Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.2, с. 40–67

УДК 519.83
ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ДИНАМИЧЕСКИМ ОБНОВЛЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

Ованес Л. Петросян*
Школа автоматики, Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru

Денис С. Тихомиров
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
194100, Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, 3
e-mail: dstikhomirov@hse.edu.ru

Ильдус И. Кучкаров
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: kuchkarov_ildus@mail.ru

Хунвэй Гао
Школа математики и статистики, Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
e-mail: gaohongwei@qdu.edu.cn

©2018 О.Л. Петросян, Д.С. Тихомиров, И.И. Кучкаров, Х. Гао

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-00081)

В работе исследуется модель дифференциальной игры выработки ограниченного ресурса с динамическим обновлением информации. Класс игр с динамическим обновлением информации является новым в теории дифференциальных игр, в данной работе приводится описание процесса построения решения для этого класса игр. Рассматривается кооперативная постановка модели выработки ограниченного ресурса с динамическим обновлением информации. В явном виде строятся оптимальные стратегии, кооперативный выигрыш, характеристическая функция и способ распределения кооперативного выигрыша между игроками. В качестве принципа оптимальности используется вектор Шепли. Приведены результаты численного моделирования в среде Python.

Ключевые слова: дифференциальные игры, решение с информационной дискриминацией, динамическое обновлением информации.

Поступила в редакцию: 09.12.18 *После доработки*: 29.03.19 *Принята к публикации*: 10.06.19

1. Введение

Теория дифференциальных игр сформировалась как отдельный раздел математической теории игр в пятидесятых годах двадцатого века. Долгое время исследования были посвящены в основном антагонистическим дифференциальным играм [18], [20], [6], [13], [11]. Толчком для развития теории неантагонистических дифференциальных игр послужили задачи конфликтного управления со многими участниками из различных практических областей. В качестве принципа оптимальности в неантагонистических дифференциальных играх чаще всего рассматривается равновесие по Нэшу в программных или позиционных стратегиях [1], [2], [5], [14].

Особый интерес представляют также кооперативные дифференциальные игры, рассмотренные в работах [3], [4], [10], [12]. Теория кооперативных дифференциальных игр изучает вопросы построения оптимальных решений в процессах со многими участниками. Оптимальное решение включает в себя кооперативную траекторию, стратегии, ее порождающие, выигрыш вдоль кооперативной траектории, распределение выигрыша между игроками и анализ динамической устойчивости выбранного решения. Проблема динамической неустойчивости арбитражного решения Нэша в динамической постановке за-

дачи о переговорах была озвучена в работе [22]. Петросян Л. А. впервые математически сформулировал понятие динамической устойчивости [7] и сильной динамической устойчивости [8] решения в кооперативных дифференциальных играх. С целью предотвращения нарушения устойчивости позднее в [9] была предложена схема выплат, получившая название процедуры распределения дележа (ПРД), которая обеспечивает реализацию решения.

Множество конфликтно-управляемых процессов развиваются во времени непрерывно, а их участники непрерывно получают обновленную информацию и адаптируются. Именно для таких процессов был предложен подход, позволяющий строить более реалистичные модели действительности, а именно модели игр с динамическим обновлением информации [23], [25]. Исследованные ранее фундаментальные модели относятся к рассмотрению задач на фиксированном временном интервале (игроки имеют всю информацию на замкнутом временном интервале) [1], задачи на бесконечном временном интервале с дисконтированием (игроки имеют информацию на бесконечном временном интервале) [16], задачи на случайном временном интервале (игроки имеют информацию на заданном временном интервале, но момент времени окончания игры является случайной величиной) [28], также одни из первых работ в теории дифференциальных игр посвящены задачам преследования на быстродействие (игроки имеют информацию, но их функция выигрыша зависит от времени поимки соперников) [11]. Во всех перечисленных моделях и предложенных способах решения предполагается, что игрокам в начале игры известна вся информация о динамике игры (уравнения движения) и предпочтениях игроков (функциях выигрыша). Однако подобный подход не учитывает того, что во многих конфликтно-управляемых процессах игрокам в начальный момент времени неизвестна вся информация об игре. Таким образом, существующие подходы не могут быть напрямую использованы для построения достаточно большого круга реалистичных теоретико-игровых моделей.

В данной работе исследуется модель одной дифференциальной игры с динамическим обновлением информации, а именно предполагается, что игроки:

1. имеют информацию об уравнениях движения и функциях выиг-

рыша на временном интервале с ограниченной продолжительностью, имеющей значение временного горизонта $\overline{T}$,

2. в заданные моменты времени $t = t_0 + j\Delta t$ получают обновленную информацию об уравнениях движения и функциях выигрыша и, как результат адаптируются под обновленную информацию.

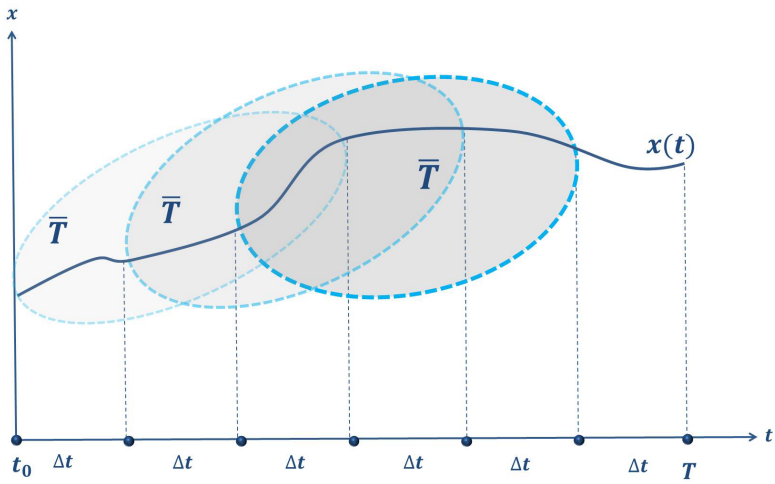

Рисунок 1. Каждый овал показывает информацию, доступную игрокам в течение интервалов времени $[t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t]$, а именно $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}]$, $j = 0, \ldots, l$, $l = \frac{T - t_0}{\Delta t}$.

В данной работе исследуется модель выработки невозобновляемого ресурса с динамическим обновлением информации на основе модели описанной в [19], рассмотренной также в работах [28], [15]. Рассматривается кооперативный вариант игры, строятся оптимальные стратегии, расчитывается максимальный суммарный выигрыш, характеристическая функция и вектор Шепли. Демонстрируются результаты численного моделирования в среде Python с использованием библиотеки NumPy и MatPlotLib и делаются выводы. Также приводятся результаты численного моделирования для большого числа моментов обновления информации, что является планируемым направлением исследования.

В рамках подхода с динамическим обновлением информации были рассмотрены следующие модели игр в работах [23], [25], [26], [27], [29], [21], [24], где авторами закладывался фундамент для дальнейшего исследования класса задач с динамическим обновлением информации. Первой работой в данной области является работа [23]. В ней была построена модель кооперативной дифференциальной игры с динамическим обновлением информации и предписанной продолжительностью. Было введено понятие усеченной подыгры, определены результирующие оптимальные стратегии, результирующая траектория, результирующее кооперативное решение и доказана теорема о том, что произвольное результирующее кооперативное решение является Δt-динамически устойчивым. Работа [25] была посвящена изучению игр с динамическим обновлением информации, стохастическим прогнозом и динамической адаптацией. В работе [21] исследовался вопрос зависимости выигрышей игроков от значения информационного горизонта. Работы [26] и [27] посвящены приложению модели игры с динамическим обновлением информации к конфликтно-управляемой модели описывающей рынок нефти. Проведено численное моделирование в среде Matlab на основе данных о ценах на нефть Breut и Light, сделаны выводы. Дальнейшие работы на эту тему будут опубликованы в ближайшем будущем. В работе [24] описанный подход был применен к играм с бесконечной продолжительностью. Работа [29] посвящена построению ряда уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана для модели некооперативной динамической игры с различными типами информационной структуры. Полученные результаты позволят строить модели с различными информационными структурами.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 описывается исходная игра, строится кооперативное решение для нее. В разделе 3 определяется понятие усеченной подыгры, с помощью которой моделируется поведение игроков в рамках предложенного подхода, строится характеристическая функция и вектор Шепли. В разделе 4 приводятся результаты, связанные с построением решения в игре с динамическим обновлением информации, строится результирующая характеристическая функция и результирующий вектор Шепли, проверяются условия принадлежности построенного вектора Шеп-

ли множеству дележей. Результаты численного моделирования представлены в разделе 5, в разделе 6 приведены выводы.

2. Модель

Рассмотрим теоретико-игровую модель выработки невозобновляемых ресурсов с асимметричными игроками [19]. Количество ресурса напрямую зависит от темпов его выработки, которые выбираются фирмами-игроками. В игре участвуют n асимметричных игроков, с функциями полезности, зависящими от темпов выработки $h_i(t, x, u_i) = \log u_i$. Игра начинается в момент времени t_0 и заканчивается в T, таким образом, игра задана на временном интервале $[t_0, T]$. Количество ресурса на момент начала игры - x_0.

Обозначим через $x(t) \in R$ количество ресурса в момент времени t и через $u_i(t, x)$ темп выработки выбранный игроком i в момент времени t, стратегии будем искать в классе позиционных стратегий. Предполагаем, что $\forall t$, $u_i(t, x) \geq 0$, причем $x(t) = 0$ влечет $u_i(t, x) = 0$. Количество ресурса $x(t)$ как функция от времени t следующим образом зависит от темпов выработки или стратегий игроков $u_i(t, x)$:

$$\dot{x} = -\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t, x), \quad a_i > 0,$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Функция выигрыша игрока i как функция прибыли от выработки имеет вид:

$$K_i(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^{T} \log(u_i(\tau, x)) d\tau, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Для системы (2.1) предполагаются выполненными условия существования, единственности и продолжимости решений для любого набора управлений $u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)$ [9].

2.1. Кооперативные стратегии и кооперативная траектория

Рассмотрим кооперативный вариант игры выработки невозобновляемого ресурса [19]. Здесь игроки объединяются в большую коалицию и максимизируют суммарную полезность, действуя как один иг-

рок. Сформулируем соответствующую задачу оптимального управления:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, T-t_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \log(u_i(\tau, x))d\tau \to \max_{u_i, i=\overline{1,n}} \tag{2.3}$$

при динамических ограничениях

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t,x), \\ &x(t_0) = x_0 > 0, \\ &u_i(t,x) \geq 0, \ i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для решения оптимизационной задачи (2.3), (2.4) воспользуемся методом динамического программирования, предложенным Беллманом [17]. Для этого определим функцию Беллмана как максимальное значение суммарного выигрыша игроков (2.2) в подыгре $\Gamma(x, T-t)$ начинающейся в момент t в позиции x:

$$V(t,x) = \max_{u_i, i=\overline{1,n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} K_i(x, T-t) \right\} = \max_{u_i, i=\overline{1,n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{t}^{T} \log u(\tau, x) d\tau \right\}. \tag{2.5}$$

В работе [17] доказано, что если существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$ удовлетворяющая уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{gathered} -V_t(t,x) = \max_{u_i, i=\overline{1,n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \log u_i(t,x) - V_x(t,x) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t,x) \right) \right\}, \\ \lim_{t \to T-0} V(t,x) = 0, \end{gathered} \tag{2.6}$$

то управления $u_i^*(t,x)$, определяемые путем максимизации правой части (2.6), доставляют максимум функционалу в оптимизационной задаче (2.3), (2.4).

Из условия экстремума первого порядка для (2.6) получим:

$$u_i^* = \frac{1}{a_i V_x},$$

подставим в (2.6):

$$V_t = n \log V_x + \log A^{[N]} + n, \quad A^{[N]} = \prod_{i=1}^{n} a_i,$$
$$V(T, x) = 0.$$

Будем искать функцию Беллмана в виде:

$$V(t, x) = A(t) \log x + B(t),$$

тогда при подстановке в (2.7) получаем:

$$\dot{A} \log x + \dot{B} = n \log A - n \log x + \log A^{[N]} + n, \tag{2.7}$$
$$\lim_{t \to T-0} [A(t) \log x + B(t)] = 0.$$

Разделяя уравнение (2.7) на систему получаем:

$$\dot{A} = -n, \tag{2.8}$$
$$\dot{B} = n \log A + \log A^{[N]} + n,$$
$$\lim_{t \to T-0} A(t) = \lim_{t \to T-0} B(t) = 0.$$

Решением (2.7) являются функции:

$$\begin{aligned} &A(t) = n(T - t), \\ &B(t) = -(T - t) \left(\log A^{[N]} + n \log n(T - t) \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Окончательно получаем выражение для функции Беллмана:

$$V(t, x) = n(T - t) \log \frac{x}{n(T - t)} - (T - t) \log A^{[N]}, \quad t \in [t_0, T) \tag{2.10}$$

и выражение для оптимального управления:

$$u_i^*(t, x) = \frac{1}{V_x}(t, x) = \frac{x}{a_i n(T - t)}, \ t \in [t_0, T). \tag{2.11}$$

Подставляя оптимальное управление в уравнение движения (2.4), получим дифференциальное уравнение для траектории, соответствующей оптимальному управлению:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -\frac{x}{T - t}, \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Решение задачи Коши имеет вид:

$$x^*(t) = x_0 \frac{T-t}{T-t_0},\ t \in [t_0, T). \tag{2.13}$$

Траекторию $x^*(t)$ и стратегию (управление) $u^*(t,x)$ назовем кооперативными.

Кооперативные стратегии вдоль кооперативной траектории имеют вид:

$$u_i^*(t, x^*) = \frac{x_0}{a_i n(T-t_0)}, t \in [t_0, T). \tag{2.14}$$

На рис. 3 зеленой линией изображена кооперативная траектория $x^*(t)$ (2.13), а на Рис. 4 зеленой линией соответствующие оптимальные стратегии (2.14) в игре выработки невозобновляемого ресурса $\Gamma(x_0, T-t_0)$.

Для определения значения максимального суммарного выигрыша игроков, соответствующего оптимизационной задаче (2.3) в подыгре, начинающейся вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$ (2.13), необходимо подставить выражение для кооперативной траектории в выражение для функции Беллмана (2.10):

$$V(t, x^*(t)) = n(T-t)\log\frac{x_0}{n(T-t_0)} - (T-t)\log A^{[N]}. \tag{2.15}$$

2.2. Характеристическая функция

В дальнейшем анализе кооперативных стратегий и дележей воспользуемся методом построения характеристических функций, который позволит оценить силу каждой коалиции в игре. Для каждой коалиции $S \subseteq N$ зададим значение характеристической функции:

$$V(S, T-t, x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x, T-t), & S = N \\ \hat{V}(S, T-t, x), & S \subset N, \\ 0, & S = \emptyset, \end{cases} \tag{2.16}$$

где $\hat{V}(S, T-t, x)$ определяется как суммарный выигрыш коалиции S в равновесии Нэша $u^{NE} = \left(u_1^{NE}, \ldots, u_n^{NE}\right)$ в игре со следующим набором игроков: коалиция S, действующая как один игрок, и игроки из множества $N \setminus S$, т. е. в игре $|N \setminus S| + 1$ игроков.

Можно показать, что в случае бескоалиционной игры равновесные по Нэшу стратегии имеют вид:

$$u_i^{NE}(t,x) = \frac{x}{a_i(T-t)},\ i = 1,\dots,n. \tag{2.17}$$

Рассмотрим случай коалиции $S \neq N$. Введем функцию Беллмана $V_S(t,x)$ как максимальный суммарный выигрыш коалиции S в подыгре $\Gamma(x, T-t)$, начинающейся в момент t в позиции x:

$$V_S(t,x) = \max_{u_i, i\in S} \sum_{i\in S} \left\{ \int_t^T \log u_i d\tau \right\}, \tag{2.18}$$

$$\dot{x}(\tau) = \sum_{i\in N} u_i, \quad x(t) = x, \tag{2.19}$$

$$\text{где } u_i = u_i^{NE}, \quad i \in N\backslash S, \quad k = |S|,\ n = |N|. \tag{2.20}$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для этого случая:

$$-\tfrac{\partial V_S(t,x)}{\partial t} = \max_{u_i, i\in S} \left\{ \sum_{i\in S} \log u_i(t,x) - \tfrac{\partial V_S(t,x)}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^n a_j u_j(t,x) \right) \right\},$$
$$\lim_{t\to T-0} V_S(t,x) = 0. \tag{2.21}$$

Из условия экстремума первого порядка для (2.21) получим

$$u_i^* = \frac{1}{a_i \frac{\partial V_S(t,x)}{\partial x}} \tag{2.22}$$

и подставим в (2.21):

$$\tfrac{\partial V_S}{\partial t} = k \log \tfrac{\partial V_S}{\partial x} + \log A^{[S]} + k + \tfrac{\partial V_S}{\partial x} \sum_{j\in N\backslash S} \tfrac{x}{T-t}, \quad A^{[S]} = \prod_{i=1}^n a_i$$
$$\lim_{t\to T-0} V_S(t,x) = 0.$$

Будем искать функцию Беллмана в виде:

$$V_S(t,x) = A(t)\log x + B(t),$$

тогда при подстановке в (2.23) получаем:

$$\dot{A}\log x + \dot{B} = k\log A - k\log x + \log A^{[S]} + k + (n-k)\tfrac{A}{T-t}, \tag{2.23}$$
$$\lim_{t\to T-0} [A(t)\log x + B(t)] = 0.$$

Разделяя уравнение (2.23) на систему получаем:

$$\dot{A} = -n, \tag{2.24}$$
$$\dot{B} = n \log A + \log A^{[N]} + n,$$
$$\lim_{t \to T-0} A(t) = \lim_{t \to T-0} B(t) = 0.$$

Решением (2.23) являются функции:

$$\begin{aligned} &A(t) = k(T-t), \\ &B(t) = -k(T-t)\left(\frac{\log A^{[S]}}{k} + \log k(T-t) + n - k\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Решение оптимизационной задачи (2.18):

$$V_S(t,x) = k(T-t)\left[\log \frac{x}{T-t} - \log k - \frac{\log A^{[S]}}{k} - n + k\right]. \tag{2.26}$$

Используя функцию Беллмана, получаем характеристическую функцию для коалиции $S \neq N$:

$$\hat{V}(S, T-t, x) = V_S(t,x).$$

Для определения способа распределения максимального суммарного выигрыша (2.15) между игроками вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$ (2.13), а именно для подыгры, начинающейся в момент t на кооперативной траектории $x^*(t), t \in [t_0, T]$, необходимо определить характеристическую функцию вдоль кооперативной траектории. Подставим в выражение для характеристической функции $\hat{V}(S, T-t, x), S \subset N$ (2.26) выражение для $x^*(t)$ (2.13):

$$\hat{V}(S, T-t, x^*(t)) = k(T-t)\left[\log \frac{x_0}{T-t_0} - \log k - \frac{\log A^{[S]}}{k} - n + k\right]. \tag{2.27}$$

Для случая $S = N$ характеристическая функция вычисляется в соответствии с (2.15).

2.3. Множество дележей и кооперативное решение

Предположим, что все игроки объединились в коалицию N, тогда, двигаясь вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$, они могут обеспечить себе суммарный выигрыш $V(N, T-t, x^*(t))$. Для определения

выигрыша каждого игрока $i \in N$ введем понятие дележа $\xi(x^*(t), T - t) = (\xi_1(x^*(t), T - t), \ldots, \xi_n(x^*(t), T - t))$, т. е. выигрыш, который получит игрок i после перераспределения максимального суммарного выигрыша (2.15) между всеми игроками.

Для дележей должны выполняться два условия:

$$\xi_i(x^*(t), T - t) \geq V(\{i\}, T - t, x^*(t)), \quad i \in N,$$

$$\sum_{i \in N} \xi_i(x^*(t), T - t) = V(N, T - t, x^*(t)).$$

В качестве дележа в игре будем использовать вектор Шепли:

$$Sh_i(x^*(t), T - t) = \sum_{\substack{K \subseteq N: \\ i \in K}} \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} \times$$
$$\times \left[V(K, T - t, x^*(t)) - V\left(K \setminus \{i\}, T - t, x^*(t)\right)\right], \ i = 1, \ldots, n, \tag{2.28}$$

где $k = |K|$.

Обозначим разность в квадратных скобках через $V_i^*(k, t, x^*(t))$, подставим полученную ранее характеристическую функцию (2.26) и рассмотрим её отдельно:

$$V_i^*(k, t, x^*(t)) = V(K, T - t, x^*(t)) - V\left(K \setminus \{i\}, T - t, x^*(t)\right) = (T - t) \times$$
$$\times \left(\log \frac{x^*(t)}{T - t} - k \log k + (k - 1) \log (k - 1) - \log a_i - n + 2k - 1\right).$$

Заметим, что это выражение зависит только от размера коалиции K и игрока i и не зависит от конкретной коалиции K. Тогда сумму в векторе Шепли (2.28) можно переписать в другом виде:

$$Sh_i(x^*(t), T - t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{K \subseteq N: \\ i \in K, \\ k = |K|}} \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} V_i^*(k, t, x^*(t)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} V_i^*(k, t, x^*(t)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} V_i^*(k, t, x^*(t)), \ i = 1, \ldots, n,$$

где учтено, что количество коалиций размера k, в которых есть игрок i, равно количеству сочетаний C_{n-1}^{k-1}. Подставив выражения для $V_i^*(k,t,x^*(t))$ и $x^*(t)$, окончательно получим:

$$Sh_i(x^*(t), T-t) = (T-t)\left(\log\frac{x_0}{T-t_0} - \log a_i - \log n\right),\ i = 1,\dots,n. \tag{2.29}$$

3. Решение усеченной подыгры

В работах [23], [25], [27], [26], [29], [21], [24] представлен метод построения теоретико-игровой модели на основе предположения о том, что игроки обладают информацией о структуре игры только на ограниченном временном интервале и исходя из этого принимают решения. Для описания поведения игроков интервал $[t_0, T]$ разбивается на l отрезков длиной $\Delta t = \frac{T-t_0}{l}$ и поведение игроков на каждом j-ом отрезке $[t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t]$ моделируется с помощью понятия усеченной подыгры:

Определение 3.1. *Пусть $j = 0,\dots,l$. Усеченная подыгра $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$ определена на временном интервале $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}]$ следующим образом. На временном интервале $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}]$ функции выигрыша и уравнение движения в усеченной подыгре и исходной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ совпадают:*

$$K_i^j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T}; u_{j,1},\dots,u_{j,n}) = \int\limits_{t_0+j\Delta t}^{t_0+j\Delta t+\bar{T}} \log(u_{j,i}(\tau, x_j))d\tau, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_j = -\sum_{i=1}^{n} a_i u_{j,i}(t,x), \\ &x_j(t_0 + j\Delta t) = x_{j,0}, \\ &x_j(t) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $x_{j,0} = x_{j-1}(t_0 + j\Delta t)$ – это состояние в момент обновления информации $t_0 + j\Delta t$ в предыдущей усеченной подыгре $\overline{\Gamma}_{j-1}(x_{j-1,0}, t_0 + (j-1)\Delta t, t_0 + (j-1)\Delta t + \overline{T})$.

Затем, в каждый момент времени $t = t_0 + j\Delta t$ информация о процессе обновляется, и игроки адаптируются под нее. Подобные иг-

ровые модели называются играми с динамическим обновлением информации.

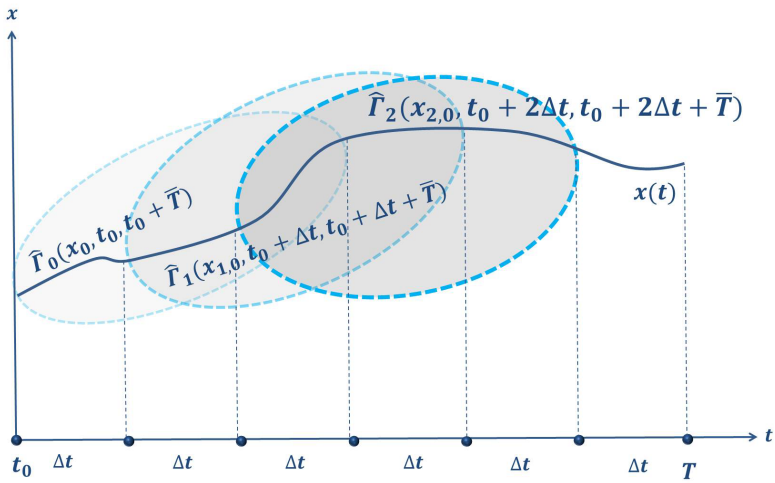

Рисунок 2. Поведение игроков в игре с динамическим обновлением информации может быть смоделировано с помощью набора усеченных подыгр $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$, $j = 0, \ldots, l$, $l = \frac{T - t_0}{\Delta t}$.

3.1. Кооперативные стратегии и соответствующая траектория для усеченной подыгры

Для удобства введем обозначения

$$t_{j,0} = t_0 + j\Delta t,$$

$$T_j = t_0 + j\Delta t + \overline{T}.$$

Задача оптимального управления для построения кооперативных стратегий в усеченной подыгре $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j; u_{j,1}, \ldots, u_{j,n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{j,0}}^{T_j} \log(u_{j,i}(\tau, x_j)) d\tau \to \max_{u_{j,i}, i=\overline{1,n}} \tag{3.3}$$

при динамических ограничениях

$$\begin{aligned} &\dot{x_j} = -\sum_{i=1}^{n} a_i u_{j,i}(t, x_j), \\ &x_j(t_{j,0}) = x_{j,0} > 0, \\ &u_{j,i}(t, x_j) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Для решения оптимизационной задачи (3.3), (3.4) воспользуемся методом динамического программирования так же, как в исходной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ и получим

$$u^*_{j,i}(t, x_j) = \frac{x_j}{a_i n(T_j - t)}, \quad t \in [t_{j,0}, T_j). \tag{3.5}$$

Подставляя оптимальное управление в уравнение движения (3.4), получим дифференциальное уравнение для траектории, соответствующей оптимальному управлению:

$$\begin{aligned} &\dot{x_j} = -\frac{x_j}{T_j - t}, \\ &x_j(t_{j,0}) = x_{j,0}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Решение задачи Коши имеет вид:

$$x^*_j(t) = x_{j,0}\frac{T_j - t}{\overline{T}}, \quad t \in [t_{j,0}, T_j), \tag{3.7}$$

Траекторию $x^*_j(t)$ и стратегии (управления) $u^*_{j,i}(t, x), i = \overline{1, n}$ назовем кооперативными. Кооперативные стратегии вдоль кооперативной траектории имеют вид:

$$u^*_{j,i}(t, x^*_j) = \frac{x_{j,0}}{a_i n\overline{T}}, \quad t \in [t_{j,0}, T_j). \tag{3.8}$$

Аналогично (2.15) определим максимальный суммарный выигрыш игроков следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n} K^j_i(x^*_j(t), T_j - t) = n(T_j - t)\log\frac{x_{j,0}}{n\overline{T}} - (T_j - t)\log A^{[N]}. \tag{3.9}$$

3.2. Характеристическая функция для усеченной подыгры

Аналогично исходной игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ построим характеристическую функцию для коалиции $S \subseteq N$ в усеченной подыгре $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$:

$$V_j(S, T_j - t, x_j) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} K_i^j(x_j, T_j - t), & S = N \\ \hat{V}_j(S, T_j - t, x_j), & S \subset N, \\ 0, & S = \emptyset, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $\hat{V}_j(S, T_j - t, x_j)$ определяется как суммарный выигрыш коалиции S в равновесии Нэша $u_j^{NE} = \left(u_{j,1}^{NE}, \ldots, u_{j,n}^{NE}\right)$ в игре со следующим набором игроков: коалиция S, действующая как один игрок, и игроки из множества $N \setminus S$, т. е. в игре $|N \setminus S| + 1$ игроков.

В этом случае оптимизационная задача для функции Беллмана $V_{j,S}(t, x_j)$ коалиции S $(S \neq N)$ имеет вид:

$$V_{j,S}(t, x_j) = \max_{u_{j,i}, i \in S} \sum_{i \in S} \left\{ \int\limits_t^{T_j} \log u_{j,i} d\tau \right\} \tag{3.11}$$

$$\dot{x_j}(\tau) = \sum_{i \in N} u_{j,i}, \quad x_j(t) = x_j, \tag{3.12}$$

$$u_{j,i} = u_{j,i}^{NE}, \quad i \in N \backslash S, \tag{3.13}$$

где $k = |S|, n = |N|$.

Аналогично исходной игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ получим, что решение оптимизационной задачи (3.11) определяет характеристическую функцию (3.14) для коалиции S $(S \neq N)$:

$$\begin{aligned} \hat{V}_j(S; T_j - t, x_j) =& k(T_j - t) \times \\ & \times \left[\log \frac{x_j}{T_j - t} - \log k - \frac{\log A^{[S]}}{k} - n + k \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Аналогично (2.27), характеристическая функция в усеченной подыгре вдоль кооперативной траектории имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{V}_j(S; T_j - t, x_j^*(t)) =& k(T_j - t) \times \\ & \times \left[\log \frac{x_{j,0}}{\overline{T}} - \log k - \frac{\log A^{[S]}}{k} - n + k \right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3. Множество дележей и вектор Шепли для усеченной подыгры

В усеченной подыгре $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$ (аналогично исходной игре $\Gamma(x, T - t_0)$) для игроков коалиции N и дележей $\xi_{j,i}(x_j^*(t), T_j - t)$, должно выполняться:

$$\xi_{j,i}(x_j^*(t), T_j - t) \geq V_j(\{i\}, T_j - t, x_j^*(t)), \quad i \in N,$$

$$\sum_{i \in N} \xi_{j,i}(x_j^*(t), T_j - t) = V_j(N, T_j - t, x_j^*(t)).$$

В этом случае вектор Шепли имеет вид:

$$Sh_{j,i}(x_j^*(t), T_j - t) = (T_j - t)\left(\log \frac{x_{j,0}}{\overline{T}} - \log a_i - \log n\right), \ i \in N. \quad (3.16)$$

4. Модель игры с динамическим обновлением информации

В соответствии с рассматриваемым подходом в каждый момент времени игрокам доступна ограниченная информация об игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ и, как отмечалось ранее, классические подходы для определения оптимальных стратегий (кооперативных и некооперативных) не могут быть применены напрямую. Для определения решения в играх с динамическим обновлением информации введем понятие результирующих стратегий $\hat{u}(t, x)$:

Определение 4.1. *Результирующие стратегии* $\hat{u}(t, x) = (\hat{u}_1(t, x), \ldots, \hat{u}_n(t, x))$ *игроков в игре с динамическим обновлением информации имеют вид*

$$\{\hat{u}(t, x)\}_{t=t_0}^{T} = \begin{cases} u_0(t, x), & t \in [t_0, t_0 + \Delta t], \\ \ldots \\ u_j(t, x), & t \in (t_0 + j\Delta t, t_0 + (j+1)\Delta t], \\ \ldots \\ u_l(t, x), & t \in (t_0 + l\Delta t, t_0 + (l+1)\Delta t], \end{cases} \quad (4.1)$$

где $u_j(t, x)$ *– некоторые фиксированные стратегии выбранные игроками в усеченной подыгре* $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$, $j = 0, \ldots, l$.

Траекторию, соответствующую результирующим стратегиям $\hat{u}(t,x) = (\hat{u}_1(t,x), \ldots, \hat{u}_n(t,x))$, обозначим через $\hat{x}(t)$ и назовем результирующей траекторией.

4.1. Кооперативные стратегии и траектория с динамическим обновлением информации

Рассмотрим кооперативный вариант игры добычи невозобновляемого ресурса с динамическим обновлением информации. Так как структура усеченных подыгр на каждом временном интервале $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \bar{T}]$ соответствует исходной игре, заданной на интервале $[t_0, T]$, то решение каждой подыгры j определяется аналогично. Основное отличие заключается в параметрах модели, а именно $t_{j,0} = t_0 + j\Delta t$ – начало подыгры, $T_j = t_0 + j\Delta t + \overline{T}$ – конец подыгры, $x_{j,0}$ – количество ресурса в начале усеченной подыгры. Таким образом, кооперативные стратегии $u_j^*(x,t)$ для каждой подыгры $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$ имеют вид:

$$u_j^*(t,x) = \frac{x}{a_i n(T_j - t)}, \quad t \in [t_{j,0}, T_j], \tag{4.2}$$

а соответствующая кооперативная траектория $x_j^*(t)$:

$$x_j^*(t) = x_{j,0}\frac{T_j - t}{\overline{T}}, \quad t \in [t_{j,0}, T_j]. \tag{4.3}$$

Заметим, что значение x_0^j зависит от значения траектории в предыдущей усеченной подыгре $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$:

$$x_{j,0} = x_{j-1}(t_{j,0}),$$

где $x_{0,0} = x_0$.

Утверждение 4.1. *Начальное значение каждой кооперативной усеченной подыгры в момент $t = t_{j,0}$ вычисляется следующим образом:*

$$x_{j,0} = x_0\left(1 - \frac{\Delta t}{\overline{T}}\right)^j. \tag{4.4}$$

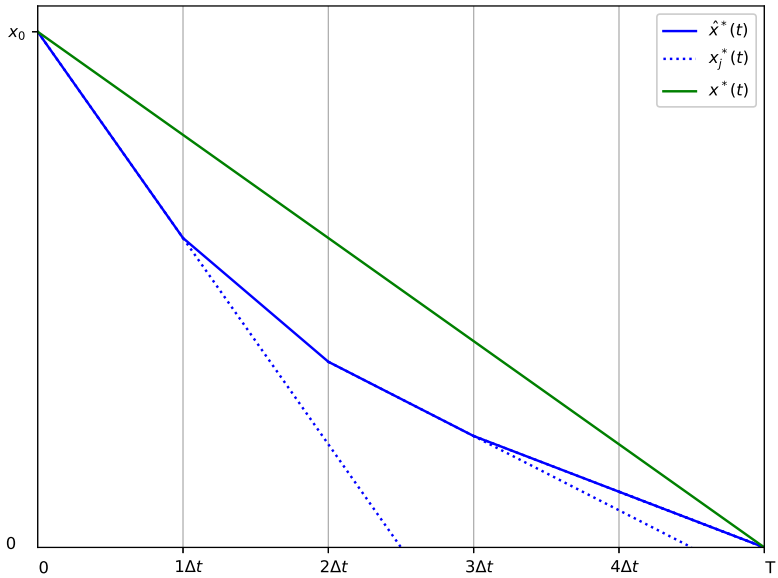

Рисунок 3. Результирующая кооперативная траектория $\hat{x}^*(t)$ (4.5) (синяя ломанная линия) и кооперативная траектория в исходной игре $x^*(t)$ (2.13) (зеленая кривая линия).

Доказательство. Рассмотрим участки траектории с номерами $j-1$ и j:

$$x^*_{j-1}(t) = x_{j-1,0}\frac{t_0 + (j-1)\Delta t + T - t}{\overline{T}},$$

$$x^*_j(t) = x_{j,0}\frac{t_0 + j\Delta t + \overline{T} - t}{\overline{T}},$$

$$x_{j,0} = x^*_{j-1}(t_0 + j\Delta t),$$

тогда имеет место следующее

$$x_{j,0} = x_{j-1,0}\left(1 - \frac{\Delta t}{\overline{T}}\right),$$

$$x_{j,0} = x_{j-2,0}\left(1 - \frac{\Delta t}{\overline{T}}\right)^2,$$

$$\ldots,$$

$$x_{j,0} = x_{0,0}\left(1 - \frac{\Delta t}{\overline{T}}\right)^j.$$

Принимая во внимание $x_{0,0} = x_0$, окончательно получаем (4.4). □

Из Утверждения 4.1 получаем, что оптимальная траектория на каждом временном интервале $[t_{j,0}, t_{j+1,0}]$ принимает вид:

$$\hat{x}^*(t) = x_0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\overline{T}}\right)^j \frac{T_j - t}{\overline{T}}, \ t \in [t_{j,0}, t_{j+1,0}]. \tag{4.5}$$

Тогда кооперативные стратегии вдоль траектории (4.5):

$$\hat{u}^*(t, \hat{x}^*(t)) = \frac{x_0}{a_i n \overline{T}} \left(1 - \frac{\Delta t}{\overline{T}}\right)^j, t \in [t_{j,0}, t_{j+1,0}]. \tag{4.6}$$

Результирующие стратегии $\hat{u}(t, x)$ (4.1), соответствующие кооперативной постановке, обозначим через $\hat{u}^*(t, x)$, а соответствующую результирующую кооперативную траекторию через $\hat{x}^*(t)$.

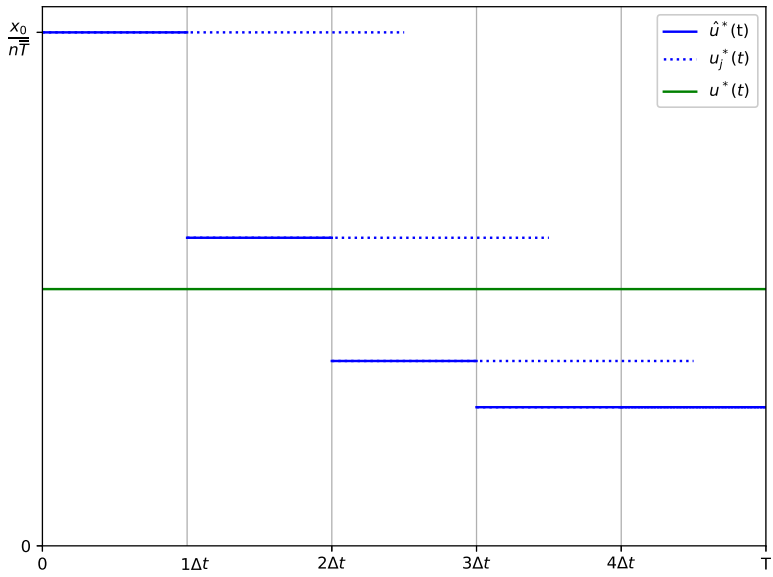

Рисунок 4. Результирующие кооперативные стратегии $\hat{u}^*(t, \hat{x}^*)$ (4.6) (синяя линия) и кооперативные стратегии в исходной игре $u^*(t, x^*)$ (2.14) (зеленая сплошная линия).

На рис. 3 (рис. 4) представлено сравнение результирующей кооперативной траектории $\hat{x}^*(t)$ (4.5) (результирующих кооперативных стратегий $\hat{u}^*(t)$ (4.6)) в игре с динамическим обновлением информации и кооперативной траектории $x^*(t)$ (2.13) (кооперативных стратегий $u^*(t)$ (2.14)) в исходной игре с предписанной продолжительностью.

4.2. Результирующая характеристическая функция

В качестве характеристической функции в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ с динамическим обновлением информации используется результирующая характеристическая функция.

Определение 4.2. *Результирующая характеристическая функция* $\overline{V}(S; \hat{x}^*(t), T - t)$ *в игре с динамическим обновлением информации вычисляется, используя значения характеристической функции в каждой усеченной подыгре* $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$ *вдоль кооперативной траектории* $\hat{x}^*(t)$ *для* $j = 0, \ldots, l$, $\forall t \in [t_{j,0}, T_j]$. *Пусть* $t \in [t_{j,0}, T_j]$, *тогда*

$$\begin{aligned}\overline{V}(S; T - t, \hat{x}^*(t)) = \sum_{m=j+1}^{l} \Big[& V_m\left(S, T_m - t_{m,0}, \hat{x}^*(t_{m,0})\right) - \\ & - V_m\left(S, T_m - t_{m+1,0}, \hat{x}^*(t_{m+1,0})\right) \Big] + \\ & + \Big[V_j\left(S, T_j - t, \hat{x}^*(t)\right) - V_j\left(S, T_j - t_{j+1,0}, \hat{x}^*(t_{j+1,0})\right) \Big].\end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3. Результирующее множество дележей и вектор Шепли

В качестве дележа в игре с динамическим обновлением информации будем использовать результирующий дележ.

Определение 4.3. *Результирующий дележ* $\hat{\xi}(x, T - t)$ *в игре с динамическим обновлением информации вычисляется, используя дележ в каждой усеченной подыгре* $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_{j,0}, T_j)$ *вдоль кооперативной траектории* $\hat{x}^*(t)$ *для* $j = 0, \ldots, l$, $\forall t \in [t_{j,0}, T_j]$. *Пусть* $t \in [t_{j,0}, T_j]$, *тогда*

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_i(\hat{x}^*(t), T - t) = \sum_{m=j+1}^{l} \Big[& \xi_{m,i}\left(\hat{x}^*(t_{m,0}), T_m - t_{m,0}\right) - \\ & - \xi_{m,i}\left(\hat{x}^*(t_{m+1,0}), T_m - t_{m+1,0}\right) \Big] + \\ & + \Big[\xi_{j,i}\left(\hat{x}^*(t), T_j - t\right) - \xi_{j,i}\left(\hat{x}^*(t_{j+1,0}), T_j - t_{j+1,0}\right) \Big].\end{aligned} \tag{4.8}$$

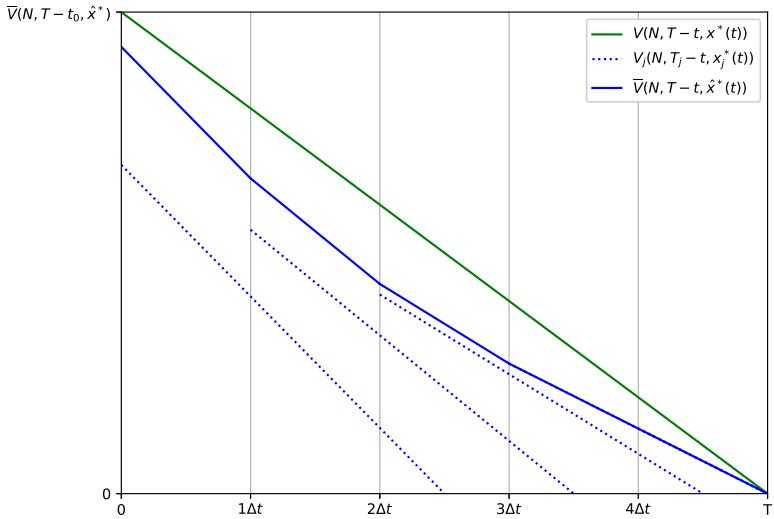

Рисунок 5. Результирующая характеристическая функция $\overline{V}(N; \hat{x}^*(t), T-t)$ (4.7) (синяя ломанная линия) и характеристическая функция в исходной игре $V(N; x^*(t), T-t)$ (2.26) (зеленая кривая линия).

Возникает вопрос, является ли результирующий дележ дележом, т. е. выполняются ли условия:

$$\hat{\xi}_i(\hat{x}^*(t), T-t) \geq \overline{V}(\{i\}, T-t, \hat{x}^*(t)), \quad i \in N, \tag{4.9}$$

$$\sum_{i \in N} \hat{\xi}_i(\hat{x}^*(t), T-t) = \overline{V}(N, T-t, \hat{x}^*(t)). \tag{4.10}$$

Очевидно, выражение (4.9) выполняется по построению $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T-t)$ и $\overline{V}(S; T-t, \hat{x}^*(t))$. Подставив в (4.10) выражения для $\hat{\xi}(\hat{x}^*(t), T-t)$ и $\overline{V}(S; T-t, \hat{x}^*(t))$, можно получить достаточное условие, гарантирующее выполнение (4.10):

$$\begin{gathered} \xi_{j,i}\left(\hat{x}^*(t), T_j - t\right) - \xi_{j,i}\left(\hat{x}^*(t_{j+1,0}), T_j - t_{j+1,0}\right) \geq \\ \geq V_j\left(\{i\}, T_j - t, \hat{x}^*(t)\right) - V_j\left(\{i\}, T_j - t_{j+1,0}, \hat{x}^*(t_{j+1,0})\right) \end{gathered} \tag{4.11}$$

для $j = \overline{0, l}$ и проверять его для конкретного вида дележа, например, для вектора Шепли.

Аналогично (4.8) результирующий вектор Шепли для $t \in [t_{j,0}, T_j]$

вычисляется по формуле:

$$\hat{Sh}_i(\hat{x}^*(t), T-t) = \sum_{m=j+1}^{l} \Big[Sh_{m,i}\left(\hat{x}^*(t_{m,0}), T_m - t_{m,0}\right) - \\ - Sh_{m,i}\left(\hat{x}^*(t_{m+1,0}), T_m - t_{m+1,0}\right) \Big] + \\ + \Big[Sh_{j,i}\left(\hat{x}^*(t), T_j - t\right) - \\ - Sh_{j,i}\left(\hat{x}^*(t_{j+1,0}), T_j - t_{j+1,0}\right) \Big], \ i \in N. \tag{4.12}$$

Рассмотрим при каких условиях выполняется (4.11) для результирующего вектора Шепли (4.12). В этом случае достаточное условие записывается в виде

$$Sh_{j,i}\left(\hat{x}^*(t), T_j - t\right) - Sh_{j,i}\left(\hat{x}^*(t_{j+1,0}), T_j - t_{j+1,0}\right) \geq \\ \geq V_j\left(\{i\}, T_j - t, \hat{x}^*(t)\right) - V_j\left(\{i\}, T_j - t_{j+1,0}, \hat{x}^*(t_{j+1,0})\right) \tag{4.13}$$

для $j = \overline{0,l}$. Пусть $t \in [t_{j,0}, t_{j+1,0}]$, тогда $\hat{x}^*(t) \equiv x_j^*(t)$. Подставив в левую часть (4.13) выражение для $x_j^*(t)$ (4.3), получим

$$Sh_{j,i}\left(x_j^*(t), T_j - t\right) - Sh_{j,i}\left(x_j^*(t_{j+1,0}), T_j - t_{j+1,0}\right) = \\ = (t_{j+1,0} - t)\left(\log \frac{x_{j,0}}{T_j - t_{j,0}} - \log a_i - \log n\right),$$

аналогично для правой части (4.13) получим

$$V_j\left(\{i\}, T_j - t, x_j^*(t)\right) - V_j\left(\{i\}, T_j - t_{j+1,0}, x_j^*(t_{j+1,0})\right) = \\ = (t_{j+1,0} - t)\left(\log \frac{x_{j,0}}{T_j - t_{j,0}} - \log a_i - n + 1\right).$$

Мы взяли $t \in [t_{j,0}, t_{j+1,0}]$, тогда $(t_{j+1,0} - t) \geq 0$, следовательно достаточное условие (4.13) можно записать в виде

$$n - 1 \geq \log n. \tag{4.14}$$

Условие (4.14) выполняется для $n > 0$, таким образом в нашем случае результирующий вектор Шепли всегда будет являться дележом.

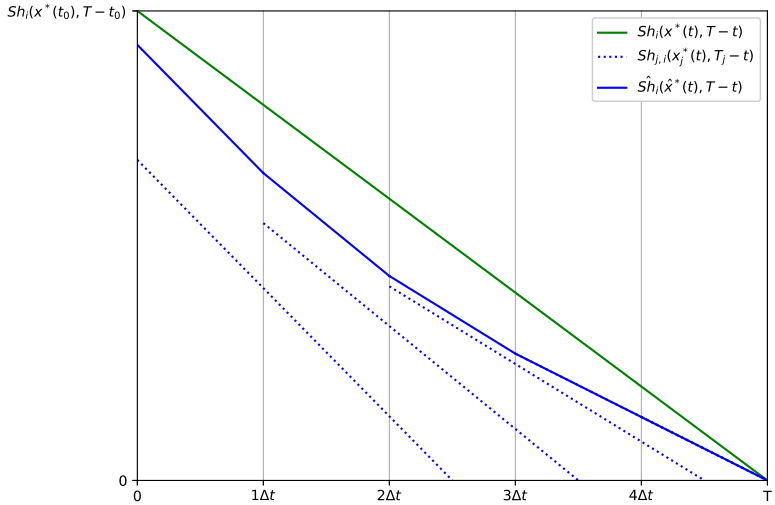

Рисунок 6. Компонента результирующего вектора Шепли $\hat{Sh}(\hat{x}^*(t), T-t)$ (4.12) (синяя ломанная линия) и компонента вектора Шепли в исходной игре $Sh(x^*(t), T-t)$ (2.29) (зеленая кривая линия).

Рассмотрим результаты численного моделирования на временном интервале для модели игры трех асимметричных игроков ($n = 3$) на интервале $[0, 100]$, т.е. $t_0 = 0$, $T = 100$. В начальный момент $t_0 = 0$ запас ресурса составляет 2000, т.е. $x_0 = 2000$. Предположим, что для случая динамического обновления информации (синие ломанные и пунктирные линии рис. 3-6) интервалы между обновлением информации составляют $\Delta t = 20$, таким образом $l = 5$. На рис. 3, 4 представлено сравнение результирующих стратегий и траекторий в исходной игре с предписанной продолжительностью (зеленые сплошные линии) и игре с динамическим обновлением информации (синие ломанные линии). На Рис. 5 и 6 представлены аналогичные результаты для характеристических функций и вектора Шепли.

Заметим, что в отличие от траекторий и стратегий характеристическая функция в усеченной игре $\bar{\Gamma}_j(x_{j,0}, t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \overline{T})$ необязательно равна результирующей характеристической функции на отрезке $[t_{j,0}, t_{j+1,0}]$, а может отличаться на постоянную величину. Этот факт прямо следует из определения результирующей характеристической функции (4.7) и проиллюстрирован на рис. 5. Аналогич-

ное замечание имеет место и для вектора Шепли.

5. Заключение

В работе детально описана процедура построения оптимальных стратегий для кооперативной модели игры выработки невозобновляемого ресурса с динамическим обновлением информации. Также описана процедура построения характеристической функции и вектора Шепли. Доказано, что для текущей модели вектор Шепли является дележом в игре с результирующей характеристической функцией. Проведено численное моделирование с использованием Python и сравнение решений исходной игры с предписанной продолжительностью и игрой с динамическим обновлением информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры.* Екатеринбург: Наука, 1993.

2. Клейменов А.Ф. *О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре* // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 5. С. 739–746.

3. Клейменов А.Ф. *К кооперативной теории бескоалиционных позиционных игр* // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312, № 1. С. 32–35.

4. Клейменов А.Ф. *Кооперативные решения в позиционной дифференциальной игре многих лиц с непрерывными функциями платежей* // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 3. С. 389–394.

5. Кононенко А.Ф. *О равновесных позиционных стратегиях в неантагонисти- ческих дифференциальных играх* // Доклады АН СССР. 1976. Т. 231, № 2. С. 285–288.

6. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* М: Наука, 1985.

7. Петросян Л.А. *Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1: Математика, Механика, Астрономия. 1977. № 4. С. 46–52.

8. Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности* // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1: Математика, Механика, Астрономия. 1993. № 4. С. 35–40.

9. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1: Математика, Механика, Астрономия. 1979. № 1. С. 52–59.

10. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения.* Изд-во Томского университета, 1985.

11. Петросян Л.А., Мурзов Н.В. *Теоретико-игровые проблемы в механике* // Литовский математический сборник. 1966. № 3. С. 423–433.

12. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Динамические игры и их приложения.* Л: Изд. ЛГУ, 1982.

13. Понтрягин Л.С. *К теории дифференциальных игр* // Успехи математических наук. 1966. № 26, 4 (130). С. 219–274.

14. Чистяков С.В. *О бескоалиционных дифференциальных играх* // Доклады АН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1052–1055.

15. Шевкопляс Е.В. *Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 98–118.

16. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory.* London: Academic Press, 1995.

17. Bellman R. *Dynamic Programming.* Princeton: Princeton University Press, 1957.

18. Bercovitz L.D. *A variational approach to differential games* // Adv. in game theory, Ann. of Math. Studies. 1964. P. 127–175.

19. Dockner E., Jorgensen S., van Long N. et al. *Differential Games in Economics and Management Science.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

20. Fleming W.H. *The convergence problem for differential games* // Adv. in game theory, Ann. of Math. Studies. 1964. P. 175–195.

21. Gromova E.V., Petrosian O.L. *Control of information horizon for cooperative differential game of pollution control* // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2016.

22. Haurie A. *A note on nonzero-sum differential games with bargaining solutions* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1976. Vol. 18, no. 1. P. 31–39.

23. Petrosian O. *Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games* // International Game Theory Review. 2016. no. 18. P. 1–14.

24. Petrosian O. *Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games with infinite-horizon* // Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. 2016. no. 4. P. 18–30.

25. Petrosian O., Barabanov A. *Looking Forward Approach in Cooperative Differential Games with Uncertain-Stochastic Dynamics* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. Vol. 172. P. 328–347.

26. Petrosian O., Nastych M., Volf D. *Differential game of oil market with moving informational horizon and non-transferable utility* // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov). 2017.

27. Petrosian O., Nastych M., Volf D. *Non-cooperative Differential Game Model of Oil Market with Looking Forward Approach* // Frontiers of Dynamic Games, Game Theory and Management, St. Petersburg, 2017, eds. L. A. Petrosyan, V. V. Mazalov, N. Zenkevich, Birkhauser, Basel, 2018.

28. Shevkoplyas E. *Optimal Solutions in Differential Games with Random Duration* // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 199, no. 6. P. 715–722.

29. Yeung D., Petrosian O. *Infinite Horizon Dynamic Games: A New Approach via Information Updating* // International Game Theory Review. 2017. Vol. 19. P. 1–23.

ABOUT ONE DIFFERENTIAL GAME MODEL WITH DYNAMIC UPDATING

Ovanes L. Petrosian, Qingdao University, Saint Petersburg State University, Cand.Sc. (petrosian.ovanes@yandex.ru), **Denis S. Tikhomirov**, National Research University "High School of Economics" (dstikhomirov@hse.edu.ru),
Ildus I. Kuchkarov, Saint Petersburg State University (kuchkarov_ildus@mail.ru),
Hongwei Gao, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, PhD, professor (gaohongwei@qdu.edu.cn).

Abstract: Differential game model of limited resource extraction with dynamic updating is studied in the paper. The class of games with dynamic updating is new in the theory of differential games. Cooperative setting of limited resource extraction with dynamic updating is considered. Optimal strategies, cooperative payoff, characteristic function and allocation rule for cooperative payoff between the players are derived in an explicit form. As an optimality principle or cooperative solution Shapley value is used. Results of numerical simulation in the Python environment are demonstrated.

Keywords: differential games, looking forward approach, dynamic updating, continuous updating, cooperative strategies, feedback Nash equilibrium.