стратегию корабля. В начальный момент корабль выбирает $y = 1/2$, минимизирующее функцию $g_n(y)$. Если игра G_n перейдет в вершину A (вершину B), то корабль выбирает $c = c(1/2)$ ($d = d(1/2)$) и т.д. При этом корабль не позволит бомбардировщику выиграть больше, чем V_n .

Пример 4.1. Решим игру G_2 . Значение игры равно $V_2 = 5/14$. Функция $s_3(y) \equiv 5/14$ была получена из функций $\hat{s}_j(y) = \hat{s}_3(y) = 1/4 + y/6$ и $\hat{s}_r(y) = \hat{s}_2(y) = 5/12 - y/6$ (см. пример 3.2). Здесь $\hat{k}_j = -1/6$, $\hat{k}_r = 1/6$. Из формулы (4.1) находим $p = (0, 1/7, 0, 6/7)$. Выбирая p , бомбардировщик в момент $t = 0$ с вероятностью $1/7$ прицеливается в вершину 2, а с вероятностью $6/7$ откладывает сброс бомбы. Соответствующие вероятности указаны при вершинах на рис. 2. Если вероятность взята в скобки, то это означает, что игра в вершине не завершена.

Пусть из вершины O игра G_2 перешла в вершину B . Убираем «крышку» с функции $\hat{s}_r(y) = \hat{s}_2(y)$. Функция $s_2(y) = 5/12 - y/6$ получена из функций $\hat{s}_j(y) = y/2$ и $\hat{s}_r(y) \equiv 1/3$ (см. пример 3.1). Здесь $\hat{k}_j = -1/2$, $\hat{k}_r = 0$. Вновь используя формулу (4.1), находим $p = (0, 1/4, 1/4, 1/2)$. Отсюда следует, что в вершине B бомбардировщик с вероятностями $1/4$ прицеливается в вершины 6 и 7, а с вероятностью $1/2$ откладывает сброс бомбы.

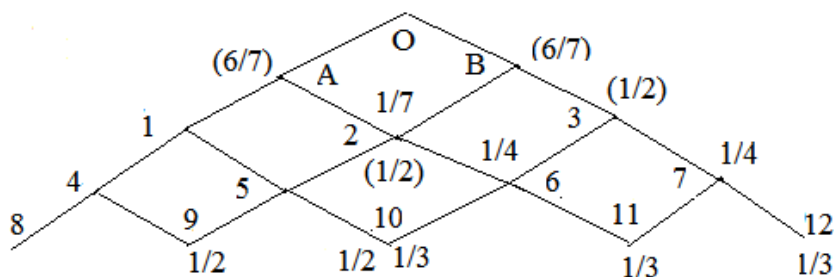


Рисунок 2. Оптимальная смешанная стратегия бомбардировщика в игре G_2 .

Предположим, что в игре реализовалась вершина 3. Тогда чтобы обеспечить себе выигрыш $\hat{s}_r(y) \equiv 1/3$ бомбардировщик выбирает для прицела вершину 10, 11 или 12 с вероятностями $1/3$. Если игра перешла в вершину 2, то чтобы обеспечить выигрыш $s_j(y) = y/2$, бомбардировщик с вероятностями $1/2$ прицеливается в вершину 9 или 10.

Пусть из вершины O игра G_2 перешла в вершину A . Тогда поведение бомбардировщик полностью симметрично только что рассмотренному. Например, в вершине A он с вероятностями $1/4$ он прицеливается в вершины 4 и 5, а с вероятностью $1/2$ откладывает сброс бомбы.

Отметим, что при использовании бомбардировщиком оптимальной смешанной стратегии для путей, проходящих через вершину 3, его выигрыш равен

$$\frac{6}{7} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{14} = V_2,$$

а для пути $O - B - 2 - 5 - 9$ он составляет величину

$$\frac{1}{7} + \frac{6}{7} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{7} > V_2 = \frac{5}{14}.$$

Укажем оптимальную смешанную стратегию корабля в игре G_2 . Для ребра $K - T$ и пути, ведущему к нему из вершины O через вершину C (вершины C и D), вероятность выбора ребра обозначим через q_{K-T}^C (q_{K-T}^{CD}). Если к ребру $K - T$ ведет единственный путь, то верхние индексы будем опускать. В начальный момент вероятность

Для частичной проверки оптимальности построенной стратегии корабля рассмотрим следующую чистую стратегию S бомбардировщика. Он сбрасывает бомбу в момент $t = 2$. При этом в вершине 1 он выбирает для прицела вершину 9, в вершине 2 — вершину 10, а в вершине 3 — вершину 11. Если корабль использует оптимальную смешанную стратегию, а бомбардировщик — стратегию S , то выигрыш бомбардировщика составляет величину

$$q_{A-1}(q_{1-4}q_{4-9} + q_{1-5}q_{5-9}^{A1}) + q_{A-2}(q_{2-5}^A q_{5-10}^{A2} + q_{2-6}^A q_{6-10}^A) + \\ + q_{B-2}(q_{2-5}^B q_{5-10}^B + q_{2-6}^{B2} q_{6-10}^{B2}) + q_{B-3}(q_{3-6}^B q_{6-11}^{B3} + q_{3-7} q_{7-11}) = \frac{5}{14} = V_2.$$

В заключение отметим, что весьма актуально решение рассматриваемой многошаговой игры с задержкой информации на k периодов, где $k \geq 3$.

Автор выражает благодарность рецензенту за замечания, позволившие улучшить содержание статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинс Л.Э. *Дискретная игра на уклонение от преследования* // Применение теории игр в военном деле. Сб. статей под ред. В.О. Ашкеназы. М.: Советское радио, 1961. С. 275–302.
2. Карлин С. *Бесконечноходовая игра с запаздыванием* // Применение теории игр в военном деле. Сб. статей под ред. В.О. Ашкеназы. М.: Советское радио, 1961. С. 303–321).
3. Скарф Х.Э., Шепли Л.С. *Игры с неполной информацией* // Применение теории игр в военном деле. Сб. статей под ред. В.О. Ашкеназы. М.: Советское радио, 1961. С. 265–274.
4. Слобожанин Н.М. *Информационная разрешимость в многошаговых играх с конечным множеством игроков* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 2. С. 81–101.
5. Hull J.C. *Options, futures and other derivatives*. 9th ed. Boston MA: Prentice Hall, 2012.

6. Isaacs R.P. *The problem of aiming and evasion* // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. V. 2. N 1,2. P. 47–67.
7. Isaacs R.P., Karlin S. *A game of aiming and evasion*. The RAND Corporation. Research Memorandum RM-1316, 1954.

ON SOLUTION OF SOME MULTISTAGE GAME WITH A LAG

Vladimir V. Morozov, Moscow State University, Cand.Sc.,
associated professor (vmorosov@mail.ru).

Abstract: The game of pursuit of a ship by a bomber is considered. A method for solving a truncated game where the bomber attacks a ship no later than in a given point of time is proposed.

Keywords: zero-sum game, multistage game with a lag, optimal mixed strategies.