

УДК 519.83

ББК 22.18

КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА ДЛЯ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

СЕРГЕЙ И. ДОЦЕНКО

Факультет компьютерных наук и кибернетики

Киевский национальный университет

им. Тараса Шевченко

03022, Украина, Киев, пр. Глушкова, 4д

e-mail: sergei204@ukr.net

Рассмотрена задача о рюкзаке, в которой в роли неделимых предметов выступают агенты, каждый из которых характеризуется весом и полезностью и желает быть взятым в рюкзак. Такая ситуация рассматривается с применением кооперативной теории игр с трансферабельной полезностью. Для такой кооперативной игры задается характеристическая функция, являющейся обобщением х.ф. в задаче о банкротстве. Однако, в отличие от задачи о банкротстве, х.ф. не является выпуклой. Тем не менее, оказывается, что S -ядро такой игры не пусто. В конце статьи рассматриваются некоторые варианты частного случая задачи о рюкзаке с тремя агентами. Для рассмотренных вариантов в явном виде находятся величины вектора Шепли, n -ядра и τ -значения.

Ключевые слова: задача о рюкзаке, кооперативная игра, задача о банкротстве, S -ядро, вектор Шепли, n -ядро, τ -значение.

1. Задача о рюкзаке

Классическая задача о рюкзаке (ЗР) формулируется следующим образом. Пусть есть n неделимых предметов, каждый из которых характеризуется весом w_i и полезностью p_i и рюкзак вместимостью W ,

причем $W < \sum_{i=1}^n w_i$ (т.е. все предметы одновременно не помещаются в рюкзак). Требуется выбрать такое множество предметов, чтобы их суммарный вес не превышал вместимости рюкзака, а суммарная полезность была бы максимальной. Пусть $\chi_i \in \{0; 1\}$ — индикатор того, что i -й предмет был положен в рюкзак.

Тогда задача приобретает вид: $\sum_{i=1}^n \chi_i p_i \rightarrow \max \left| \sum_{i=1}^n \chi_i w_i \leq W \right.$.

Данная задача является NP -трудной и количество допустимых решений растет как 2^n .

Классическая ЗР рассматривается с точки зрения максимальной выгоды того, кто «упаковывает» рюкзак (т.е. выбирает предметы, которые в нем будут находиться). Сами же предметы либо считаются неодушевленными, либо же их интересы умышлено игнорируются. Пусть например мастеру по ремонту чего-либо поступило несколько заказов, которые нужно выполнить в течение следующего дня, каждый заказ характеризуется временем выполнения и платой за его выполнение и при этом их суммарное время выполнения превышает продолжительность рабочего дня. Мастер, решая, какие заказы он будет выполнять, а какие нет, по сути решает задачу ЗР, заботясь о максимизации собственного заработка и ему безразлично, какие именно заказы останутся невыполненными.

Предположим теперь, что за каждым предметом стоит агент, желающий, чтобы данный предмет был размещен в рюкзаке. Например, пусть выбор предмета означает наем агента на работу либо аренда предмета у агента. Покажем на примере, что выбор предмета в рюкзак зависит не только от его характеристик, но и характеристик других предметов.

Характеристики предметов будем задавать двухкомпонентным вектором (вес, цена).

Пусть есть пять предметов $A(5, 6), B(5, 6), C(9, 10), D(1, 3)$ и вместимость рюкзака равна 10. Тогда оптимальным решением будет (C, D) , при этом суммарный вес предметов будет равен 10 а полезность 13. Вычеркнем D . Тогда оптимальным решением уже будет (A, B) , при этом суммарный вес предметов остается равным 10 а суммарная полезность стает равной 12. Заметим, что если бы выбор предметов в рюкзак был бы «конкурсом по выбору лучших» в

некотором смысле предметов, то при вычеркивании некоторого предмета (т.е. «устранении конкурента») предметы, находящиеся в рюкзаке должны были бы там оставаться. Однако, как видно из примера, при вычеркивании D , C перестает входить в оптимальное решение.

Далее рассмотрим задачу справедливого (в некотором смысле) распределения, состоящего из двух этапов: 1) Решение ЗР. 2) Распределение полученной максимальной полезности между всеми агентами (как входящими в рюкзак, так и не входящими в него).

2. Связь задачи о рюкзаке с задачей о банкротстве

В [1] была проанализирована задача о банкротстве на основе текстов Талмуда, в частности, была приведена такая притча. К раввину пришло два кредитора, один из которых претендовал на все наследство, а второй - на половину и попросили их рассудить. Очевидно, удовлетворить претензии каждого из кредиторов в полной мере не представляется возможным, и тогда раввин предложил такой вариант дележа. Поскольку первый кредитор претендует на все, то он не уступит второму ничего. Поскольку второй претендует на половину наследства, то он готов уступить первому половину. Если не хватает денег, чтобы удовлетворить претензии, то их хватит для того, чтобы удовлетворить уступки. Тогда нужно раздать каждому причитающуюся ему уступку (т.е. $1/2$ и 0 соответственно), а оставшуюся сумму (т.е. $1/2$) поделить между ними поровну. Таким образом, претенденты получают $3/4$ и $1/4$ от суммы наследства. Части наследства для двух кредиторов могут быть рассчитаны по следующей формуле. Если E — величина наследства, c_1, c_2 — претензии кредиторов, то они получают удовлетворение претензий в размере

$$x_i = \frac{E - (E - c_i)_+ + (E - c_{3-i})_+}{2}, \quad i = 1, 2.$$

В [2] было предложено каждой задаче о банкротстве ставить в соответствие характеристическую функцию (х.ф.) кооперативной игры, вычисляемой по формуле

$$V(S) = \left(E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right)_+, \quad (2.1)$$

где $x_+ = \max(x, 0)$, а кредиторов считать игроками в кооперативной игре с такой х.ф. Значение х.ф. от коалиции S — это уступка ей со стороны членов коалиции $N \setminus S$, т.е. сумма, которая останется после попытки полного удовлетворения претензий членов $N \setminus S$.

В [3] было показано, что такая х.ф. всегда является выпуклой, следовательно C -ядро игры не пусто, а такие решения кооперативной игры, как вектор Шепли, n -ядро и τ -значение заведомо принадлежат C -ядру.

Это же можно показать, предварительно доказав для х.ф. (2/1) выполнение «эффекта снежного кома» (ЭСК) и воспользовавшись равносильностью условий выпуклости и выполнения ЭСК.

ЭСК - это такое свойство:

$$(\forall S) (\forall i, j \notin S) (V(S \cup j \cup i) - V(S \cup j) \geq V(S \cup i) - V(S)).$$

Пусть $\varphi(x) = x_+$, а $\phi(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i$, тогда $V(S) = \varphi(\phi(S))$.

Заметим, что $\phi(S)$ — монотонно возрастающая линейная функция (т.е. $(\forall S) (\forall i, j \notin S) (V(S \cup i) > V(S), V(S \cup j \cup i) - V(S \cup j) = V(S \cup i) - V(S))$), а $\varphi(x)$ — выпуклая функция. Для любой выпуклой функции справедливо, что величина приращения $\varphi(x + \Delta) - \varphi(x)$ монотонно не убывает по x , откуда непосредственно следует выполнение ЭСК.

Рассмотренная талмудическая притча является частным случаем кооперативной игры с х.ф. (2.1) для двух игроков, а вектор распределения (x_1, x_2) является одновременно вектором Шепли, n -ядром и τ -значением такой игры, а все возможные точки дележа, лежащие на отрезке, соединяющем точки уступок $(c_1; E - c_1)$ и $(E - c_2; c_2)$ образуют C -ядро игры.

Вернемся к задаче о рюкзаке. Пусть $Opt(S, W)$ — оптимальное решение задачи о рюкзаке на множестве S и доступным объемом V :

$$Opt(S, V) = \max \left(\sum_{i \in S} \chi_i p_i \right) \left| \sum_{i \in S} \chi_i w_i \leq V \right. . \quad (2.2)$$

Определим х.ф. $K(S)$ (knapsack-рюкзак) как значение оптимального решения ЗР для множества агентов из S и доступным объемом рюкзака, равным остаточному объему после размещения в рюкзаке

агентов из $N \setminus S$.

$$K(S) = Opt \left(S, \left(W - \sum_{i \in N \setminus S} w_i \right)_+ \right). \quad (2.3)$$

Функция (2.3) является аналогом (2.1) для ЗР, однако, к сожалению, в общем случае она не является выпуклой. Покажем это на простом примере с тремя агентами. Пусть есть три предмета, при этом любые два из них одновременно входят в рюкзак а сразу три — нет (например $w_1 = w_2 = w_3 = 3$, $W = 8$) и пусть $p_1 > p_2 \geq p_3$. Тогда $K(1) = K(2) = K(3) = 0$, $K(1, 2) = K(1, 3) = p_1$, $K(2, 3) = p_2$, $K(1, 2, 3) = p_1 + p_2$. $Add(2, \{1, 3\}) = K(1, 2, 3) - K(1, 3) = p_2$, $Add(2, \{1\}) = K(1, 2) - K(1) = p_1$, где $Add(i, S) = V(S \cup i) - V(S)$, $i \notin S$. Тогда $Add(2, \{1, 3\}) < Add(2, \{1\})$, т.е. нарушается ЭСК, а следовательно, условие выпуклости.

Покажем, что ядро х.ф. (2.3) не пусто. Пусть T -множество агентов, находящихся в рюкзаке, когда $K(N)$ достигает максимума.

Пусть $\tilde{w} = W - \sum_{i \in T} w_i$ — объем рюкзака, оставшийся после размещения в нем всех элементов T (если максимум достигается на нескольких наборах агентов, выберем и зафиксируем произвольный из них).

Определим решение игры $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ таким образом: компонента x_i равна p_i для тех агентов, кто в зафиксированном оптимальном решении вошел в рюкзак (или, другими словами, принадлежит множеству) и 0 для тех, кто не вошел: $x_i = p_i \chi(i \in T)$, тогда

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S \cap T} p_i.$$

Пусть $U(S) = \left(W - \sum_{i \in N \setminus S} w_i \right)_+$ — объем рюкзака, оставшийся после размещения в нем предметов из $N \setminus S$, $\tilde{U}(S) = \tilde{w} + \sum_{i \in S \cap T} w_i$. Тогда справедливо неравенство $U(S) \leq \tilde{U}(S)$. Действительно,

$$\begin{aligned} U(S) &= \\ &= \left(W - \sum_{i \in N \setminus S} w_i \right)_+ = \left(W - \sum_{i \in (N \setminus S) \cap T} w_i - \sum_{i \in (N \setminus S) \cap (N \setminus T)} w_i \right)_+ \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(W - \sum_{i \in (N \setminus S) \cap T} w_i \right)_+ = W - \sum_{i \in (N \setminus S) \cap T} w_i = \tilde{w} + \sum_{i \in T} w_i = \tilde{U}(S).$$

Покажем, что на заданном решении $\vec{x}$ для всех множеств $S \subseteq N$ справедливо неравенство $Opt(S, U(S)) \leq \sum_{i \in S} x_i$, что и означает условие принадлежности $\vec{x}$ ядру игры с х.ф. (2.3).

Предположим обратное, что для некоторого множества S справедливо неравенство $Opt(S, U(S)) > \sum_{i \in S} x_i$, что равносильно $Opt(S, U(S)) > \sum_{i \in S \cap T} p_i$.

Поскольку $Opt(S, V)$ монотонно неубывает по S и по V , а $U(S) \leq \tilde{U}(S)$, то справедливо неравенство $Opt(S, \tilde{U}(S)) > \sum_{i \in S \cap T} p_i$. Пусть $R \subseteq S$ — множество агентов, вошедших в рюкзак при достижении $Opt(S, \tilde{U}(S))$, тогда $\sum_{i \in R} p_i > \sum_{i \in S \cap T} p_i$. Поскольку $R \cap (T \setminus S) = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i \in R \cup (T \setminus S)} w_i &= \sum_{i \in R} w_i + \sum_{i \in T \setminus S} w_i \leq \tilde{U}(S) + \sum_{i \in T \setminus S} w_i = \\ &= \tilde{w} + \sum_{i \in (S \cap T)} w_i + \sum_{i \in (T \setminus S)} w_i = W \end{aligned}$$

и при этом

$$\sum_{i \in R \cup (T \setminus S)} p_i = \sum_{i \in R} p_i + \sum_{i \in T \setminus S} p_i > \sum_{i \in T \cap S} p_i + \sum_{i \in T \setminus S} p_i = \sum_{i \in T} p_i = K(N).$$

Таким образом, найдено решение ЗР (N, W) , значение которого больше, чем $K(N)$, что противоречит предположению, что $K(N)$ — максимальное значение решения ЗР (N, W) , откуда следует, что $\vec{x}$ принадлежит ядру игры с х.ф. (2.3).

Рассмотрим подварианты частного случая трех игроков.

1) Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, в рюкзак помещается только по одному предмету и $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Тогда х.ф. имеет вид:

$$K(1) = K(2) = K(3) = K(1, 2) = K(1, 3) = K(2, 3) = 0,$$

$$K(1, 2, 3) = p_1.$$

Следовательно, выигрышной является только гранд-коалиция, ядро игры — это равносторонний треугольник с вершинами $(p_1, 0, 0)$,

$(0, p_1, 0)$ и $(0, 0, p_1)$, а центр треугольника $(p_1/3, p_1/3, p_1/3)$ одновременно является вектором Шепли, n -ядром и τ -значением.

2) Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, в рюкзак помещается два любых предмета и $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Тогда х. ф. имеет вид:

$$K(1) = K(2) = K(3) = 0, \quad K(1, 2) = K(1, 3) = p_1,$$

$$K(2, 3) = p_2, \quad K(1, 2, 3) = p_1 + p_2.$$

Тогда ядро игры — это равносторонний треугольник с вершинами $(p_1, 0, p_2)$, $(p_1 - p_2, p_2, p_2)$ и $(p_1, p_2, 0)$.

Вектор Шепли для приведенной игры вычислим по формуле

$$Sh_1 = \frac{1}{6} (K(1, 2) + K(1, 3)) + \frac{1}{3} (K(1, 2, 3) - K(2, 3)), \quad (2.4)$$

отсюда $Sh_1 = \frac{1}{6} (2p_1) + \frac{1}{3} p_1 = \frac{2}{3} p_1$. Формулы для остальных компонент получим из (2.4) циклической перестановкой индексов. Подставляя в них значения $K(S)$, имеем:

$$\vec{Sh} = \left(\frac{2}{3} p_1; \frac{1}{6} p_1 + \frac{1}{2} p_2; \frac{1}{6} p_1 + \frac{1}{2} p_2 \right).$$

Найдем условия принадлежности вектора Шепли ядру.

Условия $K(2, 3) \leq Sh_2 + Sh_3$ выполняются всегда, а оба условия $K(1, 2) \leq Sh_1 + Sh_2$ и $K(1, 3) \leq Sh_1 + Sh_3$ сводятся к $p_1 \leq 3p_2$.

Найдем n -ядро. Заметим, что при нахождении различных решений кооперативной игры вычисление n -ядра представляет наибольшую техническую сложность. В общем случае нахождение n -ядра сопряжено с решением последовательности задач линейного программирования. Однако, для случая $n = 3$ в [1] была приведена явная формула для вычисления компонент n -ядра. Формула содержит пять вариантов, в зависимости от значений х.ф. Приведем эту формулу в приложении в конце статьи. Она применима для так называемой 0-1 редуцированной игры (т.е. для х.ф. должны выполняться условия $V(1) = V(2) = V(3) = 0$, $V(1, 2, 3) = 1$).

Произвольная х.ф. $\tilde{V}(S)$ сводится к 0-1 редуцированной путем аффинного преобразования

$$\tilde{V}(S) = \frac{V(S) - \sum_{i \in S} V(i)}{V(N)}. \quad (2.5)$$

После нахождения компонент n -ядра х.ф. $\tilde{V}$, компоненты n -ядра х.ф. V находятся при помощи обратного аффинного преобразования:

$$n_i(V) = V(N)n_i(\tilde{V}) + V(i). \quad (2.6)$$

Заметим, что для данного и рассматриваемых далее примеров для х.ф. $K(S)$ всегда выполняется $K(1) = K(2) = K(3) = 0$ (это следует из определения х.ф. для задачи о рюкзаке, см. (2.3), а также того факта, что все три предмета не могут быть размещены в рюкзаке одновременно). Поэтому формулы (2.5), (2.6) упрощаются и приобретают вид:

$$\tilde{K}(S) = K(S)/K(1, 2, 3), \quad (2.7)$$

$$n_i(K) = K(1, 2, 3)n_i(\tilde{K}). \quad (2.8)$$

В данном случае применение (2.7), (2.8) дает: $c_3 = c_2 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$, $c_1 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$.

Проверка условий из (2.8) показывает, что справедливо условие формулы (3.5), откуда находим: $\tilde{n} = \left(\frac{3p_1 - p_2}{3(p_1 + p_2)}; \frac{2p_2}{3(p_1 + p_2)}; \frac{2p_2}{3(p_1 + p_2)} \right)$, отсюда согласно (2.7)

$$n = \left(p_1 - \frac{1}{3}p_2; \frac{2}{3}p_2, \frac{2}{3}p_2 \right).$$

Найдем τ -значение. Вектор утопических выплат имеет вид:

$$\vec{M} = (K(1, 2, 3) - K(2, 3), K(1, 2, 3) - K(1, 3),$$

$$K(1, 2, 3) - K(1, 2)) = (p_1; p_2; p_2).$$

Компоненты вектора минимальных претензий имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 &= \max(K(1, 2) - M_2; K(1, 3) - M_3; V(1, 2, 3) - M_2 - M_3) = \\ &= \max(p_1 - p_2, p_1 - p_2, 0) = p_1 - p_2. \end{aligned}$$

Формулы для остальных компонент получим из (2.4) циклической перестановкой индексов. Подставляя в них значения $K(S)$, имеем:

$\vec{m} = (p_1 - p_2; 0; 0)$. Пересечение отрезка $[\vec{m}; \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных решений $x_1 + x_2 + x_3 = p_1 + p_2$ дает точку $\tau = (p_1 - \frac{1}{3}p_2; \frac{2}{3}p_2, \frac{2}{3}p_2)$.

В данном случае найденные значения n -ядра и τ совпадают.

3.1) Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, в рюкзак помещается либо (1) либо (2,3) и $p_1 \geq p_2 \geq p_3$, $p_1 \leq p_2 + p_3$. Тогда х. ф. имеет вид:

$$K(1) = K(2) = K(3) = 0, K(1, 2) = p_2, K(1, 3) = p_3,$$

$$K(2, 3) = 0, K(1, 2, 3) = p_2 + p_3.$$

Покажем, что в этом случае $K(S)$ обладает ЭСК, и следовательно, является выпуклой. Действительно,

$$Add(1, \phi) = 0, Add(1, \{2\}) = p_2, Add(1, \{3\}) = p_3,$$

$$Add(1, \{2, 3\}) = p_2 + p_3,$$

$$Add(2, \phi) = 0, Add(2, \{1\}) = p_2, Add(2, \{3\}) = 0, Add(2, \{1, 3\}) = p_2,$$

$$Add(3, \phi) = 0, Add(3, \{1\}) = p_3, Add(3, \{2\}) = 0, Add(3, \{1, 2\}) = p_3.$$

Найдем вектор Шепли по формуле (2.4):

$$\vec{Sh} = \left(\frac{1}{2}(p_2 + p_3); \frac{1}{2}p_2; \frac{1}{2}p_3 \right).$$

Поскольку х.ф. является выпуклой, то вектор Шепли принадлежит ядру, а вершины ядра можно найти, составив таблицу маргинальных вкладов игроков в гранд-коалицию:

	1	2	3
(1,2,3)	0	p_2	p_3
(1,3,2)	0	p_2	p_3
(2,1,3)	p_2	0	p_3
(2,3,1)	$p_2 + p_3$	0	0
(3,1,2)	p_3	p_2	0
(3,2,1)	$p_2 + p_3$	0	0

Таким образом, ядро игры — это четырехугольник с вершинами $(p_3, p_2, 0)$, $(0, p_2, p_3)$, $(p_2, 0, p_3)$, $(p_2 + p_3, 0, 0)$. Легко убедиться, что этот четырехугольник является параллелограммом, а найденное значение вектора Шепли является точкой пересечения его диагоналей.

Найдем n -ядро. Согласно (2.7), (2.8) $c_1 = 0$; $c_2 = \frac{p_3}{p_2 + p_3}$; $c_3 = \frac{p_2}{p_2 + p_3}$. В данном случае выполняются условия формулы (3.3), а n -ядро исходной х.ф. равно: $n = \left(\frac{1}{2}(p_2 + p_3); \frac{1}{2}p_2; \frac{1}{2}p_3 \right)$.

Найдем τ -значение. Вектор утопических выплат имеет вид:

$$\vec{M} = (K(1, 2, 3) - K(2, 3), K(1, 2, 3) - K(1, 3),$$

$$K(1, 2, 3) - K(1, 2)) = (p_2 + p_3; p_2; p_3),$$

а все компоненты вектора минимальных выплат равны нулю: $\vec{m} = (0; 0; 0)$. Пересечение отрезка $[\vec{m}; \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных решений $x_1 + x_2 + x_3 = p_2 + p_3$ дает точку $\tau = (\frac{1}{2}(p_2 + p_3); \frac{1}{2}p_2; \frac{1}{2}p_3)$.

Заметим, что вектор Шепли, n -ядро и τ -значение совпадают между собой.

3.2) Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, в рюкзак помещается либо (1) либо (2, 3) и $p_1 \geq p_2 \geq p_3$, $p_1 > p_2 + p_3$. Тогда х. ф. имеет вид:

$$K(1) = K(2) = K(3) = 0, K(1, 2) = p_2,$$

$$K(1, 3) = p_3, K(2, 3) = 0, K(1, 2, 3) = p_1.$$

Покажем, что в этом случае $K(S)$ обладает ЭСК, и следовательно, является выпуклой. Действительно,

$$Add(1, \phi) = 0, Add(1, \{2\}) = p_2, Add(1, \{3\}) = p_3, Add(1, \{2, 3\}) = p_1,$$

$$Add(2, \phi) = 0, Add(2, \{1\}) = p_2, Add(2, \{3\}) = 0,$$

$$Add(2, \{1, 3\}) = p_1 - p_3,$$

$$Add(3, \phi) = 0, Add(3, \{1\}) = p_3, Add(3, \{2\}) = 0,$$

$$Add(3, \{1, 2\}) = p_1 - p_2.$$

Найдем вектор Шепли по формуле (2.4):

$$\vec{Sh} = \left(\frac{2p_1 + p_2 + p_3}{6}; \frac{2p_1 + p_2 - 2p_3}{6}; \frac{2p_1 - 2p_2 + p_3}{6} \right).$$

Поскольку х.ф. является выпуклой, то вектор Шепли принадлежит ядру, а вершины ядра можно найти, составив таблицу маргинальных вкладов игроков в гранд-коалицию:

	1	2	3
(1,2,3)	0	$p - 2$	$p_1 - p_2$
(1,3,2)	0	$p_1 - p_3$	3
(2,1,3)	p_2	0	$p_1 - p_2$
(2,3,1)	p_1	0	0
(3,1,2)	p_3	$p_1 - p_3$	0
(3,2,1)	p_1	0	0

Таким образом, ядро игры — это пятиугольник с вершинами

$$(0, p_2, p_1 - p_2), (0, p_1 - p_3, p_3), (p_2, 0, p_1 - p_2), (p_1, 0, 0), (p_3, p_1 - p_3, 0).$$

Найдем n -ядро. Согласно (2.7), (2.8) $c_1 = 0$; $c_2 = \frac{p_3}{p_1}$; $c_3 = \frac{p_2}{p_1}$. В данном случае в зависимости от соотношения, между p_1 , p_2 , p_3 могут выполняться условия формул (3.1), (3.2) либо (3.3), а n -ядро исходной х.ф. равно:

$$n = \begin{cases} (p_1/3; p_1/3; p_1/3), p_1 \geq 3p_2 \\ \left(\frac{p_1+p_2}{4}; \frac{p_1+p_2}{4}; \frac{p_1-p_2}{2} \right), p_2 + 2p_3 \leq p_1 < 3p_2 \\ \left(\frac{p_2+p_3}{2}; \frac{p_1-p_3}{2}; \frac{p_1-p_2}{2} \right), p_2 + p_3 \leq p_1 < p_2 + 2p_3 \end{cases}.$$

Найдем τ -значение. Вектор утопических выплат имеет вид:

$$\vec{M} = (K(1, 2, 3) - K(2, 3), K(1, 2, 3) - K(1, 3),$$

$$K(1, 2, 3) - K(1, 2)) = (p_1; p_1 - p_3; p_1 - p_2),$$

а все компоненты вектора минимальных выплат равны нулю: $\vec{m} = (0; 0; 0)$. Пересечение отрезка $[\vec{m}; \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных решений $x_1 + x_2 + x_3 = p_1$ дает точку $\tau = \frac{p_1}{3p_1 - p_2 - p_3} \times (p_1; p_1 - p_3; p_1 - p_2)$.

4) Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, в рюкзак помещается либо (1,2), либо (1,3). Тогда х. ф. имеет вид:

$$K(1) = K(2) = K(3) = 0, K(1, 2) = p_1, K(1, 3) = p_1,$$

$$K(2, 3) = p_2, K(1, 2, 3) = p_1 + p_2.$$

Заметим, что х.ф. в данном случае совпадает со случаем 2), поэтому вектор Шепли независимо от соотношения между p_1 и p_2 будет таким же.

$$\vec{S}h = \left(\frac{2}{3}p_1; \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{2}p_2; \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \right)$$

4.1) Пусть при этом $p_2 \geq p_1 \geq p_3$.

Покажем, что в этом случае $K(S)$ обладает ЭСК, и следовательно, является выпуклой. Действительно,

$$Add(1, \phi) = 0, Add(1, \{2\}) = p_1, Add(1, \{3\}) = p_1, Add(1, \{2, 3\}) = p_1,$$

$$Add(2, \phi) = 0, Add(2, \{1\}) = p_1, Add(2, \{3\}) = p_2, Add(2, \{1, 3\}) = p_2,$$

$$Add(3, \phi) = 0, Add(3, \{1\}) = p_1, Add(3, \{2\}) = p_2, Add(3, \{1, 2\}) = p_2.$$

Поскольку х.ф. является выпуклой, то вектор Шепли принадлежит ядру, а вершины ядра можно найти, составив таблицу маргинальных вкладов игроков в гранд-коалицию:

	1	2	3
(1,2,3)	0	p_1	p_2
(1,3,2)	0	p_2	p_1
(2,1,3)	p_1	0	p_2
(2,3,1)	p_1	0	0
(3,1,2)	p_1	p_2	0
(3,2,1)	p_1	p_2	0

Таким образом, ядро игры — это четырехугольник с вершинами

$$(0, p_1, p_2), (0, p_2, p_1), (p_1, 0, p_2), (p_1, p_2, 0).$$

Найдем n -ядро. Согласно (2.7), (2.8) $c_1 = \frac{p_2}{p_1+p_2}$; $c_2 = c_3 = \frac{p_1}{p_1+p_2}$.

В данном случае, получается, что $c_1 \geq c_2 \geq c_3$, поэтому, для того, чтобы применить (2.8), полагаем: $c_1 = c_2 = \frac{p_1}{p_1+p_2}$; $c_3 = \frac{p_2}{p_1+p_2}$, тогда выполняются условия $c_1 \leq c_2 \leq c_3$. Тогда при восстановлении значения n -ядра исходной х.ф. на основании вектора, вычисленного по формуле (2.8) нужно будет наряду с умножением на $p_1 + p_2$ переписать компоненты вектора в обратном порядке. В данном случае выполняются условия либо (3.4), либо (3.5), поскольку легко видеть, что выполняются условия $c_3 > \frac{1}{3}$, $c_1 > \frac{1-c_3}{2}$, а условие $c_1 + c_2 \leq \frac{1+c_3}{2}$ сводится к $p_1 \leq \frac{2}{3}p_2$. Значения n -ядра, вычисленные по формулам (3.4) и (3.5) равны соответственно $\left(\frac{p_1+2p_2}{4(p_1+p_2)}; \frac{p_1+2p_2}{4(p_1+p_2)}; \frac{p_1}{2(p_1+p_2)} \right)$ и $\left(\frac{2p_2}{3(p_1+p_2)}; \frac{2p_2}{3(p_1+p_2)}; \frac{3p_1-p_2}{3(p_1+p_2)} \right)$,

тогда n -ядро исходной х.ф. равно:

$$n = \begin{cases} (\frac{p_1}{2}; \frac{p_1+2p_2}{4}; \frac{p_1+2p_2}{4}), & p_1 \leq \frac{2}{3}p_2 \\ (p_1 - \frac{p_2}{3}; \frac{2}{3}p_2; \frac{2}{3}p_2), & \frac{2}{3}p_2 \leq p_1 \leq p_2 \end{cases}.$$

Найдем τ -значение. Вектор утопических выплат имеет вид:

$$\vec{M} = (K(1, 2, 3) - K(2, 3), K(1, 2, 3) - K(1, 3),$$

$$K(1, 2, 3) - K(1, 2)) = (p_1; p_2; p_2),$$

$m_1 = \max((p_1 - p_2)_+, (p_1 - p_2)_+, (p_1 - p_2)_+) = 0$, $m_2 = m_3 = 0$. Таким образом, все компоненты вектора минимальных выплат равны нулю: $\vec{m} = (0; 0; 0)$. Пересечение отрезка $[\vec{m}; \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных решений $x_1 + x_2 + x_3 = p_1 + p_2$ дает точку $\tau = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + 2p_2} (p_1; p_2; p_2)$.

4.2) Пусть при этом $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Заметим, что значения х.ф. и все формальные предположения относительно p_1, p_2, p_3 такие же, как и в п.2., следовательно и выводы будут такими же: х.ф. не выпуклая, ядро — равносторонний треугольник с вершинами $(p_1, 0, p_2)$, $(p_1 - p_2, p_2, p_2)$ и $(p_1, p_2, 0)$, условия принадлежности вектора Шепли ядру имеют вид $p_1 \leq 3p_2$, $n = \tau = (p_1 - \frac{1}{3}p_2; \frac{2}{3}p_2; \frac{2}{3}p_2)$.

3. Приложение

Формула для вычисления n -ядра 0-1 редуцированной игры.

Если $V(1) = V(2) = V(3) = 0$, $V(1, 2) = c_3$, $V(1, 3) = c_2$, $V(2, 3) = c_1$, $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq 1$, $V(1, 2, 3) = 1$, то $n(V) =$

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \text{ если } c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \frac{1}{3}, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{1+c_3}{4}; \frac{1+c_3}{4}; \frac{1-c_3}{2}\right), \text{ если } c_3 > \frac{1}{3}, c_2 \leq \frac{1-c_3}{2} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{c_2+c_3}{2}; \frac{1-c_2}{2}; \frac{1-c_3}{2}\right), \text{ если } c_3 > \frac{1}{3}, c_2 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 \leq \frac{1-c_3}{2} \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}; \frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}; \frac{1-c_3}{2}\right),$$

если

$$c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 + c_2 \leq \frac{1+c_3}{2} \quad (3.4)$$

если $\left(\frac{1 - 2c_1 + c_2 + c_3}{3}; \frac{1 + c_1 - 2c_2 + c_3}{3}; \frac{1 + c_1 + c_2 - 2c_3}{3} \right),$

$$c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1 - c_3}{2}, c_1 + c_2 > \frac{1 + c_3}{2}. \quad (3.5)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения*. СПб: Изд-во «Лань», 2010.
2. Aumann R., Maschler M. *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud* // Journal of economic theory. 1985. № 36 P. 195–213.
3. O'Neill B. *A problems of rights arbitration from the Talmud* // Mathematical social sciences. 1982. V. 2. P. 345–371.
4. Curiel I., Maschler B., Tijs S. *Bankruptcy games* // Zeitschrift fur Operations Research. 1987. V. 31. № 5. P. 143–159.

ON COOPERATIVE GAME IN KNAPSACK PROBLEM

Sergei I. Dotsenko, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Cand.Sc.
(sergei204@ukr.net).

Abstract: A knapsack problem with indivisible items as agents is considered. Each agent has certain weight and utility and wants to be in knapsack. Such situation is considered as cooperative game with transferable utility. A characteristic function for such game generalizes bankruptcy problem characteristic function, however, unlike bankruptcy problem case, it is not convex. Nevertheless, it turns out, that the core of such game is not empty. At the end some particular cases are considered. For such cases the Shapley value, τ -value and nucleolus are found in explicit form.

Keywords: knapsack problem, cooperative game, bankruptcy problem, core, Shapley value, nucleolus, τ -value.