# Задача управления биоресурсами с меняющейся долей заповедной территории и миграцией

Реттиева А.Н.

*ИПМИ КарНЦ РАН, ул. Пушкинская, 11, г. Петрозаводск, 185910, Россия*
e-mail: `annaret@krc.karelia.ru`

Исследованы модели управления биоресурсами, учитывающие существование миграции между частями водоема. Центр (государство) определяет долю заповедной части водоема, обозначенную $s$. Разделим акваторию водоема на две части $S_1$ и $S_2$, где вылов запрещен и разрешен, соответственно. Тогда $s = S_1/(S_1 + S_2)$ - доля заповедной территории. Пусть $x_1$ и $x_2$ - рыбные запасы на единицу площади $S_1$ и $S_2$, соответственно. Между частями водоема существует миграционный обмен с коэффициентом $g(s)$. На $S_2$ рыболовецкая артель ведет вылов биоресурсов на бесконечном отрезке времени.

Рассмотрим модель с бесконечным временем и логистическим законом роста. Тогда динамика развития популяции с учетом вылова описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(\varepsilon - \beta(x_1(t) + x_2(t)) + g(s)(x_2(t) - x_1(t))\,,\ x_i(0) = x_i^0 \\ x_2'(t) = x_2(t)(\varepsilon - \beta(x_1(t) + x_2(t)) + g(s)(x_1(t) - x_2(t)) - u(t)\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1(t) \geq 0$ – размер популяции в момент $t$ на охраняемой территории; $x_2(t) \geq 0$ – размер популяции на территории, где вылов разрешен; $u(t) \geq 0$ – рыболовецкие усилия артели в момент $t$; $s(t)$ – доля заповедной части водоема и $g(s)$ – коэффициент миграции.

Выигрыш игрока на бесконечном отрезке времени имеет вид

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[u(t)(p - cu(t)) - k(1 - s)]dt\,, \tag{2}$$

где $c$ – затраты на вылов, $p$ – цена продажи выловленной рыбы и $k$ – затраты на использование водоема.

Мы исследуем следующий функционал, определяющий выигрыш центра:

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}[m(x_1(t) + x_2(t) - \bar{x})^2)]dt\,, \tag{3}$$

где $\bar{x}$ – размер популяции, оптимальный для воспроизводства и соответственно для использования, $m$ – штраф за отклонение от этого состояния.

Для представленной модели найдено равновесие по Нэшу. Проведено моделирование для двух вариантов вида функции миграции:

1. $g(s) = \alpha s(t)(1 - s(t))\,,$

   где $\alpha$ – скорость обмена между открытой и закрытой областями.

2. $g(s) = (1 - s(t))(1 - e^{-\gamma s(t)(x_1(t)+x_2(t))})\,,$

   где $\gamma$ – скорость обмена между открытой и закрытой областями.

Исследована также задача с конечным промежутком планирования, при этом миграционный обмен происходит с коэффициентом $q/s(t)$, где $q$ - скорость обмена между открытой и закрытой областями.

Динамика развития популяции с учетом вылова описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \varepsilon x_1(t) + q/s(t)(x_2(t) - x_1(t))\,,\; x_1(0) = x_1^0\,, \\ x_2'(t) = \varepsilon x_2(t) + q/s(t)(x_1(t) - x_2(t)) - u(t)\,,\; x_2(0) = x_2^0\,, \end{cases} \tag{2}$$

где все параметры определены в предыдущей модели

Выигрыш игрока на конечном промежутке времени $[0, T]$ имеет вид:

$$J = g(x(T) + y(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[u(t)(p - cu(t))]dt\,,$$

где $c$ – затраты игрока на вылов и $p$ – цена единицы выловленной рыбы.

Используем следующие функционалы выигрышей центра:

1. $I_1 = \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt\,,$

   где $\bar{x}$ – размер популяции, оптимальный для воспроизводства,

2. $I_2 = \int_0^T (x(t)(1 - s(t)) - y(t)s(t))^2 dt\,.$

Для представленной модели найдено асимптотическое решение и равновесие по Нэшу. Проведено численное моделирование.

*Исследования проведены при финансовой поддержке РФФИ проект № 06-01-00128а и проект № 08-01-98801-р-север-а.*

## Литература


1. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory*, Academic Press, NY, 1982.
2. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *A fishery game model with migration: reserved territory approach*, Game Theory and Applications **10** (2004), 97–108.
3. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Методы динамических игр в задаче определения оптимальной заповедной зоны*, Обозрение прикладной и промышленной математики **12(3)** (2005), 610–625.
4. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды*, Матемематическое моделирование **18(5)** (2006), 73–90.