

УДК 519.88/.21

ББК 22.18

ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА С ИСЧЕЗАЮЩИМИ ОБЪЕКТАМИ

СЕРГЕЙ И. ДОЦЕНКО

Факультет компьютерных наук и кибернетики

Киевский национальный университет

им. Тараса Шевченко

01601, Украина, Киев, ул. Владимирская, 64/13

e-mail: sergei204@ukr.net

ГЕОРГИЙ М. ШЕВЧЕНКО

Механико-математический факультет

Киевский национальный университет

им. Тараса Шевченко

01601, Украина, Киев, ул. Владимирская, 64/13

e-mail: zhora@univ.kiev.ua

Рассматривается модификация задачи наилучшего выбора (или задачи секретаря), в которой объекты могут исчезать в ходе просмотра и становиться недоступными для выбора. Построена стратегия выбора наилучшего объекта и найдена соответствующая ей вероятность выбора наилучшего объекта, являющаяся асимптотически оптимальной при неограниченном увеличении количества объектов. В качестве вспомогательного утверждения получены представляющие отдельный интерес оценки вероятностей больших уклонений для сумм независимых случайных величин с различным геометрическим распределением.

Ключевые слова: задача наилучшего выбора, задача секретаря, исчезающие объекты, оптимальная стратегия выбора, вероятность больших уклонений.

Поступила в редакцию: 10.05.20 *После доработки:* 17.06.20 *Принята к публикации:* 25.06.20

1. Введение

Классической постановкой задачи наилучшего выбора (задачи секретаря) принято считать задачу с такими предположениями. Пусть имеется одна вакансия и известное количество n претендентов, желающих ее занять. Претенденты приходят на собеседование по одному в случайном порядке, каждый не более одного раза. В результате собеседования о текущем претенденте становится известно, лучше он или хуже любого из предыдущих, и можно либо отказать ему, тогда он в дальнейшем становится недоступным, либо предложить ему должность. Задача — построить стратегию останова, максимизирующую вероятность выбора наилучшего претендента.

Наиболее известными способами решения классической задачи наилучшего выбора является применение метода нахождения оптимального момента останова цепи Маркова, описанного в [1] и метода обратной индукции, описанного в [3]. Оптимальная стратегия в ней пороговая — необходимо пропустить первые k_n претендентов, потом выбрать из оставшихся первого, превосходящего их; при этом оказывается, что $k_n/n \rightarrow 1/e$, $n \rightarrow \infty$.

Впоследствии С.М. Гусейном-Заде был рассмотрен ряд обобщений задачи наилучшего выбора. Вслед за автором в русскоязычной литературе прижилось сленговое название «задача о разборчивой невесте», в то время как в англоязычной — «secretary problem».

Как показали дальнейшие исследования, метод обратной индукции позволяет анализировать многочисленные обобщения задачи наилучшего выбора, в то время как метод нахождения оптимального момента останова цепи Маркова, предложенного Е.Б. Дынкиным — только классическую постановку задачи.

Так, в [3] была рассмотрена задача наилучшего выбора, в которой наблюдателя устраивал не только самый лучший объект, но и любой из t первых по качеству. Максимальная вероятность выбора одного из лучших t объектов будет достигнута, если действовать следующим образом: пропустить элементы $a_1, a_2, \dots, a_{\pi_1-1}$, выбрать первый

из элементов $a_{\pi_1}, a_{\pi_1+1}, \dots, a_{\pi_2-1}$ лучший, чем все предыдущие, а если такого элемента нет, то выбирать первый из $a_{\pi_2}, a_{\pi_2+1}, \dots, a_{\pi_3-1}$, для которого имеется не более, чем 1 лучший среди просмотренных и т.д. Таким образом, в ходе просмотра «разборчивая невеста» становится менее разборчивой.

Существует несколько обобщений задачи, которые можно охарактеризовать как «неблагоприятные условия выбора», стимулирующие более раннюю остановку на максимальном элементе по сравнению с классическим случаем.

Например, в [4] была рассмотрена задача наилучшего выбора с «заминированными» объектами. В предположении, что заминирован один объект, его номер с равными вероятностями принимает значение от 1 до n , а просмотр заминированного объекта означает окончание процедуры просмотра. Было установлено, что и в этом случае нужно придерживаться пороговой стратегии, и пороговый индекс k_n ведет себя так, что при $n \rightarrow \infty$ отношение $\frac{k_n}{n}$ стремится к меньшему корню уравнения $2 - 2x + \ln(x) = 0$, примерно равному 0.203.

В [5] была рассмотрена игровая задача выбора наилучшего элемента с остановкой раньше, чем противник. В этой задаче каждый из игроков ищет наилучший элемент на своем множестве, состоящем из n элементов. При этом, если каждый из игроков нашел наилучший элемент на своем множестве, то игрок, выбравший элемент с меньшим номером, получает единичный выигрыш, другой игрок не получает ничего. В этой игре каждому из игроков нужно придерживаться пороговой стратегии, и пороговый индекс k_n ведет себя так, что при $n \rightarrow \infty$ отношение $\frac{k_n}{n}$ стремится к корню уравнения $1 - \ln(x) - x \ln^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, примерно равному 0.295.

В [6] была рассмотрена задача наилучшего выбора с платой за просмотр. В этой задаче просматривающий платит за просмотр каждого элемента сумму $\frac{\alpha}{n}$, где α — заданный параметр и при этом в случае нахождения наилучшего элемента получает единичный выигрыш. Было установлено, что при $\alpha \geq 1$ любая стратегия просмотра дает отрицательный средний выигрыш, поэтому просмотр не следует начинать вообще. Если же $\alpha < 1$, то игроку следует придерживаться пороговой стратегии с порогом k_n , причем при $n \rightarrow \infty$ отношение $\frac{k_n}{n}$ стремится к $\exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}\right)$.

В [7] рассмотрено обобщение задачи наилучшего выбора для случая, когда число элементов, доступных для просмотра, является случайной величиной, распределение которой задано. В этом случае на элементе следует останавливаться лишь тогда, если он лучше, чем все ранее просмотренные и его индекс принадлежит некоторому множеству остановки, которое в общем случае может принадлежать некоторому множеству отрезков $[k_i, m_i]$, названных в статье «островами остановки», т.е. когда число объектов случайно, то, вообще говоря, номера множества остановки могут быть перемешаны с множествами номеров, на которых останавливаться не нужно, и более того, в асимптотическом случае число «островов остановки» может стремиться к бесконечности. При этом не существует общей формулы нахождения множества остановки, общей является лишь методика нахождения такого множества.

В [8] рассматривается задача наилучшего выбора «заморозкой» числа объектов, доступных для просмотра. Это означает, что в процесс просмотра вмешивается случайная целочисленная величина M , независимая от порядка просматриваемых элементов, в результате чего наблюдателю становится закрытым доступ к просмотру элементов с номерами, большими M и при этом предполагается, что распределение случайной величины M известно, а ее реализация — нет.

Авторами рассмотрена задача наилучшего выбора с исчезающими объектами, и таким образом это тоже задача наилучшего выбора со случайным числом объектов, доступных для просмотра. К сожалению, в этом случае число доступных объектов оказывается суммой взаимно зависимых случайных величин и методы исследования, рассмотренные в [7], [8], оказываются неприемлемыми. Однако, как выясняется в ходе исследования, в случае, когда число просматриваемых объектов стремится к бесконечности, доля объектов, доступных для просмотра, стремится к вырожденному распределению, что в свою очередь приводит к простой асимптотически оптимальной стратегии — остановка на первом элементе, который лучше всех предыдущих и индекс которого больше, чем число элементов, доступных для просмотра, умноженное на $1/e$.

Статья построена таким образом. В разделе 2 рассмотрена клас-

сическая задача наилучшего выбора. В разделе 3 рассмотрена собственно задача наилучшего выбора с исчезающими элементами, для которой найдена асимптотически оптимальная стратегия выбора и соответствующая ей вероятность нахождения наилучшего элемента. В приложение вынесено две леммы, сформулированные и доказанные авторами, в которых устанавливаются верхние и нижние оценки вероятностей больших уклонений для сумм независимых случайных величин с различным геометрическим распределением.

2. Классическая задача наилучшего выбора

В этом разделе мы рассмотрим вкратце классическую задачу наилучшего выбора. Приведенные в нем доказательства не являются новыми и в целом следуют идеям, изложенным в [1], но мы решили дать их ввиду лаконичности и поскольку некоторые их элементы понадобятся в дальнейшем.

Формальная постановка задачи наилучшего выбора такова. Имеется линейно упорядоченное множество из n элементов, причем n известно, но отсутствует какая-либо исходная информация об их порядке. Элементы последовательно просматриваются в некотором случайном порядке, причем все $n!$ возможных перестановок элементов равновероятны. Пусть $r_{i,k}$ — относительный ранг i -го элемента среди k просмотренных (предполагается, что чем меньше ранг, тем лучше элемент: так, $r_{i,k} = 1$ означает, что i -й просмотренный элемент является наилучшим среди k просмотренных). На основании наблюдаемого относительного ранга элемента нужно принять решение, выбрать его или же продолжить просмотр следующих элементов, при этом вернуться к ранее просмотренному элементу нельзя. Критерием данной задачи является максимизация вероятности выбора наилучшего элемента из всех n .

Оба классических подхода к решению задачи оптимального выбора — описанный в [1] метод оптимальной остановки цепи Маркова и описанный в [2] метод обратной индукции, используют такие вспомогательные утверждения.

Предложение 2.1. *Доля числа перестановок, в которых относительные ранги $r_{1,k}, \dots, r_{k,k}$ первых k просмотренных элементов равны соответственно i_1, i_2, \dots, i_k , равна $\frac{1}{k!}$.*

Доказательство. Вычислим количество перестановок, для которых относительные ранги $r_{1,k}, \dots, r_{k,k}$ первых k просмотренных элементов равны соответственно i_1, i_2, \dots, i_k . На первые k позиций из n элементов можно выбрать C_n^k различными способами. При каждом способе выбора первые k элементов могут быть упорядочены единственно возможным способом, при этом остальные $(n - k)$ элементов могут располагаться произвольным образом, то есть $(n - k)!$ способами. Значит, искомое число перестановок равно $C_n^k(n - k)! = \frac{n!}{k!}$, а доля перестановок равна $\frac{1}{k!}$. \square

Предложение 2.2. Независимо от значений относительных рангов $r_{1,k}, r_{2,k}, \dots, r_{k,k}$ первых k просмотренных элементов относительный ранг $r_{k+1,k+1}$ следующего просматриваемого элемента среди $k + 1$ элементов с равными вероятностями $\frac{1}{k+1}$ принимает значения от 1 до $k + 1$.

Доказательство. Одновременное требование того, чтобы относительные ранги $r_{1,k}, r_{2,k}, \dots, r_{k,k}$ первых k элементов принимали бы соответственно значения i_1, i_2, \dots, i_k , а относительный ранг $r_{k+1,k+1}$ ($k + 1$)-го элемента среди $k + 1$ элементов был равен заданному значению s , равносильно требованию, чтобы относительные ранги $r_{1,k+1}, \dots, \dots, r_{k+1,k+1}$ первых $k+1$ элементов были равны соответственно заданным значениям $j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1} = s$. Отсюда по формуле условной вероятности

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(r_{k+1,k+1} = s \mid r_{1,k} = i_1, \dots, r_{k,k} = i_k) \\ &= \frac{\mathbb{P}(r_{1,k+1} = j_1, \dots, r_{k+1,k+1} = j_{k+1})}{\mathbb{P}(r_{1,k} = i_1, \dots, r_{k,k} = i_k)} = \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 2.3. Вероятность того, что некоторый элемент является лучшим среди n элементов при условии, что он является лучшим среди k , равна $\frac{k}{n}$.

Доказательство. Очевидно. \square

Определение 2.1. Назовем k -й элемент максимальным, если он является наилучшим среди уже просмотренных, т.е. $r_{k,k} = 1$.

Очевидно, что в ходе просмотра следует остановиться на одном из максимальных элементов. Действительно, если k -й элемент является

максимальным, то он согласно утверждению 3 является наилучшим с вероятностью $\frac{k}{n}$, в противном случае он не может быть таковым.

Предложение 2.4. *Независимо от значений относительных рангов $r_{1,k}, r_{2,k}, \dots, r_{k,k}$ первых k просмотренных элементов вероятность того, что некоторое $j \in \{k+1, \dots, n\}$ будет индексом максимального элемента, а никакое меньшее число из этого множества не будет, равна $\frac{k}{j(j-1)}$.*

Доказательство. Согласно предложению 2.2, искомая вероятность равна

$$\begin{aligned} & P(r_{k+1,k+1} \neq 1, \dots, r_{j-1,j-1} \neq 1, r_{j,j} = 1) \\ &= P(r_{k+1,k+1} \neq 1) \dots P(r_{j-1,j-1} \neq 1) P(r_{j,j} = 1) \\ &= \frac{k}{k+1} \dots \frac{j-2}{j-1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{k}{j(j-1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Найдем оптимальную стратегию определения наилучшего элемента, используя метод обратной индукции. Если какой-либо просматриваемый элемент оказался максимальным, то возникает дилемма — остановиться на нем либо продолжить просмотр и остановиться на каком-либо из последующих максимальных элементов, если таковой встретится.

Пусть просмотр дошел до n -го (последнего) элемента, и этот элемент оказался максимальным. Тогда на нем следует остановиться, поскольку тогда вероятность того, что он является наилучшим, равна 1, а вероятность встретить максимальный элемент при дальнейшем просмотре равна нулю. Предположим, что просмотр дошел до k -го элемента, он является максимальным, и при этом по обратной индукции было установлено, что на всех последующих элементов $k+1, \dots, n$ следует останавливаться, если до элемента дошел просмотр, и он оказался максимальным. Тогда оптимальную стратегию следует искать, сравнивая две стратегии — останавливаться на k -м элементе либо продолжать просмотр и останавливаться на первом максимальном элементе. В первом случае вероятность нахождения максимального элемента равна $F(k) = \frac{k}{n}$, во втором случае —

$$\psi(k) := \sum_{i=k+1}^n \frac{k}{i(i-1)} \frac{i}{n} = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}. \quad (2.1)$$

Таким образом, на k -м максимальном элементе следует останавливаться, если только $F(k) \geq \psi(k)$, что равносильно неравенству

$$1 \geq \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}. \quad (2.2)$$

Заметим, что левая часть неравенства монотонно убывает по k , неравенство всегда выполняется при $k = n - 1$ и не выполняется при $k = 1$. Это значит, что неравенство справедливо для всех k , начиная с некоторого. Заметим, что на k -м максимальном элементе не следует останавливаться, если $F(k) < \psi(k)$, что равносильно $\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} > 1$, поскольку в этом случае стратегия остановки (дающая вероятность успеха $F(k)$) хуже, чем стратегия, состоящая в остановке на следующем максимальном элементе (дающая вероятность успеха $\psi(k)$).

Обозначим через k_n минимальный номер, для которого выполняется неравенство (2.2). Тогда справедливо двойное неравенство

$$\sum_{i=k_n}^{n-1} \frac{1}{i} \leq 1 < \sum_{i=k_n-1}^{n-1} \frac{1}{i}. \quad (2.3)$$

Применяя двойное неравенство $\ln(m+1) - \ln(m) < \frac{1}{m} < \ln(m) - \ln(m-1)$ и следующую из него двойную оценку суммы $\ln\left(\frac{n}{k}\right) < \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} < \ln\left(\frac{n-1}{k-1}\right)$, получаем двойное неравенство $\ln\left(\frac{n}{k_n}\right) < 1 < \ln\left(\frac{n-1}{k_n-2}\right)$, откуда

$$\frac{n}{e} < k_n < \frac{n}{e} + \left(2 - \frac{1}{e}\right). \quad (2.4)$$

Из этого следует, что $\frac{k_n}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$, $n \rightarrow \infty$, и если придерживаться стратегии «остановиться на первом встреченном максимальном элементе, начиная с элемента с индексом k_n », то вероятность нахождения наилучшего элемента равна

$$p_n = \psi(k_n - 1) = \frac{k_n - 1}{n} \sum_{i=k_n-1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

В силу (2.3), $1 \leq \sum_{i=k_n-1}^{n-1} \frac{1}{i} \leq 1 + \frac{1}{k_n-1}$, тогда $\frac{k_n-1}{n} \leq p_n \leq \frac{k_n}{n}$, и, принимая во внимание (2.4), $\frac{1}{e} - \frac{1}{n} \leq p_n \leq \frac{1}{e} + \frac{2-\frac{1}{e}}{n}$. Таким образом, $p_n \rightarrow \frac{1}{e}$, $n \rightarrow \infty$.

3. Задача наилучшего выбора с исчезающими объектами

Рассмотрим такую модификацию задачи наилучшего выбора в неблагоприятных условиях.

Пусть подобно классической задаче наилучшего выбора нужно выбрать наилучший элемент среди n , однако в ходе просмотра каждый из еще не просмотренных элементов может по какой-либо причине «исчезнуть» и таким образом перестать быть доступным для просмотра (например, используя данную во введении интерпретацию, можно предположить, что просматриваемым претендентам надоедает дожидаться, пока до них дойдет очередь и они пройдут собеседование). А именно, предположим, что за время просмотра одного элемента каждый из еще не просмотренных элементов независимо от других остается доступным для просмотра с вероятностью q_n , в то время, как элемент, просматриваемый в данный момент, исчезнуть уже не может.

Предположим, что просмотр осуществляется до самого конца, т.е. до тех пор, пока есть еще не просмотренные и не исчезнувшие элементы. Назовем *долей доступных для просмотра элементов* их часть от общего числа, которые были задействованы в таком просмотре.

Свяжем долю доступных для просмотра элементов с суммами некоторых величин, имеющих геометрическое распределение. А именно, будем считать, что просмотр элементов происходит от элементов с наименьшим номером к элементу с наибольшим номером и дополним ряд просматриваемых элементов воображаемыми элементами с номерами $n + 1, n + 2, \dots$. Пусть S_k — номер k -го просмотренного элемента, т.е. номер k -го просмотренного элемента среди всех элементов, если бы никакие элементы не исчезли. Элементы после $(k - 1)$ -го остаются доступными для просмотра с вероятностью q_n^{k-1} , независимо друг от друга. Поэтому для каждого $k \geq 1$ разность $\xi_k = S_k - S_{k-1}$ (где $S_0 = 0$) имеет геометрическое распределение с параметром q_n^{k-1} . Более того, учитывая независимость событий исчезновения, величины ξ_1, ξ_2, \dots являются независимыми, а общее количество m_n среди доступных для просмотра элементов задается формулой $m_n = \max \{k \geq 1 : S_k \leq n\}$.

В предположении, что используется некоторая стратегия остановки Ψ для выбора наилучшего элемента, обозначим соответствующую

вероятность выбрать наилучший элемент через $P_n(\Psi)$. Нас будет интересовать предельное поведение вероятности при $n \rightarrow \infty$: стратегию Ψ' назовем *асимптотически оптимальной*, если для произвольной стратегии Ψ выполнено

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi').$$

Как показывает следующее утверждение, для поиска асимптотически оптимальных стратегий важно выбрать подходящую нормировку вероятности q_n . Обозначим через Ψ^* описанную в разделе 2 оптимальную стратегию остановки в классической задаче наилучшего выбора.

Предложение 3.1. 1. Если $n(1 - q_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то какой бы ни была стратегия остановки Ψ , $P_n(\Psi) \rightarrow 0$. 2. Если $n(1 - q_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $P_n(\Psi^*) \rightarrow 1/e$.

Доказательство. 1. Для произвольного $\alpha > 0$ из сходимости $n(1 - q_n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ следует, что неравенство $n(1 - q_n) \geq \alpha$ выполняется для всех $n \geq n_0$. Понятно, что для $n \geq n_0$ общая доля f_n просмотренных элементов не превышает доступную для просмотра долю f'_n при вероятности исчезновения $q'_n = 1 - \frac{\alpha}{n}$ в смысле стохастического доминирования, то есть для произвольного $x \in \mathbb{R}$ $P(f_n > x) \leq P(f'_n > x)$. Из леммы В.1 следует, что $E[f'_n] \rightarrow \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для произвольной стратегии Ψ остановки, учитывая предложение 2.3,

$$\begin{aligned} P_n(\Psi) &= P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \mid nf_n = k) P(nf_n = k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot P(nf_n = k) = E[f_n] \leq E[f'_n]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E[f'_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[f'_n] = \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha}.$$

Устремляя $\alpha \rightarrow \infty$, получим $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi) \leq 0$, $n \rightarrow \infty$, откуда следует $P_n(\Psi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

2. Пусть a_k — количество элементов, которое после k просмотров были просмотрены или остались доступными для просмотра, \mathcal{F}_k

— σ -алгебра, порожденная событиями, произошедшими за первые k просмотров.

Понятно, что $E[a_k | \mathcal{F}_{k-1}] \geq a_{k-1}q_n$ (указанным образом это количество убывало бы в случае, если бы уже просмотренные элементы тоже исчезали). Отсюда $E[a_k] \geq a_0q_n^k = nq_n^k$.

Обозначим через p_n вероятность найти наилучший элемент в классической постановке, без исчезновения элементов. Общее количество b_n элементов, доступное для просмотра в момент остановки, не меньше числа a_n . Учитывая независимость событий исчезновения от их порядка, и определяя событие $V = \{ \text{максимальный элемент не находится среди исчезнувших} \}$, получим

$$\begin{aligned} P_n(\Psi^*) &\geq p_n \cdot P(V) = p_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(V | b_n = k) \cdot P(b_n = k) \\ &= p_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot P(b_n = k) = p_n E\left[\frac{b_n}{n}\right] \geq p_n E\left[\frac{a_n}{n}\right] \geq p_n q_n^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Поскольку $q_n^n = e^{n \cdot \ln q_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, то, учитывая (3.1), имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi^*) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n q_n^n = \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{e}.$$

С другой стороны очевидно, что $P_n(\Psi^*) \leq p_n$: при исчезновении объектов вероятность обнаружить наилучший не может увеличиться. Поэтому $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi^*) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{e}$, откуда получаем требуемое. \square

Иначе говоря, если $n(1 - q_n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, то вероятность обнаружения наилучшего элемента исчезающе мала, а в случае $n(1 - q_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, задача оптимального выбора сводится к классической: описанная в разделе 2 оптимальная стратегия является асимптотически оптимальной в рассматриваемой нами задаче. Поэтому разумно предположить, что $n(1 - q_n) \rightarrow \alpha$, $n \rightarrow \infty$, где $\alpha \in (0; \infty)$ — заданный коэффициент нетерпения, одинаковый для всех элементов: чем он больше, тем более нетерпеливыми являются элементы и тем скорее они исчезают, то есть покидают множество просматриваемых элементов. Для технической простоты предположим, что $q_n = 1 - \frac{\alpha}{n}$. В этом случае из леммы В.1 следует сходимость по вероятности доли

просматриваемых объектов:

$$f_n \xrightarrow{P} \varphi(\alpha) := \frac{\ln(\alpha + 1)}{\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $f_n \in (0, 1)$, то по теореме о мажорируемой сходимости отсюда получаем, что

$$E[f_n] \rightarrow \varphi(\alpha), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Пусть $n(1 - q_n) \rightarrow \alpha \in (0, \infty)$, $n \rightarrow \infty$. Тогда стратегия $\Psi_{\varphi(\alpha)}$, состоящая в том, чтобы пропустить первые $\lceil \frac{\varphi(\alpha)n}{e} \rceil$ элементов и остановиться на первом максимальном, асимптотически оптимальна, причем

$$P_n(\Psi_{\varphi(\alpha)}) \rightarrow \frac{\varphi(\alpha)}{e}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим a_n количество доступных для просмотра элементов. При условии, что $a_n = m$, вероятность найти наилучший элемент равна произведению вероятности найти наилучший элемент среди доступных для просмотра на вероятность того, что наилучший элемент окажется среди доступных для просмотра, которая, очевидно, равна $\frac{m}{n}$:

$$P(\text{найти наилучший} \mid a_n = m) = P(\text{найти наилучший среди } m) \cdot \frac{m}{n}.$$

Обозначая, как в разделе 2, через p_m максимальную вероятность нахождения наилучшего элемента среди m , для любой стратегии Ψ имеем

$$P(\text{найти наилучший среди } m) \leq p_m.$$

Для произвольных $x \in (0, \varphi(\alpha))$, $y \in (\varphi(\alpha), 1)$ запишем

$$\begin{aligned} P_n(\Psi) &= P(\text{найти наилучший}, m_n \in (x, y)) \\ &+ P(\text{найти наилучший} \mid m_n \notin (x, y)) \cdot P(m_n \notin (x, y)) \\ &\leq \sum_{m=\lceil nx \rceil}^{m=\lceil ny \rceil} P(\text{найти наилучший} \mid a_n = m) \cdot P(a_n = m) + P(m_n \notin (x, y)) \\ &= \sum_{m=\lceil nx \rceil}^{m=\lceil ny \rceil} P(\text{найти наилучший среди } m) \cdot \frac{m}{n} \cdot P(a_n = m) + P(m_n \notin (x, y)) \\ &\leq y \sum_{m=\lceil nx \rceil}^{m=\lceil ny \rceil} p_m P(a_n = m) + P(m_n \notin (x, y)) \leq y \sup_{m \geq \lceil nx \rceil} p_m + P(m_n \notin (x, y)). \end{aligned}$$

Как уже было отмечено, $m_n \xrightarrow{P} \varphi(\alpha)$, $n \rightarrow \infty$. Кроме того, $p_m \rightarrow \frac{1}{e}$, $m \rightarrow \infty$, а значит, и $\sup_{m \geq [nx]} p_m$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi) \leq \frac{y}{e}.$$

Учитывая произвольность y , отсюда имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi) \leq \frac{\varphi(\alpha)}{e}.$$

Следовательно, для доказательства утверждения остается показать, что

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi_{\varphi(\alpha)}) \geq \frac{\varphi(\alpha)}{e}.$$

Как и выше, для произвольных $x \in (\frac{\varphi(\alpha)}{e}, \varphi(\alpha))$, $y \in (\varphi(\alpha), 1)$

$$\begin{aligned} P_n(\Psi_{\varphi(\alpha)}) &\geq \sum_{m=[nx]}^{m=[ny]} P(\text{найти наилучший среди } m) \cdot \frac{m}{n} \cdot P(a_n = m) \\ &\geq x \sum_{m=[nx]}^{m=[ny]} P(\text{найти наилучший среди } m) \cdot P(a_n = m) \end{aligned}$$

Обозначая $b_n = \frac{\varphi(\alpha)n}{e}$, для любого $m \in \{[nx], [nx] + 1, \dots, [ny]\}$ согласно формуле (2.1) имеем

$$\begin{aligned} P(\text{найти наилучший среди } m) &= \frac{[b_n]}{m} \sum_{i=[b_n]}^m \frac{1}{i} \\ &= \left(\frac{b_n}{m} + o(1) \right) \left(\ln \frac{m}{[b_n]} + o(1) \right) \\ &= \left(\frac{\varphi(\alpha)n}{em} + o(1) \right) \left(\ln \frac{em}{\varphi(\alpha)n} + o(1) \right) \\ &\geq \left(\frac{\varphi(\alpha)}{ey} + o(1) \right) \left(\ln \frac{ex}{\varphi(\alpha)} + o(1) \right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

причем, учитывая, что $\frac{\varphi(\alpha)}{ey} \leq \frac{\varphi(\alpha)}{em} \leq \frac{\varphi(\alpha)}{ex} < 1$, остаточный член ограничен по m . Таким образом,

$$\begin{aligned} P_n(\Psi_{\varphi(\alpha)}) &\geq x \left(\frac{\varphi(\alpha)}{ey} + o(1) \right) \left(\ln \frac{ex}{\varphi(\alpha)} + o(1) \right) \sum_{m=[nx]}^{m=[ny]} P(a_n = m) \\ &\geq x \left(\frac{\varphi(\alpha)}{ey} + o(1) \right) \left(\ln \frac{ex}{\varphi(\alpha)} + o(1) \right) P(m_n \in (x, y)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi_{\varphi(\alpha)}) \geq x \frac{\varphi(\alpha)}{e y} \ln \frac{e x}{\varphi(\alpha)}.$$

Устремляя $x, y \rightarrow \varphi(\alpha)$, отсюда получаем, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(\Psi_{\varphi(\alpha)}) \geq \frac{\varphi(\alpha)}{e},$$

что и требовалось доказать. \square

А. Оценка вероятностей больших уклонений для сумм независимых случайных величин с различным геометрическим распределением

Лемма А.1. Пусть ξ_1, \dots, ξ_k — набор независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение с параметрами p_1, \dots, p_k соответственно, $S = \xi_1 + \dots + \xi_k$, и $\lambda \in (0, 1)$. Тогда если $\max_{1 \leq j \leq k} (1 - e^{-\lambda}) p_j^{-1} \leq a < 1$, то

1. $P\left(S_k \geq E(S_k) + \frac{\lambda}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}\right) < \exp\left(-\frac{\lambda^2}{3} E(S_k)\right).$
2. $P\left(S_k \leq E(S_k) - \frac{9\lambda}{8} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}\right) < \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} E(S_k)\right).$

Доказательство. Согласно неравенству Маркова, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$P(S_k \geq t) \leq \frac{E(e^{\lambda S_k})}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda t} E(e^{\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_k)}) = e^{-\lambda t} \prod_{j=1}^k E e^{\lambda \xi_j}. \quad (\text{A.1})$$

Из неравенства $(1 - e^{-\lambda}) p_j^{-1} \leq a$ следует $e^{\lambda} (1 - p_j) \leq \frac{1 - p_j}{1 - a p_j} < 1$. Поэтому для всех $j = 1, \dots, k$ математическое ожидание $E(e^{\lambda \xi_j})$ конечно и

$$E(e^{\lambda \xi_j}) = \frac{p_j e^{\lambda}}{1 - (1 - p_j) e^{\lambda}} = \frac{1}{1 - (1 - e^{-\lambda}) p_j^{-1}}.$$

Подставляя это выражение в (A.1), получаем

$$\ln P(S_k \geq t) \leq -\lambda t - \sum_{j=1}^k \ln(1 - (1 - e^{-\lambda}) p_j^{-1}).$$

Из формулы Тейлора следует, что $-\ln(1-x) < x - \frac{x^2}{2(1-a)^2}$ для $x \in (0; a)$. Поэтому

$$\ln P(S_k \geq t) \leq -\lambda t + \sum_{j=1}^k (1 - e^{-\lambda}) p_j^{-1} + \frac{1}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k (1 - e^{-\lambda})^2 p_j^{-2}.$$

Далее, для $\lambda \in (0, 1)$ справедливо неравенство $1 - e^{-\lambda} < \lambda - \frac{\lambda^2}{3} < \lambda$.

Отсюда, учитывая, что $E(S_k) = \sum_{j=1}^k E(\xi_j) = \sum_{j=1}^k p_j^{-1}$, имеем

$$\ln P(S_k \geq t) < -\lambda t + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{3} \right) E(S_k) + \frac{\lambda^2}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}.$$

Подставляя $t = E(S_k) + \frac{\lambda}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}$, приходим к желаемой оценке

$$\begin{aligned} \ln P\left(S_k \geq E(S_k) + \frac{\lambda}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}\right) &< -\lambda E(S_k) - \frac{\lambda^2}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k p_j^{-2} \\ &+ \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3} \right) E(S_k) + \frac{\lambda^2}{2(1-a)^2} \sum_{j=1}^k p_j^{-2} = -\frac{\lambda^2}{3} E(S_k). \end{aligned}$$

Аналогично, в силу неравенства Маркова, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(S_k \leq t) &= P(-S_k \geq -t) \leq \frac{E(e^{-\lambda S_k})}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{\lambda t} \prod_{j=1}^k E(e^{-\lambda S_j}) = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{1}{1 + (e^\lambda - 1) p_j^{-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку для $x > 0$ $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ и $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, то

$$\begin{aligned} \ln P(S_k \leq t) &\leq \lambda t - \sum_{j=1}^k \ln(1 + (e^\lambda - 1) p_j^{-1}) < \\ &\lambda t - \sum_{j=1}^k \ln\left(1 + \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) p_j^{-1}\right) < \lambda t - \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) \sum_{j=1}^k p_j^{-1} + \\ &\frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^k p_j^{-2} \leq \lambda t - \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) + \frac{9\lambda}{8} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}. \end{aligned}$$

Как и в пункте 1, подставив $t = E(S_k) - \frac{9\lambda}{8} \sum_{j=1}^k p_j^{-2}$, придем к требуемому неравенству. \square

В. Асимптотическое поведение сумм независимых геометрически распределенных величин с экспоненциально меняющимися параметрами

Лемма В.1. Пусть для каждого $n \geq 1$ $\{\xi_{n,j}, j \geq 1\}$ – последовательность независимых геометрически распределенных случайных величин с параметром

$$P(\xi_{n,j} = 1) = q_n^j = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^j,$$

где α – некоторая положительная постоянная, $S_{n,k} = \sum_{j=1}^k \xi_{n,j}$, $a_n = \max\{k \geq 1 : S_{n,k} \leq n\}$. Тогда имеет место сходимость по вероятности

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{P} \varphi(\alpha) := \frac{\ln(\alpha + 1)}{\alpha}, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ положительных чисел сходится к нулю, при этом $n\lambda_n^2 \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$. Для всех достаточно больших n выполнено $\lambda_n < \frac{1}{3e^\alpha}$, откуда для всех $j = 1, \dots, n$ справедливо

$$q_n^{-j} (1 - e^{-\lambda_n}) \leq q_n^{-n} (1 - e^{-\lambda_n}) \leq \lambda_n \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \leq \frac{1}{3e^\alpha}.$$

Поскольку $\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^\alpha, n \rightarrow \infty$, то для всех достаточно больших $n \geq 1$ и для всех $j = 1, \dots, n$ справедливо

$$q_n^{-j} (1 - e^{-\lambda_n}) \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{B.1})$$

Из леммы А.1 имеем, что для $t \in [0, 1]$

$$P\left(S_{n,[tn]} \geq E(S_{n,[tn]}) + 2\lambda_n \sum_{j=1}^{[tn]} q_n^{-2j}\right) < \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{3} E(S_{n,[tn]})\right), \quad (\text{B.2})$$

$$P\left(S_{n,[tn]} \leq E(S_{n,[tn]}) - \frac{9}{8}\lambda_n \sum_{j=1}^{[tn]} q_n^{-2j}\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{2} E(S_{n,[tn]})\right). \quad (\text{B.3})$$

Обозначим $\psi(t) = \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}$. Нетрудно видеть, что для $t \in [0, 1]$

$$E(S_{n,[tn]}) = \sum_{j=1}^{[tn]} E(\xi_{n,j}) = \sum_{j=1}^{[tn]} q_n^{-j} = q_n^{-1} \frac{q_n^{[tn]} - 1}{q_n - 1} = n\psi(t) + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда из (B.2) следует, что для всех достаточно больших $n \geq 1$ и для всех t , достаточно близких к $\varphi(\alpha)$ выполнено

$$P(|S_{n,[tn]} - n\psi(t)| \geq 2\lambda_n\psi(2t)) \leq \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{3}n\psi(t)\right). \quad (B.4)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число, такое, что для $t \in [\varphi(\alpha) - \varepsilon, \varphi(\alpha) + \varepsilon]$ выполнено (B.4). Заметим, что

$$\begin{aligned} P\left(\frac{a_n}{n} > \varphi(\alpha) + \varepsilon\right) &\leq P(S_{n,[(\varphi(\alpha)+\varepsilon)n]} \leq n) \\ &= P(S_{n,[(\varphi(\alpha)+\varepsilon)n]} - n\varphi(\varphi(\alpha) + \varepsilon) \leq n(1 - \psi(\varphi(\alpha) + \varepsilon))). \end{aligned}$$

Поскольку $\psi(t) > 1$ для $t > \varphi(\alpha)$, имеем:

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{k_n}{n} > \varphi(\alpha) + \varepsilon\right) \\ &\leq P(|S_{n,[(\varphi(\alpha)+\varepsilon)n]} - n\psi(\varphi(\alpha) + \varepsilon)| \geq n(\psi(\varphi(\alpha) + \varepsilon) - 1)). \end{aligned}$$

Поскольку для достаточно больших n справедливо

$$\lambda_n < \frac{\psi(\varphi(\alpha) + \varepsilon) - 1}{2\psi(2(\varphi(\alpha) + \varepsilon))},$$

то для таких n выполнено

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{a_n}{n} > \varphi(\alpha) + \varepsilon\right) \\ &\leq P(|S_{n,[(\varphi(\alpha)+\varepsilon)n]} - n\psi(\varphi(\alpha) + \varepsilon)| \geq 2\lambda_n\psi(2(\varphi(\alpha) + \varepsilon))) \\ &\leq \exp\left(-\frac{n\lambda_n^3}{3}\psi(\varphi(\alpha))\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Сходимость $P\left(\frac{a_n}{n} < \varphi(\alpha) - \varepsilon\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, доказывается аналогично из неравенства (B.3) и завершает доказательство. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. *Теоремы и задачи о процессах Маркова*. М.: Наука, 1967.
2. Гусейн-Заде С.М. *Разборчивая невеста*. М.: Библиотека «Математическое просвещение», 2003, 24 с.
3. Гусейн-Заде С.М. *Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний* // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11, № 3. С. 534–537.
4. Доценко С.И., Закусило О.К. *Задача оптимального выбора с «заминированными» объектами* // Кибернетика и вычислительная техника. 2012. Вып. 170, С. 51–58.
5. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения*. СПб.: Лань, 2010.
6. Пешков Н.В. Свойства оптимального момента остановки в задаче наилучшего выбора. Диссертация на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. н., Петрозаводск, 2003.
7. Пресман Э.Л., Сонин И.М. *Задача наилучшего выбора при случайном числе объектов* // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 4. С. 695–706.
8. Samuel-Cahn E. *The best-choice secretary problem with random freeze on jobs* // Stochastic Processes and their Applications. 1995. V. 55, P. 315–327.

SECRETARY PROBLEM WITH VANISHING OBJECTS

Sergey I. Dotsenko, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Cand.Sc. (sergei204@ukr.net),

Georgiy M. Shevchenko, Taras Shevchenko National University of
Kyiv, Dr.Sc., professor (zhora@univ.kiev.ua).

Abstract: We consider a version of the secretary problem where elements may vanish during the selection and become unchoosable. We construct a selection strategy and identify the probability to select the best element, which turns out to be asymptotically maximal as number of elements increases indefinitely. As an auxiliary result of independent interest we establish large deviation probability estimates for sums of independent variables with distinct geometric distribution.

Keywords: optimal selection problem, secretary problem, vanishing objects, large deviation probability.