

УДК 519.876.2

ББК 22.18

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Владислав В. ШУМОВ

Международный НИИ проблем управления

ВСЕВОЛОД О. КОРЕПАНОВ

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН

e-mail: v.v.shumov@yandex.ru, moskvo@yandex.ru.ru

В недавнем выпуске журнала «Математическая теория игр и ее приложения», Т. 13, вып. 2, 2021 была опубликована статья В.В. Шумова, В.О. Корепанова «Исследование теоретико-игровых моделей боевых действий». К сожалению, в работе допущена опечатка в разделе 3.2 и ошибка в расчетах в разделе 4, что и стало причиной данного письма.

3.2. В разделе (3.2) в формуле (3.4) допущена опечатка, целевая функция наступающих имеет вид

$$f(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}. \quad (3.4)$$

4. Частный случай задачи прорыва пунктов обороны

Ранее найдено решение задачи распределения ресурсов сторон между пунктами обороны по критерию «прорыв слабейшего пункта обороны» (целевая функция (3.4)). Качественно полученное решение идентично решению задачи «нападение–защита» Гросса–Гермейера. Вместе с тем, теоретический и практический интерес представляет решение данной задачи по критерию «прорыв хотя бы одного пункта обороны». Тогда целевая функция наступающих имеет вид:

$$G(x, y) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_x(x_i, y_i)) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right), \quad (4.1)$$

при условии $\sum_{i=1}^n x_i = r_x$, $\sum_{i=1}^n y_i = r_y$, или в эквивалентной форме

$$1 - \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right) \Rightarrow - \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right) \Rightarrow - \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i} \right) \Rightarrow$$

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\beta_i x_i + y_i}{y_i} \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\beta_i x_i}{y_i} + 1 \right). \quad (4.2)$$

Рассмотрим функцию $h(x, y) = \ln \left(a \frac{x}{y} + 1 \right)$, $x, y, a > 0$, её производные по y равны

$$h'_y(x, y) = -ax [axy + y^2]^{-1}, h''_y(x, y) = ax \frac{ax + 2y}{(axy + y^2)^2} \geq 0.$$

Следовательно, $h(x, y)$ выпукла по y . Аналогично показывается, что $h(x, y)$ вогнута по x . Это же верно и для функции (4.2). Тогда это выпукло-вогнутая игра и существует решение в чистых стратегиях. Значение игры равно верхней и нижней цене игры:

$$v = \underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} g(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} g(x, y) = \bar{v}.$$

Чтобы найти решение игры, составим две функции Лагранжа, найдем их производные и приравняем нулю:

$$L(x, \lambda) = - \sum_{i=1}^n \ln \left(\beta_i \frac{x_i}{y_i} + 1 \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - r_x \right),$$

$$L(y, \mu) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\beta_i \frac{x_i}{y_i} + 1 \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n y_i - r_y \right),$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = - \frac{\beta_i}{\beta_i x_i + y_i} + \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial L(y, \mu)}{\partial y_i} = - \frac{\beta_i x_i}{y_i(\beta_i x_i + y_i)} + \mu = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Разделим (4.4) на (4.3), предварительно перенеся λ и μ в правые части уравнений:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (4.5)$$

С учетом ограничений $\sum_{i=1}^n x_i = r_x$ и $\sum_{i=1}^n y_i = r_y$ из (4.5) имеем:

$$\frac{r_x}{r_y} = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (4.6)$$

Тогда из (4.3)–(4.6) находим

$$x_i^0 = \frac{\beta_i r_x}{S(\beta_i r_x + r_y)}, \quad y_i^0 = \frac{\beta_i r_y}{S(\beta_i r_x + r_y)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad S = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\beta_k r_x + r_y}.$$

Значение игры равно $v = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{r_y}{\beta_i r_x + r_y}$.

Отметим, что решение в чистых стратегиях существует только при значении параметра формы $m = 1$ (тактический уровень).

Пример. Пусть $r_x = 200, r_y = 100, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \beta_3 = 0.5, n = 3$. Найдем оптимальные решения сторон и значение игры по двум критериям прорыва пунктов обороны. Результаты расчетов представлены в таблице:

Показатели	Прорыв слабейшего пункта обороны (3.4)	Прорыв хотя бы одного пункта обороны (4.1)
Оптимальная стратегия наступающих	Вероятности выбора пункта для удара всеми силами 0.5; 0.25; 0.25	Распределение единиц по пунктам 80; 60; 60
Оптимальная стратегия обороняющихся	Распределение единиц по пунктам 50; 25; 25	Распределение единиц по пунктам 40; 30; 30
Значение игры	0.8	0.92

В рассмотренном примере нанесение наступающими удара всеми силами по одному из пунктов нерационально, поскольку значение игры равно 0.8. Наступающим целесообразно на этапе подготовки к бою руководствоваться критерием прорыва хотя бы одного пункта обороны. В предположении, что пункты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \dots = \beta_n$), сравним значения игры по критерию прорыва слабейшего пункта v_1 и критерию прорыва хотя бы одного пункта v_2 :

$$v_1 = 1 - \frac{r_y}{n\beta r_x + r_y} = 1 - s_1, \quad v_2 = 1 - \left(\frac{r_y}{\beta r_x + r_y} \right)^n = 1 - s_2, \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{(\beta r_x / r_y + 1)^n}{n\beta r_x / r_y + 1}. \quad (4.7)$$

Из выражения (4.7) следует, что с увеличением количества пунктов обороны n преимущество использования наступающими критерия прорыва хотя бы одного пункта становится очевидным.