Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.4, с. 3–17

УДК 519.834
ББК 22.18

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С АДДИТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША, СОЧЕТАЮЩИМИ ОБЩЕСТВЕННЫЕ И ЛИЧНЫЕ ИНТЕРЕСЫ

Виктор А. Горелик
ФИЦ ИУ РАН
119333, Москва, ул. Вавилова, 40
e-mail: gorelik@ccas.ru
Татьяна В. Золотова
Финансовый университет при Правительстве РФ
125993, Москва, Ленинградский пр., 49
e-mail: tgold11@mail.ru

В работе предложена теоретико-игровая модель с линейно-квадратичными функциями выигрыша, которые представляют собой аддитивные свертки двух критериев, описывающих общественные и личные интересы. Данная игра обладает рядом хороших свойств, в частности, независимостью стратегии лидера в равновесии Штакельберга от параметров функции ведомого. Это свойство означает, что у лидера нет необходимости в информации о целевой функции ведомого, которую в реальности трудно получить, и его стратегия обладает свойством робастности.

Ключевые слова: иерархическая игра, равновесие по Штакельбергу, равновесие по Нэшу, общественные блага, линейно-квадратичная

функция выигрыша.

Поступила в редакцию: 03.07.21 *После доработки*: 12.08.21 *Принята к публикации*: 10.12.21

1. Введение

Теория иерархических игр сложилась из взаимосвязанных научных исследований двух коллективов: Института проблем управления (вместе с МФТИ) и Вычислительного центра (вместе с МГУ и МФТИ).

В начале 70-х годов прошлого века В.Н. Бурков и его ученики заложили основы математической теории активных систем, которые были обобщены в известных монографиях [1, 2]. Это направление продолжает активно развиваться, в том числе в рамках разработанной Д.А. Новиковым теории управления организационными системами [7].

Также в начале 1970-х годов Ю.Б. Гермейер и Н.Н. Моисеев сформулировали основные положения информационной теории иерархических систем [3, 6], развитые затем в монографии [4].

В основе обоих отмеченных выше научных исследований лежат теоретико-игровые модели, которые вполне обоснованно можно назвать иерархическими играми. Надо заметить, что истоком этого направления являются работы экономиста Г. Штакельберга (модель лидер – ведомый или принципал – агент).

Равновесие по Штакельбергу [21, 22], предложенное автором для анализа дуополии, впоследствии нашло широкое применение в различных разделах математической экономики и теории управления. Из наиболее известных работ можно упомянуть теорию контрактов [16-18], удостоенную Нобелевской премии. В плане развития математического аппарата российские исследования значительно продвинулись: принцип гарантированного результата, принцип открытого управления, неполнота информации, динамика и т.д. Рассматривались задачи управления без обратной связи (прямая задача Штакельберга) и с обратной связью (обратная задача Штакельберга), динамические игры, иерархические игры с неоднозначной реакцией нижнего уровня и неполной информацией, общие методы двухуровневой оптимизации и т.д.

Одной из важных сфер применения теории игр и, в частности, принципа иерархического управления, являются проблемы общественных благ, наиболее актуальными из которых в настоящее время становятся проблемы экологии [10, 11, 19]. Игра «Общественные блага» – это классическая модель в экономике. Повсеместное и глубокое явление «Трагедия общин» [14] заключается в том, что социальное благополучие будет оптимально, если все игроки будут сотрудничать, что, однако, не может быть достигнуто в равновесии по Нэшу, поскольку индивидуальный игрок получит большую полезность от роли «безбилетника». Такие проблемы возникают весьма часто, например, чрезмерный выпас земель, находящихся в общей собственности, чрезмерный вылов рыбы в океане, выбросы углерода [10, 11].

Эти игровые вопросы получили большое внимание исследователей из разных областей, таких как экономика, экология, биология, политика, техника управления, коррупция и др. (см., например, [19]). При этом вводятся различные механизмы управления, такие как иерархическая структура, награда и наказание, пороговые значения и т. д. (см., например, [5, 8, 9, 12, 13, 15, 20]).

В теоретико-игровых моделях общественных благ целевые функции игроков представляют собой свертку двух критериев, описывающих общественные и личные интересы. В данной работе предложена игровая модель, в которой использована аддитивная свертка этих критериев. Первый критерий зависит от стратегии всех игроков и представляет собой потери от интенсивности их деятельности. Второй критерий для каждого игрока является функцией от его стратегии и отражает доход от его деятельности. Предполагается, что первый (общий) критерий имеет единственный глобальный максимум, причем без ограничения общности можно считать, что этот максимум расположен в начале координат со значением критерия равным нулю (т. е. при отсутствии деятельности нет потерь). В рассматриваемой далее модели в качестве общего критерия принимается отрицательно определенная квадратичная форма. Это, конечно, существенно ограничивает общность рассмотрения, однако определенным основанием служит тот математический факт, что дважды дифференцируемая функция в окрестности глобального максимума хорошо аппроксимируется отрицательно определенной квадратичной формой. Второй (частный) критерий каждого игрока является линейным, что вполне естественно для формализации функции дохода.

Оказывается, что возникающая игра с линейно-квадратичными функциями выигрыша обладает рядом хороших свойств, самым интересным из которых является независимость стратегии лидера в равновесии Штакельберга от параметров линейной функции ведомого (в отличие от равновесия Нэша). Это свойство означает, что у лидера нет необходимости в точной информации о целевой функции ведомого, которую в реальности трудно получить, и его стратегия обладает свойством робастности.

2. Постановка задачи и свойства равновесия Штакельберга для игры двух лиц

Итак, целевые функции игроков имеют вид

$$F\left(x,\ y\right)=\frac{1}{2}\left\langle x,\ Ax\right\rangle+\left\langle x,\ By\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle y,\ Cy\right\rangle+\left\langle p,x\right\rangle,$$

$$G\left(x,\ y\right)=\frac{1}{2}\left\langle x,\ Ax\right\rangle+\left\langle x,\ By\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle y,\ Cy\right\rangle+\left\langle q,y\right\rangle,$$

где n-мерный вектор x – стратегия игрока с функцией выигрыша F, m-мерный вектор y – стратегия игрока с функцией выигрыша G, матрица $D=\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ – симметрическая отрицательно определенная квадратная матрица размера $(n+m)\times(n+m)$. Функции F и G являются строго вогнутыми функциями по совокупности переменных, поэтому они имеют единственные глобальные максимумы, соответственно, (x^1,y^1) и (x^2,y^2).

Если игрок с целевой функцией F является лидером, а игрок с функцией G – ведомым, равновесие в прямой задаче Штакельберга будем обозначать (x^F,y^F), а в случае, когда роли игроков меняются – (x^G,y^G).

Теорема 2.1. *Оптимальной стратегией лидера в игре с функциями выигрыша $F(x,y)$ и $G(x,y)$ является выбор контролируемых переменных точки глобального максимума своей функции, т.е. $x^F=x^1$, $y^G=y^2$. При этом этом на точках равновесиях и точках абсолютных максимумов функций выигрыша выполняются равенства*

$$F\left(x^F,y^F\right)+G\left(x^F,y^F\right)=F\left(x^1,y^1\right)+G\left(x^1,y^1\right)=$$
$$=F\left(x^G,y^G\right)+G\left(x^G,y^G\right)=F\left(x^2,y^2\right)+G\left(x^2,y^2\right).$$

Доказательство. Если лидер выбрал стратегию x и сообщил ее ведомому, то из условия равенства нулю градиента G_y' функции G по переменным y имеем $B^T x + Cy + q = 0$. Матрица C является, очевидно, отрицательно определенной, поэтому она невырождена и оптимальный ответ ведомого $y\,(x) = -C^{-1}(B^T x + q)$. Тогда

$$F\,(x,\ y(x)) = \frac{1}{2}\left\langle x,\ Ax\right\rangle - \left\langle B^T x,\ C^{-1}\left(B^T x + q\right)\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle B^T x + q, C^{-1}\left(B^T x + q\right)\right\rangle + \left\langle p, x\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle x,\ Ax\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle B^T x - q, C^{-1}\left(B^T x + q\right)\right\rangle + \left\langle p, x\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle x,\ Ax\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle B^T x, C^{-1} B^T x\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle q, C^{-1} q\right\rangle + \left\langle p, x\right\rangle .$$

Приравнивая градиент $F\,(x, y(x))$ как сложной функции от x к нулю, имеем

$$Ax + p - BC^{-1}B^T x = 0. \tag{2.1}$$

Условия глобального максимума функции F есть $F_x' = F_y' = 0$, т.е.

$$Ax + p + By = 0, \quad B^T x + Cy = 0. \tag{2.2}$$

Так как матрица D невырождена, то из системы (2.2) имеем

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = D^{-1}\begin{pmatrix} -p \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

т.е. у функции F глобальный максимум существует и единственный. С другой стороны, выражая y из второго уравнения системы (2.2) $y = -C^{-1}B^T x$ и подставляя в первое, получаем для x то же самое уравнение (2.1). Значит, матрица $E_1 = A - BC^{-1}B^T$ невырождена (впрочем, это известный факт для отрицательно определенных блочных матриц) и

$$x^F = x^1 = -E_1^{-1} p.$$

При этом $y^1 = -C^{-1}B^T x^1$, а

$$y^F = -C^{-1}\left(B^T x^F + q\right) = -C^{-1}\left(B^T x^1 + q\right) = y^1 - C^{-1} q.$$

Условия глобального максимума функции G есть $G_x' = G_y' = 0$, т.е.

$$Ax + By = 0, \quad B^T x + Cy + q = 0. \tag{2.4}$$

Из системы (2.4) имеем

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -q \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

т.е. у функции G глобальный максимум существует и единственный, и аналогично предыдущему имеет место

$$y^G = y^2 = -E_2^{-1} q,$$

где $E_2 = C - B^T A^{-1} B$. Далее, очевидно, имеют место равенства

$$\begin{gathered} F(x,y) + G(x,y) = \langle x, Ax \rangle + \langle x, By \rangle + \langle p, x \rangle + \\ + \left\langle B^T x, y \right\rangle + \langle y, Cy \rangle + \langle q, y \rangle = \left\langle F_x'(x,y), x \right\rangle + \left\langle G_y'(x,y), y \right\rangle . \end{gathered} \tag{2.6}$$

Так как $F_x'(x^1, y^1) = 0$, и $G_y'(x^1, y^1) = F_y'(x^1, y^1) + q = q$, то $F(x^1, y^1) + G(x^1, y^1) = \langle q, y^1 \rangle$. Так как $G_y'\left(x^F, y^F\right) = 0$, то $F\left(x^F, y^F\right) + G\left(x^F, y^F\right) = \left\langle F_x'(x^F, y^F), x^F \right\rangle$. Учитывая, что $x^F = x^1$, $y^F = y^1 - C^{-1} q$, имеем

$$F_x'\left(x^F, y^F\right) = Ax^F + p + By^F = Ax^1 + p + B\left(y^1 - C^{-1}q\right) = -BC^{-1}q.$$

Тогда $F\left(x^F, y^F\right) + G\left(x^F, y^F\right) = -\langle BC^{-1}q, x^1 \rangle = -\left\langle q, C^{-1}B^T x^1 \right\rangle = \langle q, y^1 \rangle$.

Таким образом, доказано первое равенство утверждения теоремы:

$$F\left(x^F, y^F\right) + G\left(x^F, y^F\right) = F\left(x^1, y^1\right) + G\left(x^1, y^1\right) = \left\langle q, y^1 \right\rangle .$$

Аналогично доказывается, что

$$F\left(x^G, y^G\right) + G\left(x^G, y^G\right) = F\left(x^2, y^2\right) + G\left(x^2, y^2\right) = \left\langle p, x^2 \right\rangle .$$

Теперь покажем, что $\langle p, x^2 \rangle = \langle q, y^1 \rangle$. Используя (2.3), (2.5) и выражение для обратной матрицы

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n+m\ 1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n+m\ 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1\ n+m} & D_{2\ n+m} & \dots & D_{n+m\ n+m} \end{pmatrix},$$

где D_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы D, имеем

$$\left\langle q, y^1 \right\rangle = -\frac{1}{|D|} \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} p_i D_{i\ n+j},$$

$$\langle p, x^2 \rangle = -\frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} q_j D_{n+j\ i}.$$

Откуда с учетом симметричности матрицы D имеем $\langle p, x^2 \rangle = \langle q, y^1 \rangle$. Теорема доказана. □

Из первого результата теоремы 2.1 следует, что ни лидеру, ни ведомому для выбора своей оптимальной стратегии не требуется информации об индивидуальных параметрах p и q в функции выигрыша другого игрока. Это важное свойство с практической точки зрения, т. к. такая информация практически недоступна, а попытка ее выяснения сталкивается с возможным блефом.

Из второго результата теоремы 2.1 следует, что если один игрок предпочитает равновесие (x^F, y^F), то другой предпочитает (x^G, y^G). Поэтому в зависимости от параметров функции выигрыша может возникать либо борьба за лидерство, либо за возможность быть ведомым, причем оба случая могут иметь место. Для определения выгоды лидерства определим разность между значениями целевой функции F в точках (x^F, y^F) и (x^G, y^G). Нетрудно определить, что эта разность равна

$$F\left(x^F, y^F\right) - F\left(x^G, y^G\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left\langle \left(A^{-1} - E_1^{-1}\right) p, p \right\rangle + \left\langle \left(C^{-1} - E_2^{-1}\right) q, q \right\rangle\right] - \left\langle C^{-1} B^T E_1^{-1} p, q \right\rangle.$$

Далее мы убедимся на примерах, что она может быть как положительна, так и отрицательна.

Теперь найдем равновесие по Нэшу в этой игре. Оно удовлетворяет системе уравнений

$$Ax + By + p = 0, \quad B^T x + Cy + q = 0\ . \tag{2.7}$$

Из системы (2.7) имеем, что равновесие по Нэшу существует, единственно и равно

$$\begin{pmatrix} x^N \\ y^N \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix},$$

а из (2.6) следует, что $F\left(x^N, y^N\right) + G\left(x^N, y^N\right) = 0$.

Так как точка равновесия по Нэшу является строгой, то выигрыш лидера, очевидно, не меньше его результата в точке равновесия по Нэшу. Ведомый же может получать как больше, так и меньше, чем в равновесии по Нэшу. Как показывают примеры, для ведомого может иметь место и то, и другое.

Проиллюстрируем полученные результаты для частного случая одномерных стратегий. Функции выигрыша имеют вид

$$F(x,\ y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + px,$$

$$G(x,\ y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + qx.$$

Для квадратичной формы $\frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$ необходимые и достаточные условия отрицательной определенности имеют вид $a < 0,\ c < 0,\ ac - b^2 > 0.$

Координаты точек равновесия по Штакельбергу, по Нэшу и глобальных максимумов равны:

$$x^F = x^1 = -\frac{cp}{ac-b^2}, \quad y^F = y^1 - \frac{q}{c} = \frac{bp}{ac-b^2} - \frac{q}{c},$$

$$x^G = x^2 - \frac{p}{a} = \frac{bq}{ac-b^2} - \frac{p}{a}, \quad y^G = y^2 = -\frac{aq}{ac-b^2},$$

$$x^N = \frac{bq-cp}{ac-b^2}, \quad y^N = \frac{bp-aq}{ac-b^2}.$$

При этом значения функций выигрыша в точках равновесия по Штакельбергу равны:

$$F\left(x^F, y^F\right) = \frac{q^2}{2c} - \frac{cp^2}{2\left(ac-b^2\right)}, \quad G\left(x^F, y^F\right) = \frac{cp^2+2bpq}{2\left(ac-b^2\right)} - \frac{q^2}{2c},$$

$$F\left(x^G, y^G\right) = \frac{aq^2+2bpq}{2\left(ac-b^2\right)} - \frac{p^2}{2a}, \quad G\left(x^G, y^G\right) = \frac{p^2}{2a} - \frac{cp^2}{2\left(ac-b^2\right)},$$

откуда

$$F\left(x^F, y^F\right) - F\left(x^G, y^G\right) = G\left(x^F, y^F\right) - G\left(x^G, y^G\right) =$$

$$= \frac{|a|\, b^2q^2 - 2acbpq + |c|\, b^2p^2}{2ac\left(ac-b^2\right)}.$$

Как говорилось выше, эти разности могут быть как положительны, так и отрицательны. Например, при $a = c = -4,\ b = 3,\ p = q = 1$ имеем

$$|a|\, b^2q^2 - 2acbpq + |c|\, b^2p^2 = 36 - 2\cdot 48 + 36 < 0,$$

т.е. выгодно быть ведомым (получать информацию), а при $a = c = -4,\ b = 3,\ p = 1, q = 4$ имеем

$$|a|\, b^2 q^2 - 2acbpq + |c|\, b^2 p^2 = 576 - 2 \cdot 48 \cdot 4 + 36 > 0,$$

т.е. выгодно быть лидером. Далее,

$$F\left(x^F, y^F\right) = F\left(x^N, y^N\right) + \frac{b^2 q^2}{2|c|(ac - b^2)} = F\left(x^1, y^1\right) - \frac{q^2}{|c|},$$

$$G\left(x^G, y^G\right) = G\left(x^N, y^N\right) + \frac{b^2 p^2}{2|a|(ac - b^2)} = G\left(x^2, y^2\right) - \frac{p^2}{|a|},$$

т.е. значение функции выигрыша лидера строго больше, чем в точке равновесия по Нэшу (при $b \neq 0$), и строго меньше глобального максимума. При этом для ведомого имеет место $F\left(x^G, y^G\right) \geq F\left(x^N, y^N\right)$, при $2|a|bpq \geq b^2 p^2$, $G\left(x^F, y^F\right) \geq G\left(x^N, y^N\right)$, при $2|c|bpq \geq b^2 q^2$. Кроме того,

$$F\left(x^F, y^F\right) + G\left(x^F, y^F\right) = F\left(x^G, y^G\right) + G\left(x^G, y^G\right) = \frac{bpq}{ac - b^2},$$

т.е. «общественное благо» в равновесии Штакельберга может быть как больше, так и меньше, чем в равновесии по Нэшу.

3. Обобщение понятия равновесия Штакельберга на игру n лиц и его свойства

Обобщим рассмотренную модель для игры с произвольным числом игроков n. Будем считать стратегии игроков скалярными величинами. Стратегию k-го игрока обозначим x_k. Целевые функции игроков имеют вид

$$F_k\left(x\right) = \frac{1}{2}\left\langle x, Ax\right\rangle + p_k x_k,\ \ k = 1, \ldots, n,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, A – симметрическая отрицательно определенная матрица.

Пусть игроки выбирают свои стратегии последовательно в порядке нумерации и k-й игрок к моменту своего хода знает выборы стратегий игроками с номерами $1, \ldots, k-1$, а также последовательность, в которой игроки с номерами $k+1,\dots,n$ будут делать свои ходы. Предполагается также, что все игроки при выборе стратегии руководствуются общим принципом поведения: максимизировать свою функцию выигрыша с учетом соответствующей реакции игроков следующих уровней.

Теорема 3.1. *Оптимальной стратегией k-го игрока в игре с последовательностью ходов является выбор контролируемой переменной x_k точки максимума его функции выигрыша $F_k(x)$ по оставшимся свободными к моменту его хода аргументам $k,\dots,n$ и известных фиксированных значениях аргументов $x_1,\dots,x_{k-1}$.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции по числу игроков. Для $n = 1$ утверждение теоремы означает простую оптимизацию, а для $n = 2$ было доказано выше. Предположим, что теорема справедлива для числа игроков $n-1$ и докажем для n. Если первый игрок выбрал стратегию x_1, то остается игра $n-1$ лица, в которой по индуктивному предположению игроки выбирают свои стратегии $x_2^0, x_3^0,\dots,x_n^0$ из условий максимума своей функции выигрыша по свободным аргументам, т.е. они удовлетворяют следующим системам линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^{(2)} + \dots + a_{2n}x_n^{(2)} + p_2 = 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2^0 + a_{i3}x_3^{(2)} + \dots + a_{in}x_n^{(2)} = 0, \quad i = 3,\dots,n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31}x_1 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0 + a_{34}x_4^{(3)} + \dots + a_{3n}x_n^{(3)} + p_3 = 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2^0 + a_{i3}x_3^0 + a_{i4}x_4^{(3)} + \dots + a_{in}x_n^{(3)} = 0, \quad i = 4,\dots,n. \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{cases} a_{n-1\ 1}x_1 + a_{n-1\ 2}x_2^0 + \dots + a_{n-1\ n-1}\ x_{n-1}^0 + a_{n-1\ n}\ x_n^{(n-1)} + p_{n-1} = 0, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2^0 + \dots + a_{n\ n-1}x_{n-1}^0 + a_{nn}x_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2^0 + \dots + a_{nn}x_n^0 + p_n = 0.$$

Так как матрица A отрицательно определена, то определители этих систем, которые являются угловыми минорами матрицы A, отличны от нуля. Поэтому стратегии $x_2^0, x_3^0,\dots,x_n^0$ являются в конечном счете однозначными функциями аргумента x_1.

Вычислим производные этих функций. Из первой системы имеем $\frac{dx_2^0(x_1)}{dx_1} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $|A|$. Предположим, что

$$\frac{dx_i^0(x_1)}{dx_1} = \frac{A_{1i}}{A_{11}},\ i = 2, 3, \ldots, k.$$

Обозначим через M_k минор матрицы A, получающийся вычеркиванием первых k строк и первых k столбцов, а через $\tilde{M}_k$ – определитель, получающийся из минора M_k заменой каждого элемента первого его столбца $a_{i\ k+1}$ на выражение

$$a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{ik}A_{1k},\ i = k+1, \ldots, n.$$

Тогда из $(k+1)$-й системы имеем

$$\frac{dx_{k+1}^0(x_1)}{dx_1} = -\frac{1}{A_{11}} \cdot \frac{\tilde{M}_k}{M_k}.$$

Используя известное свойство определителей, имеем для $i = k + 1, \ldots, n$ равенства

$$a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{ik}A_{1k} = -(a_{i\ k+1}A_{1\ k+1} + a_{i\ k+2}A_{1\ k+2} + \cdots + a_{in}A_{1n}).$$

Подставим правые части этих равенств в $\tilde{M}_k$. Учитывая, что определители с пропорциональными столбцами равны нулю, имеем

$$\tilde{M}_k = -A_{1\ k+1}\ M_k, \qquad \frac{dx_{k+1}^0(x_1)}{dx_1} = \frac{A_{1\ k+1}}{A_{11}}.$$

Таким образом, мы доказали по индукции, что

$$\frac{dx_i^0(x_1)}{dx_1} = \frac{A_{1i}}{A_{11}},\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Первый игрок выбирает свою стратегию x_1 так, чтобы достичь максимума функции

$$f(x_1) = F_1\left(x_1, x_2^0(x_1), \ldots, x_n^0(x_1)\right).$$

Вычислим полную производную $f(x_1)$:

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = \frac{\partial F_1(x_1, x_2^0(x_1), \ldots, x_n^0(x_1))}{\partial x_1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial F_1\left(x_1,x_2^0\left(x_1\right),\ldots,x_n^0\left(x_1\right)\right)}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i^0\left(x_1\right)}{dx_1}=$$

$$=a_{11}x_1+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}x_i^0\left(x_1\right)+p_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{A_{1i}}{A_{11}}(a_{1i}x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{ji}x_j^0\left(x_1\right))=$$

$$=\frac{1}{A_{11}}\cdot\left[x_1\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}+p_1A_{11}+\sum_{j=2}^{n}\left(x_j^0\left(x_1\right)\sum_{i=1}^{n}a_{ji}A_{1i}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{A_{11}}\cdot\left(x_1\left|A\right|+p_1A_{11}\right).$$

Приравнивая эту производную к нулю, имеем $x_1=-\frac{p_1A_{11}}{|A|}$.

Так как необходимым и достаточным условием отрицательной определенности матрицы является чередование знаков ее главных миноров, то $\frac{d^2f(x_1)}{dx_1^2}=\frac{|A|}{A_{11}}<0$, т. е. $f\left(x_1\right)$ – строго вогнутая квадратичная функция.

Значит, $f\left(x_1\right)$ достигает своего глобального максимума в точке $x_1^0=-\frac{p_1A_{11}}{|A|}$, т.е. x_1^0 — оптимальная стратегия первого игрока. Нетрудно убедится, что x_1^0 удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^{(1)}+a_{13}x_3^{(1)}+\cdots+a_{1n}x_n^{(1)}+p_1=0, \\ a_{i1}x_1^0+a_{i2}x_2^{(1)}+a_{i3}x_3^{(1)}+\cdots+a_{in}x_n^{(1)}=0, \quad i=2,\ldots,n, \end{cases}$$

т.е. x_1^0 первая координата точки глобального максимума функции $F_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, что и требовалось доказать. □

Равновесие по Нэшу в данной игре n лиц также существует, единственно и определяется из системы линейных уравнений $Ax=-p$, где $p=(p_1,\ldots,p_n)$.

Естественно, нахождение равновесия по Нэшу требует знания всеми игроками параметров платежных функций других игроков.

4. Заключение

На наш взгляд, предложенная игровая модель с линейно-квадратичными платежными функциями несмотря на ее конкретный вид может рассматриваться как содержательное описание задачи обеспечения общественных благ. В первую очередь это могут быть проблемы экологии, такие как загрязнение общих водоемов, выбросы вредных веществ в регионе, истощение ресурсов общего пользования и т. п. В качестве решения могут рассматриваться как равновесие по Нэшу, так и по Штакельбергу. На первый взгляд равновесие по Нэшу более естественно и проще реализуемо, однако оно требует общего знания всех параметров модели и не защищено от блефа. Замечательным свойством рассмотренной модели является то, что равновесие по Штакельбергу от блефа защищено, так как при определении оптимальной стратегии каждым игроком ему не требуется знания индивидуальных параметров платежных функций игроков, делающих свой выбор после него.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н. *Основы математической теории активных систем.* М.: Наука, 1977.

2. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. *Механизмы функционирования организационных систем.* М.: Наука, 1981.

3. Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* М.: Наука, 1976.

4. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио и связь. 1991.

5. Горелик В.А., Золотова Т.В. *Механизмы управления платежами, лимитами и штрафами в иерархических региональных моделях охраны окружающей среды* // Управление большими системами: сборник трудов. 2015. № 55. С. 119–139.

6. Моисеев Н.Н.*Математические задачи системного анализа.* М.: Наука, 1981.

7. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами.* М.: МПСИ, 2005.

8. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Динамические модели согласования частных и общественных интересов при экономической коррупции* // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 1. С. 44–53.

9. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Динамические модели согласования частных и общественных интересов при продвижении инноваций* // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11. № 1. С. 96–114.

10. Baliga S., Maskin E. *Mechanism design for the environment* // In: Handbook of Environmental Economics. Amsterdam: Elsevier. 2003. V. 1. P. 305–324.

11. Dixit A.K., Nalebuff B.J. *The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life*. New York: W.W. Norton Company, 2010.

12. Fehr E., Gachter S. *Cooperation and punishment in public goods experiments* // Amer. Econ. Rev. 2000. V. 90. N. 4. P. 980–994.

13. Gorelik V.A., Zolotova T.V. *Models of hierarchial control in ecological-economic systems* // Journal of Mathematical Sciences. 2016. V. 216. N. 5. P. 612–626.

14. Hardin G. *The tragedy of the commons* // Science. 1968. V. 162. N. 3859. P 1243–1248.

15. Hauert C., Holmes M., Doebeli M. *Evolutionary games and population dynamics: maintenance of cooperation in public goods games* // In: Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci. 2006. V. 273. N. 1600. P. 2565–2571.

16. Hart O. *Incomplete Contracts and Control* // American Economic Review. 2017. V. 107. N. 7. P. 1731–1752.

17. Hart O., Zingales L. *Liquidity and Inefficient Investment* // Journal of the European Economic Association. 2015. V. 13. N.5. P.737–769.

18. Holmstrom B., Milgrom P. *Multitask principal–agent analyses: Incentive contracts, asset ownership, and job design* // The Economic Nature of the Firm. Cambridge University Press. 2009. P. 232–244.

19. Ostrom E. *Governing the Commons. Cambridge*: Cambridge University Press, 1990.

20. Sefton M., Shupp R., Walker J.M. *The effect of rewards and sanctions in provision of Public Good* // Econ. Inquiry. 2007. V. 45. N. 4. P. 671–690.

21. Stackelberg H. Von. *Market Structure and Equilibrium.* Berlin: Springer, 2011.

22. Stackleberg H. Von. *The Theory of the Market Economy.* London: William Hodge, 1952.

HIERARCHICAL GAMES WITH ADDITIVE PAYOFF FUNCTIONS COMBINING PUBLIC AND PRIVATE INTERESTS

Victor A. Gorelik, FRC CSC RAS, Dr.Sc., professor (vgor16@mail.ru).
Tatiana V. Zolotova, Financial University under the Government of the Russian Federation, Dr.Sc., professor (tgold11@mail.ru).

Abstract: The paper proposes a game-theoretic model with linear-quadratic payoff functions, which are additive convolutions of two criteria describing public and personal interests. This game has good properties, in particular, the independence of the leader's strategy in the Stackelberg equilibrium from the parameters of the follower's function. This property means that the leader does not need information about the follower's objective function, which in reality is difficult to obtain, and his strategy has the property of robustness.

Keywords: hierarchical game, Stackelberg equilibrium, Nash equilibrium, public goods, linear-quadratic payoff function.