Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.4, с. 18–41

УДК 517.917
ББК 22.1

ГИБРИДНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТРЕМЯ УЧАСТНИКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ АЛЬТРУИСТИЧЕСКОГО И АГРЕССИВНОГО ТИПОВ ПОВЕДЕНИЯ

Анатолий Ф. Клейменов
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, С. Ковалевской, 16
kleimenov@imm.uran.ru

Настоящая статья примыкает к статье [5], в которой рассматривалась двухшаговая гибридная задача динамического управления с тремя участниками; было показано, что в ряде случаев первоначальному владельцу ресурсов управления выгодно по ходу процесса продать часть ресурсов другому (-им) участнику(-ам) (при предположении трансферабельности выигрышей). Она также примыкает к статье [4], в которой для дифференциальной игры трех лиц допускалось использование игроками агрессивного и альтруистического типов поведения; тогда игроки могут использовать так называемые BT-решения, которые по определению лучше, чем нэшевские решения. Развиваемый в статье подход иллюстрируется на примере двухшаговой задачи управления на плоскости с динамикой простых движений при наличии фазовых ограничений.

Ключевые слова: гибридная задача управления, неантагонистическая дифференциальная игра двух и трех лиц, альтруистический и агрессивный типы поведения, нэшевские решения, BT-решения.

Поступила в редакцию: 30.08.21 *После доработки*: 11.10.21 *Принята к публикации*: 10.12.21

1. Постановка задачи

Рассматривается гибридная задача динамического управления, в которой гибридность понимается в следующем смысле: на разных временных промежутках управления решения принимаются, вообще говоря, разными коалициями, составленными из заданного множества участников (см., например, [13, 9]).

Рассматриваемая задача примыкает к статье [5], в которой ставилась двухшаговая гибридная задача динамического управления с тремя участниками; было показано, что в ряде случаях первоначальному владельцу ресурсов управления выгодно по ходу процесса продать часть ресурсов другому(-им) участнику(-ам) (при предположении трансферабельности выигрышей). Она также примыкает к статье [4], в которой для дифференциальной игры трех лиц допускалось использование игроками агрессивного и альтруистического типов поведения; тогда игроки могут использовать так называемые BT-решения, которые по определению лучше, чем нэшевские решения.

Более конкретно, будем исследовать двухшаговую управляемую систему, динамика которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями в пространстве R^n на заданном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$.

Число участников управляемого процесса (игроков) равно трем (первый игрок $P1$, второй игрок $P2$ и третий игрок $P3$).

Предполагаем, что игрок $P1$ располагает ресурсом управления $u,\ u(t) \in P^0 \subset R^p$ и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_1, что игрок $P2$ располагает ресурсом управления $v,\ v(t) \in Q^0 \subset R^q$ и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_2, и, наконец, что игрок $P3$ располагает ресурсом управления $w,\ w(t) \in S^0 \subset R^s$ и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_3.

Игроки действуют в классе позиционных стратегий [6,7,1]; движения, порожденные этими стратегиями, определены там же.

На первом шаге (этапе) процесса от начального момента t_0 до заданного момента $T,\ t_0 < T < \vartheta$ правая часть уравнений движения содержит управляющее воздействие только игрока $P1$, который решает следующую задачу оптимального управления Γ^0 с терминальным функционалом выигрыша $I_1 = \sigma_1(x(T))$:

$$\dot{x} = f^{[0]}(t,x,u),\ \ x \in R^n,\ u \in P^0 \subset R^p,\ t_0 \le t \le T,\ x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Решение задачи оптимального управления Γ^0 (1.1) обозначим через $u = u^{(0)}(t)$; оно порождает траекторию $x = x^{(0)}(t),\ t_0 \le t \le T$.

В начале второго шага (этапа), то есть в заданный момент времени T, игрок $P1$ должен решить, кто из остальных игроков также будет участвовать в управляемом процессе на оставшемся промежутке времени $[T,\vartheta]$. Предполагаем, что выигрыши игроков являются трансферабельными [8] и что за участие в управляемом процессе на отрезке $[T,\vartheta]$ вновь вошедшие игроки выплачивают игроку $P1$ платеж в размере $L > 0$ единиц.

Всего у игрока $P1$ имеется 4 варианта выбора:
1.) никто из игроков $P2$, $P3$ не участвует;
2.) участвует игрок $P2$;
3.) участвует игрок $P3$;
4.) участвуют оба игрока $P2$ и $P3$.

Если игрок $P1$ выбрал вариант 1.), то есть если никто из игроков $P2$, $P3$ не будет участвовать в процессе, то на отрезке $[T,\vartheta]$ игрок $P1$ продолжает решать задачу оптимального управления Γ^1:

$$\dot{x} = f^{[0]}(t,x,u),\ \ u \in P^0,\ T \le t \le \vartheta,\ x(T) = x^{(0)}(T),\ I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)). \quad (1.2)$$

Выигрыш игрока $P1$, получаемый в конечной точке $x^{(1)}(\vartheta)$ оптимальной траектории $x^{(1)}(\cdot)$ в задаче $\Gamma^1(1.2)$, обозначим через $I_1^{(1)}$.

Если игрок $P1$ выбрал вариант 2.), то игроки $P1$ и $P2$ на отрезке $[T,\vartheta]$ разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц Γ^{12}:

$$\dot{x} = f^{[1]}(t,x,u,v),\ \ u \in P,\ v \in Q^0,\ T \le t \le \vartheta,\ x(T) = x^{(0)}(T), \quad (1.3)$$

$$I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), I_2 = \sigma_2(x(\vartheta)),$$

причем в этой игре игрок $P1$ распоряжается выбором управления u уже из другого множества $u \in P$, а игрок $P2$ распоряжается выбором управления $v \in Q^0$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается таким, что два множества – вектограмма уравнений динамики дифференциальной игры Γ^{12} (где $u \in P,\ v \in Q^0$) и вектограмма уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (где $u \in P^0$) – совпадают.

В игре Γ^{12} (как и в последующих играх Γ^{13} и Γ^{123}), предполагаем, что все игроки наряду с нормальным (nor) типом поведения могут использовать также альтруистический (alt) и агрессивный (agg) типы поведения.

В качестве решения игры Γ^{12}(1.3) принимается одно из $P(NE)$-решений [1] (если игроки используют только нормальный тип поведения) или одно из $P(BT)$-решений [3] (если игроки используют анормальные типы поведения). (Определения $P(NE)$-решений и $P(BT)$-решений см. ниже в разделах 2,3). Обозначим значения выигрышей игроков на траектории $x^{(2)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$-решением (или $P(BT)$-решением), через $I_1^{(2)}$ для игрока $P1$, и через $I_2^{(2)}$ для игрока $P2$.

Аналогично, если игрок $P1$ выбрал вариант 3.), то игроки $P1$ и $P3$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц Γ^{13}:

$$\dot{x} = f^{[2]}(t, x, u, w),\ \ u \in P,\ w \in S^0,\ T \leq t \leq \vartheta,\ x(T) = x^{(0)}(T), \quad (1.4)$$

$$I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), I_3 = \sigma_3(x(\vartheta)).$$

При этом множество $P \subset P^0$ выбирается таким, что два множества – вектограмма уравнений динамики дифференциальной игры Γ^{13} (где $u \in P,\ w \in S^0$) и вектограмма уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (где $u \in P^0$) – совпадают. Значения выигрышей игроков на траектории $x^{(3)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$-решением (или $P(BT)$-решением) игры Γ^{13} (1.4), обозначим через $I_1^{(3)}$ для игрока $P1$, и через $I_3^{(3)}$ для игрока $P3$.

При выборе игроком $P1$ вариантов 2.)-4.) дополнительно полагаем, что игрок $P1$ знает значения функционалов выигрышей игроков $P2$ и $P3$ на траектории $x^{(1)}(\cdot)$.

Предположение 1. Игрок $P1$ решает, что игрок Pi, $i \in \{2, 3\}$ участвует в управляемом процессе на промежутке времени $[T, \vartheta]$, если имеют место неравенства

$$I_1^{(i)} + L > I_1^{(0)}, \tag{1.5}$$

$$I_i^{(i)} - L > I_i^{(0)}, \tag{1.6}$$

где $I_i^{(0)}$ – значение функционала I_i в точке $x^{(1)}(\vartheta)$.

Неравенство (1.5) означает, что при участии игрока Pi в управляемом процессе игрок $P1$ получает выигрыш (с учетом полученного платежа в размере L), больший, чем если это участие не состоится. Неравенство (1.6) означает, что игроку Pi тоже выгодно участвовать в управляемом процессе, даже заплатив за участие игроку $P1$ платеж в размере L.

Итак, определены задачи оптимального управления Γ^0 (1.1) и Γ^1 (1.2) и неантагонистические позиционные дифференциальные игры двух лиц Γ^{12} (1.3) и Γ^{13} (1.4). Предполагаем, что функции $f^{[0]}(\cdot, \cdot, \cdot)$ (1.1),(1.2), $f^{[1]}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ (1.3), $f^{[2]}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$(1.4) непрерывны по совокупности переменных, липшицевы по x, удовлетворяют условию подлинейного роста по x, а также условию седловой точки в маленькой игре [6,7], а функции $\sigma_i(\cdot)$, задающие терминальные выигрыши игроков, непрерывны.

Задача 1.i, $i \in \{2, 3\}$. Найти $P(BT)$-решение игры Γ^{1i} (1.3),(1.4) и число $L > 0$ такие, что для порожденной этим решением траектории выполняются неравенства (1.5) и (1.6).

В общем случае Задачи 1.i решений не имеют.

Наконец, если игрок $P1$ выбрал вариант 4.), то игроки $P1$, $P2$ и $P3$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывают следующую неантагонистическую позиционную дифференциальную игру трех лиц Γ^{123}:

$$\begin{gathered}\dot{x} = f^{[3]}(t, x, u, v, w), \;\; u \in P,\; v \in Q \subset Q^0,\; w \in S \subset S^0,\; T \le t \le \vartheta, \\ x(T) = x^{(0)}(T),\; I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)),\; I_2 = \sigma_2(x(\vartheta)),\; I_3 = \sigma_3(x(\vartheta)),\end{gathered} \tag{1.7}$$

причем в игре Γ^{123} игрок $P1$ распоряжается выбором управления из множества $u \in P$, игрок $P2$ распоряжается выбором управления

$v \in Q$, а игрок $P3$ распоряжается выбором управления $w \in S$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается так, что два множества – векторограмма уравнений динамики дифференциальной игры Γ^{123} (где $u \in P,\ v \in Q,\ w \in S$) и векторограмма уравнений динамики задачи оптимального управления Γ^1 (где $u \in P^0$) – совпадают.

В игре Γ^{123} (1.7) игроки выбирают одно из $P(BT)$-решений игры; выигрыши игроков, получаемые в конечной точке $x^{(4)}(\vartheta)$ траектории $x^{(4)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(BT)$-решением, обозначим через $I_1^{(4)}$ для игрока $P1$, через $I_2^{(4)}$ для игрока $P2$, и через $I_3^{(4)}$ для игрока $P3$.

Предположение 2. Игрок $P1$ решает, что игроки $P2$ и $P3$ участвуют в управляемом процессе на промежутке времени $[T, \vartheta]$, если имеют место следующие неравенства

$$I_1^{(4)} + L > I_1^{(0)}, \tag{1.8}$$

$$I_2^{(4)} + I_3^{(4)} - L > I_2^{(0)} + I_3^{(0)} \tag{1.9}$$

Предполагается, что функция $f^{[3]}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ (1.7) непрерывна по совокупности переменных, липшицева по x, удовлетворяют условию подлинейного роста по x, а также условию седловой точки в соответствующих маленьких играх [6,7].

Задача 2. Найти $P(BT)$-решение игры трех лиц Γ^{123} (1.7) и число $L > 0$ такие, что для порожденной этим решением траектории выполняются неравенства (1.8) и (1.9).

В общем случае Задача 2 также решений не имеет.

Замечание 1. Можно дать следующую интерпретацию действий игроков на втором шаге (см. также работу [13]). Игрок $P1$ продает часть своих активов за цену L либо игроку $P2$ (вариант 2.), либо игроку $P3$ (вариант 3.), либо игрокам $P2$ и $P3$ (вариант 4.)), если такая продажа является взаимовыгодной (оба неравенства хотя бы в одной из систем (1.5), (1.6), или в системе (1.8), (1.9) выполнены). Если продажа невыгодна (по крайней одно из неравенств как в системе (1.5), (1.6), так и в системе (1.8), (1.9) не выполнено), то она не состоится (вариант 1.).

2. Позиционные стратегии в дифференциальной игре трех лиц. NE- и $P(NE)$- решения

Динамика игры описывается уравнением (1.7), где игроки $P1$, $P2$ и $P3$ распоряжаются выбором управлений u, v и w, соответственно. Всем игрокам доступна информация о текущей позиции игры $\{t, x(t)\}$. Используемая здесь формализация позиционных стратегий и порождаемых ими движений аналогична формализации, введенной в [6,7], за исключением технических деталей [1].

Позиционные стратегия игроков $P1$, $P2$ и $P3$ отождествляются, соответственно, с парами $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$ и $W = \{w(t, x, \varepsilon), \beta_3(\varepsilon)\}$. Здесь в каждой паре первая компонента является произвольной функцией позиции (t, x) и положительного параметра точности ε и принимает значения в соответствующем ограниченном множестве. Функция $\beta_i : (0, \infty) \to (0, \infty)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет условию $\beta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для фиксированного ε величина $\beta_i(\varepsilon)$ является верхней границей шага разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, которое игрок Pi применяет при формировании пошаговых движений.

Движения, порожденные тройкой (U, V, W) из начальной позиции (t_0, x_0), рассматриваются двух типов: аппроксимационные (пошаговые) движения и идеальные (предельные) движения.

Пошаговое движение $x^{\varepsilon}_{\Delta}[t] = x\left[t, t_0, x_0, U, \varepsilon_1, \Delta_1, V, \varepsilon_2, \Delta_2, W, \varepsilon_3, \Delta_3\right]$ определяется для фиксированных значений параметров точности ε_1, ε_2 и ε_3, для фиксированных разбиений отрезка $[t_0, \vartheta]$: $\Delta_1 = \{t^{(1)}_i\}$, $\Delta_2 = \{t^{(2)}_k\}$ и $\Delta_3 = \{t^{(3)}_l\}$, выбранных игроками и удовлетворяющих условиям $\delta(\Delta_i) \le \beta_i(\varepsilon_i),\ i = 1, 2, 3$, где $\delta(\Delta_i) = \max\limits_j (t^{(i)}_{j+1} - t^{(i)}_j)$.

Предельное движение $x(t) = x(t, t_0, x_0, U, V, W)$, определятся как равномерный предел последовательности аппроксимационных движений

$$\{x^{\varepsilon^s}_{\Delta^s}\left[t, t^s_0, x^s_0, U, \varepsilon^s_1, \Delta^s_1, V, \varepsilon^s_2, \Delta^s_2, W, \varepsilon^s_3, \Delta^s_3\right]\}$$

где $s \to \infty,\ \varepsilon^s_i \to 0,\ t^s_0 \to t_0,\ x^s_0 \to x_0,\ \ \delta(\Delta^s_i) \le \beta_i(\varepsilon^s_i),\ i = 1, 2, 3.$

Законы управления $(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$, $(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$ и $(W, \varepsilon_3, \Delta_3)$ назовем согласованными по параметру точности, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Согласованные законы управления порождают согласованные аппроксимационные движения, последовательности которых порождают согласованные предельные движения. Множество предельных движений $X(t_0, x_0, U, V, W)$ есть компакт в пространстве $C[t_0, \vartheta]$.

Определение 1. *Тройка стратегий (U^N, V^N, W^N) образует нэшевское решение (NE -решение) игры, если для любого движения $\overline{x}(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^N, V^N, W^N)$, любого $\tau \in [t_0, \vartheta]$, любых стратегий U, V и W выполнены следующие неравенства:*

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U, V^N, W^N)) \leq \min_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V, W^N)) \leq \min_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)), \tag{2.1}$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_3(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W)) \leq \min_{x(\cdot)} \sigma_3(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

причем операции min *производятся на множествах согласованных движений, а операции* max *– на соответствующих множествах всех движений.*

Определение 2. *NE-решение (U^P, V^P, W^P), неулучшаемое по Парето относительно величин I_1, I_2, I_3, называется $P(NE)$- решением игры.*

В дальнейшем понадобятся следующие вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры

$$\Gamma_1^{12}, \quad \Gamma_2^{12}, \quad \Gamma_1^{13}, \quad \Gamma_3^{13}, \quad \Gamma_1^{123}, \quad \Gamma_2^{123}, \quad \Gamma_3^{123}. \tag{2.2}$$

Динамика игр Γ_1^{12} и Γ_2^{12} описывается уравнением (1.3). В игре Γ_i^{12}, $i = 1, 2$, игрок Pi максимизирует свой функционал I_i, а игрок $P(3-i)$ противодействует ему.

Аналогично, динамика игр Γ_1^{13} и Γ_3^{13} описывается уравнением (1.4). В игре Γ_i^{13}, $i = 1, 3$ игрок Pi максимизирует свой функционал I_i, а игрок $P(4-i)$ противодействует ему.

Наконец, динамика игр Γ_k^{123} описывается уравнением (1.7). В играх Γ_k^{123}, $k = 1, 2, 3$ игрок Pk максимизирует функционал I_k, а два другие игрока совместно противодействует ему.

Из [6,7] следует, что при сделанных предположениях на правые части уравнений движений, а на функционалы игроков каждая из семи выше перечисленных антагонистических игр имеет универсальную седловую точку и непрерывную функцию цены

$$\gamma_i^{12}(t,x), \gamma_j^{13}(t,x), \gamma_k^{123}(t,x),\ i=1,2,\ j=1,3,\ k=1,2,3. \qquad (2.3)$$

Свойство универсальности стратегий означает, что они являются оптимальными не только для фиксированной начальной позиции (t_0, x_0), но и для любой позиции (t_*, x_*), рассматриваемой в качестве начальной. Нетрудно видеть, что величина $\gamma_i(t,x)$ представляет собою гарантированный выигрыш игрока Pi в позиции (t,x) игры.

Для каждой NE- и $P(NE)$- траектории $x^*(t)$ имеет место следующее свойство [1]:

Свойство A. Точка $t=\vartheta$ является точкой максимума функции гарантированного выигрыша игрока i, вычисленной вдоль этой траектории, то есть

$$\max_{t\in[t_0,\vartheta]} \gamma_i(t, x^*(t)) = \gamma_i(\vartheta, x^*(\vartheta)),\ i=1,2,3. \qquad (2.4)$$

Итак, в вариантах 2.)-4.) имеем две дифференциальные игры двух лиц Γ^{12} и Γ^{13} и одну дифференциальную игру трех лиц Γ^{123}.
$P(NE)$-решения в играх двух лиц введены в [1],с.28-29, где они обозначались как P^*-решения. Там же описана структура NE- решений и $P(NE)$-решений. Обобщение понятия $P(NE)$- решения на игру трех лиц приведено в [4].

Как уже упоминалось, все игроки в дифференциальной игре двух или трех лиц могут использовать наряду с нормальным типом (nor) также альтруистический (alt) и агрессивный (agg) типы поведения.

3. Типы поведения. Индикаторные функции. BT- и $P(BT)$-решения

В работах [2,10,12] для игры двух лиц предполагалось, что помимо обычного, *нормального* (nor) типа поведения, ориентированного на максимизацию собственных функционалов выигрыша, игроки могут использовать другие типы поведения, а именно, следующие типы: *альтруистический* и *агрессивный.*

Напомним определения альтруистического и агрессивного типов поведения, а также определение BT -решения для игры трех лиц [4].

Определение 3. *Скажем, что игрок Pi, $i \in \{1, 2, 3\}$ придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ альтруистического типа поведения по отношению к игроку Pj, $j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i$ (обозначаем этот тип через $alt(j)$), если на этом отрезке действия игрока Pi направлены на максимизацию функционала выигрыша I_j игрока Pj.*

Определение 4. *Скажем, что игрок Pi, $i \in \{1, 2, 3\}$ придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ агрессивного типа поведения по отношению к игроку Pj, $j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i$ (обозначаем этот тип через $agg(j)$), если на этом отрезке действия игрока i направлены на минимизацию функционала выигрыша I_j игрока Pj.*

Таким образом, игрок Pi в каждой позиции игры делает выбор из 5 возможных типов поведения: nor, $alt(j_1)$, $alt(j_2)$, $agg(j_1)$, $agg(j_2)$, где $j_1 \neq i, j_2 \neq i$.

Заметим, что агрессивный тип поведения игроков фактически используется в играх как двух, так и трех лиц в форме стратегий наказания, содержащихся в структуре решений игры (см., например, [1]).

Приведенные определения характеризуют экстремальные типы поведения игроков. В действительности же реальные индивидуумы ведут себя, как правило, частично нормально, частично альтруистично и частично агрессивно. Другими словами, смешанные типы поведения, по-видимому, больше согласуются с реальностью.

Если каждого игрока ограничить *чистыми* типами поведения, то в рассматриваемой игре трех лиц с динамикой (1.7) и с функционалами I_1, I_2 и I_3 существует 125 возможных троек типов поведения. При этом в некоторых тройках интересы игроков совпадают и игроки решают командные задачи управления. В некоторых тройках игроки (коалиции игроков) имеют противоположные интересы и, следовательно, разыгрываются антагонистические дифференциальные игры. Оставшиеся тройки определяют неантагонистические дифференциальные игры двух игроков (коалиций игроков) и трех игроков.

Идея использования игроками возможности переключения по ходу игры своего поведения с одного типа на другой была применена для игры с кооперативной динамикой в работе [10] и для повторяющейся биматричной 2×2 игры в работе [11], что позволило получить новые решения в этих играх.

Распространение указанного подхода на неантагонистические позиционные дифференциальные игры трех лиц приводит к новым постановкам задач. В частности, представляет интерес, как трансформируются выигрыши игроков, получаемые на нэшевских решениях. Актуальной становится задача минимизации времени «анормального» поведения при условии достижения результата, более хорошего, чем при нормальном поведении игроков. Итак, игроки могут по ходу игры переключаться с одного типа поведения на другой.

Далее будем полагать, что одновременно с выбором позиционной стратегии игрок Pi, $i = 1, 2, 3$ выбирает также индикаторную функцию, определенную на отрезке $[t_0, \vartheta]$ и принимающую значение в множестве $\Omega(i) = \{nor, alt(j_1), alt(j_2), agg(j_1), agg(j_2)\}$, где $j_1 \neq i, j_2 \neq i$. Обозначим индикаторную функцию игрока i символом $\alpha_i : [t_0, \vartheta] \to \Omega(i)$, $i = 1, 2, 3$. Если индикаторная функция какого-то игрока принимает значение, скажем, $alt(j_1)$ на некотором отрезке времени, то этот игрок действует на этом отрезке как альтруист по отношению к игроку j_1 . Заметим также, что если индикаторные функции всех трех игроков тождественно равны значению nor на всем промежутке игры, то имеем классическую игру трех лиц.

Таким образом, в рассматриваемой игре с различными типами поведения игроков игрок $P1$ управляет выбором пары *действий* {позиционная стратегия, индикаторная функция}: $(U,\ \alpha_1(\cdot))$, игрок $P2$ управляет выбором пары действий $(V,\ \alpha_2(\cdot))$, а игрок $P3$ управляет выбором пары действий $(W,\ \alpha_3(\cdot))$.

Как упоминалось выше, при выборе игроками различных типов поведения могут сложиться четыре вида задач принятия решений: задача командного управления, антагонистическая игра, неантагонистическая игра двух или трех лиц. Будем считать, что игроки в каждой из четырех указанных ситуаций руководствуются следующим правилом.

Правило 1. Если на промежутке $(\tau_1, \tau_2) \subset [t_0, \vartheta]$ индикаторные функции игроков сгенерировали неантагонистическую игру двух или трех лиц, то на этом промежутке игроки выбирают одно из $P(BT)$-решений сложившейся игры. Если сложилась антагонистическая игра, то в качестве решения игроки реализуют седловую точку игры. Наконец, если сложилась задача командного управления, то игроки выбирают одну из троек управлений, обеспечивающих неубывание вдоль траектории функции цены γ_i, где i - номер игрока, функционал которого максимизируется.

Вообще говоря, одна и та же часть траектории может быть отслежена несколькими тройками типов поведения игроков, причем эти тройки могут отличаться друг от друга суммарным временем использования *анормальных* типов. Естественно ввести следующее правило.

Правило 2. При наличии нескольких троек типов поведения, отслеживающих некоторую часть траектории, игроки выбирают ту из них, которая минимизирует суммарное время использования анормальных типов поведения.

Введем теперь определение понятия BT-решения игры. Отметим, что множество движений, порожденных тройкой действий $\{(U, \alpha_1(\cdot)), (V, \alpha_2(\cdot)), (W,\ \alpha_3(\cdot))\}$, совпадает с множеством движений, порожденных тройкой (U, V, W) в соответствующей игре с нормальными типами поведения.

Определение 5. *Тройка действий* $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot)), (W^0,\ \alpha_3^0(\cdot))\}$, *согласованная с Правилом 1, образует* BT*-решение игры, если найдется порожденная тройкой траектория* $x^{BT}(\cdot)$ *и найдется* $P(NE)$*-решение в игре с нормальными типами поведения, порождающее траекторию* $x^P(\cdot)$*, такие, что выполнены неравенства*

$$\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) \geq \sigma_i(x^P(\vartheta)), \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

причем по крайней мере одно из неравенств строгое.

Определение 6. BT*-решение* $\{(U^P, \alpha_1^P(\cdot)), (V^P, \alpha_2^P(\cdot)), (W^P,\ \alpha_3^P(\cdot))\}$, *неулучшаемое по Парето относительно величин* I_1, I_2, I_3*, назовем* $P(BT)$*-решением игры.*

В общем случае множество $P(BT)$-решений пусто. Однако вполне ожидаемо, что использование игроками типов поведения, отличных от нормального, может в ряде случаев привести к исходам, более предпочтительным для них, чем в соответствующей игре только с нормальным типом поведения.

В следующем разделе рассмотрим пример управляемого процесса с тремя участниками, в котором, во-первых, $P(BT)$-решения существуют, а во-вторых, существуют решения Задач 1.i и Задачи 2.

4. Двухшаговая задача управления на плоскости с динамикой простых движений

Рассмотрим следующую двухшаговую задачу управления на плоскости с динамикой простых движений и с тремя участниками.

На первом шаге $[t_0, T]$ игрок $P1$ решает задачу оптимального управления Γ^0:

$$\dot{x} = u, \;\; x, u \in R^2, \; \| \, u \, \| \leq 2\mu, \; t_0 \leq t \leq T, \; x(t_0) = x_0, \; I_1 = \sigma_1(x(T)). \tag{4.1}$$

Ее решение обозначим через $u = u^{(0)}(t)$, а траекторию – через $x = x^{(0)}(t)$.

В начале второго шага $[T, \vartheta]$ игрок $P1$ выбирает одну из четырех опций:

1.) задача оптимального управления Γ^1 для игрока $P1$:

$$\dot{x} = u, \;\; \| \, u \, \| \leq 2\mu, \; T \leq t \leq \vartheta, \; x(T) = x^{(0)}(T), \; I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \tag{4.2}$$

2.) неантагонистическая игра двух лиц Γ^{12}:

$$\dot{x} = u + v, \; \| \, u \, \| \leq \mu, \| \, v \, \| \leq \mu, \; T \leq t \leq \vartheta, \; x(T) = x^{(0)}(T), \tag{4.3}$$

$$I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \; I_2 = \sigma_2(x(\vartheta)),$$

3.) неантагонистическая игра двух лиц Γ^{13}:

$$\dot{x} = u + w, \; \| \, u \, \| \leq \mu, \| \, w \, \| \leq \mu, \; T \leq t \leq \vartheta, \; x(T) = x^{(0)}(T), \tag{4.4}$$

$$I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \; I_3 = \sigma_3(x(\vartheta)),$$

4.) неантагонистическая игра трех лиц Γ^{123}:

$$\dot{x} = u + v + w, \; \| \, u \, \| \leq \mu, \; \| \, v \, \| \leq 0.5\mu, \; \| \, w \, \| \leq 0.5\mu, \; T \leq t \leq \vartheta, \tag{4.5}$$

$$x(T) = x^{(0)}(T), \; I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \; I_2 = \sigma_2(x(\vartheta)), \; I_3 = \sigma_3(x(\vartheta)).$$

Очевидно, что вектограммы уравнений динамики дифференциальных игр Γ^{12} (4.3), Γ^{13} (4.4) и Γ^{123} (4.5) совпадают друг с другом, а также с вектограммой уравнений динамики задачи Γ^1 (4.2).

Пусть функционалы выигрыша игроков имеют вид:

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)) = M - \|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \;\; i = 1, 2, 3. \tag{4.6}$$

То есть игрок Pi стремится привести точку $x(\vartheta)$ как можно ближе к целевой точке $a^{(i)}$.

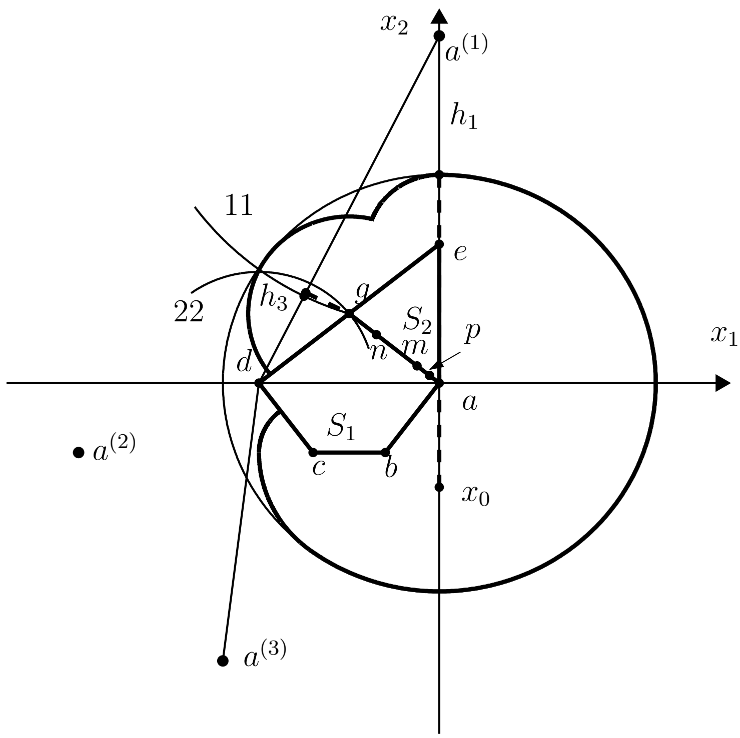

Рисунок 1. Опции 1.), 3.).

Зададим следующие начальные условия и значения параметров: $t_0 = 0, \vartheta = 4.5,\ x_0 = (0, -3),\ T = 1.5,\ \mu = 1,\ a^{(1)} = (0, 10),\ a^{(2)} = (-10, -2),\ a^{(3)} = (-6, -8),\ M = 20$ (рис. 1).

Опишем фазовые ограничения. Траекториям системы запрещается заходить во внутренность множества S, которое получается удалением из пятиугольника $abcde$ отрезка ag. Множество S состоит из двух частей S_1 и S_2, то есть $S = S_1 \cup S_2$. Координаты точек, задающих фазовые ограничения, следующие: $a = (0, 0),\ b = (-1.5, -2)$, $c = (-3.5, -2),\ d = (-5, 0),\ e = (0, 4),\ g = (-2.5, 2)$. Можно проверить, что точка b лежит на отрезке $a^{(3)}a$, а точка g – на отрезке ed.

На первом шаге решение задачи оптимального управления Γ^0 (4.1) для игрока $P1$ на отрезке $[0, 1.5]$ будет $u = u^{(0)}(t) = (0, 2)$; порождаемая траектория будет отрезком x_0a, то есть $x^{(0)}(t) = (0, -3 + 2t)$, $x^{(0)}(1.5) = a$.

На втором шаге имеем задачи (4.2)-(4.5), где $t \in [1.5, 4, 5]$, $x(1.5) = a$. Множество достижимости систем (4.2)-(4.5), построенное для момента $\vartheta = 4.5$, содержит точки, ограниченные четырехзвенником $cbae$ и дугой окружности радиуса 6, а также дугами, соединяющими эту окружность со сторонами cd и de пятиугольника (рис. 1). Первая (составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке b и радиусом $r_1 = 6 - |ab|$ и дуги окружности с центром в точке c и радиусом $r_2 = 6 - |ab| - |bc|$. Вторая (также составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке g и радиусом $r_3 = 6 - |ag|$ и дуги окружности с центром в точке e и радиусом $r_4 = 6 - |ae|$. Кроме того, в множество достижимости входят точки отрезка ag.

Если игрок $P1$ выбрал опцию 1.), то есть никто из игроков $P2$, $P3$ дальше в процессе не участвует, то игрок $P1$ вплоть до момента $\vartheta = 4.5$ решает задачу оптимального управления Γ^1 (4.2). Очевидно, решением задачи Γ^1 на отрезке $[1,5,4.5]$ будет управление $u = u^{(1)}(t) = (0,2)$, порождающее траекторию - отрезок ah_1, то есть $x^{(1)}(t) = (0, -3 + 2t)$, $x^{(1)}(4.5) = h_1$, $h_1 = (0,6)$.
Значения выигрышей игроков в точке h_1 будут $I_1^1 = 16,\ I_2^1 = 7.1,\ I_3^1 = 4.0$.

Если на втором шаге игрок $P1$ выбрал опцию 2.), или опцию 3.), или опцию 4.), то разыгрывается игра двух лиц Γ^{12}, или игра двух лиц Γ^{13}, или игра трех лиц Γ^{123} , соответственно. Необходимо найти $P(NE)$-решения этих игр.

Прежде всего заметим, что функции цены вспомогательных антагонистических игр Γ_i^{12}, $i = 1,2$ (2.11) (см.[1], с. 21) будут

$$\gamma_i\left(t,x\right) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(i)}\|, & \text{если } xa^{(i)} \bigcap intS = \emptyset, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(i)}\right), & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4.7}$$

где через $\rho_S\left(x, a^{(i)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(i)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое – при обходе S протв часовой стрелки.

Похожие формулы имеют место и для функций цены вспомогательных антагонистических игр Γ_j^{13}, $j = 1,3$, и для игры $\Gamma_1^{123}(t,x)$ (2.11).

Далее, функции цены вспомогательных антагонистических игр

Γ_k^{123}, $k = 2, 3$ (2.11) будут

$$\gamma_i\left(t,x\right) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(i)}\| - (\vartheta - t), & \text{если } \ xa^{(i)} \bigcap intS = \emptyset, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(i)}\right) - (\vartheta - t), & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Сначала найдем решение игры в случае отсутствия анормальных типов поведения. Нетрудно проверить, что существует единственная NE-траектория, а, следовательно, и единственная $P(NE)$-траектория, имеющая вид $x(t) \equiv 0,\ t \in [1.5, 4.5]$.

Переходим к построению BT-решений игр в опциях 2.)-4.).

Очевидно, что если BT-траектории существуют, то все они содержат отрезок ag.

Если двигаться вдоль этого отрезка с максимальной скоростью, то в точку g попадем в момент $t^* = 3.101$.

На отрезке ag найдем точку m, равноудаленную от точки $a^{(1)}$ как при обходе множества S_2 по часовой стрелке, так и при обходе S_2 против часовой стрелки. Найдем также точку n, равноудаленную от точки $a^{(2)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Наконец, найдем также точку p, равноудаленную от точки $a^{(3)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Имеем следующие результаты вычислений: $m = (-0.618, 0.494)$, $n = (-1.744, 1.395)$, и $p = (0.273, 0.219)$.

Посчитаем, что для стартующего в момент $t = 1.5$ движения вдоль отрезка ag с максимальной скоростью времена попадания в точки p, m, n, и g будут $t = 1.675$, $t = 1.896$, $t = 2.616$, и $t^* = 3.101$, соответственно.

Нетрудно проверить, что для этого движения вдоль отрезка ag все три функции $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$ монотонно убывают на отрезке $t \in [1.5, 1.675]$; на отрезке $t \in [1.675, 1.896]$ функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$ продолжают убывать, а функция $\gamma_3(t,x)$ возрастает; на отрезке $t \in [1.896, 2.616]$ функция $\gamma_2(t,x)$ продолжает убывать, а функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$ возрастают; на отрезке $t \in [2.616, 3.101]$ все три функции возрастают.

Выводим, что на отрезке ap тройка типов поведения $(agg(2), agg(3), agg(1))$ является одной из троек, которая определяет командную задачу управления, в которой движение есть максимальный сдвиг на точку p. На следующем отрезке pm тройка типов $(alt(3), alt(3), nor)$ (с минимумом суммарного времени использования анормальных поведений) также определяет командную задачу управления, в которой движение есть максимальный сдвиг на точку m. На отрезке mn тройка $(nor, alt(3), nor)$ минимизирует суммарное время использования анормальных поведений и определяет командную задачу управления, в которой осуществляется максимальный сдвиг на точку n. На следующем отрезке ng тройка (nor, nor, nor) доставляет максимальный сдвиг на точку g.

Таким образом, позиция (t^*, g) является общей «стартовой» позицией лля всех трех игр Γ^{12}, Γ^{13}, Γ^{123} на оставшемся отрезке $[t^*, \vartheta]$. Далее в каждой из этих игр были выбраны BT-решения и указаны пределы изменения параметра L, в которых Задача 1 и Задача 2 имеют решение.

Остановимся сначала на игре Γ^{13}. Можно проверить, что в игре Γ^{13} множество концов траекторий, порожденных $P(BT)$-решениями игры, образуют отрезок, концы которого – точки с координатами $(-3.75, 2.50)$ и $(-3.57, 2.86)$ – являются точками пересечения отрезка $da^{(1)}$ с дугами окружностей $\|x - a^{(1)}\| = |ga^{(1)}|$ (линия 11 на Рис.1) и $\|x-d\| = |dg|$ (линия 22). Эти дуги являются сечениями поверхностей уровня функций $\gamma_1^{13}(t, x)$ и $\gamma_3^{13}(t, x)$ (2.12) плоскостями $t = const$, соответственно. На вышеупомянутом отрезке берем точку h_3, ближайшую к точке g. Ее координаты будут $h_3 = (-3.7, 2.6)$. Выбираем $P(BT)$-решение, приводящее максимально быстро в точку h_3 и далее обеспечивающее остановку в ней вплоть до момента $\vartheta = 4.5$. Убеждаемся, что это решение порождается следующими стратегиями игроков $P1$ и $P3$:

$$U^{*1} = \{u^{*1}(t, x, \varepsilon), \beta_1^{*1}(\varepsilon)\}, \quad W^{*1} = \{w^{*1}(t, x, \varepsilon), \beta_3^{*1}(\varepsilon)\}, \tag{4.9}$$

причем при $\|x - x^{*1}(t)\| < \varepsilon$ будет

$$u^{*1}(t, x, \varepsilon) = \{(-0.781, 0.625), t \in [1.5, 3.101); (-0.894, 0.447),$$

$$t \in [3.101, 3.772); (0.447, 0.894), t \in [3.772, 4.5]\},$$

$$w^{*1}(t, x, \varepsilon) = \{(-0.781, 0.625), t \in [1.5, 3.101); (-0.894, 0.447),$$

$$t \in [3.101, 3.772); (-0.447, -0.894), t \in [3.772, 4.5]\},$$

а при $\|x - x^{*1}(t)\| \geq \varepsilon$ будет

$$u^{*1}(t, x, \varepsilon) = w^{*1}(t, x, \varepsilon) = (0.781, -0.625).$$

Порожденная траектория будет

$$x^{*1}(t) = \{(-1.562(t-1.5), 1.25(t-1.5)), t \in [1.5, 3.101);$$

$$(-1,788(t-3.101), 0.894(t-3.101)), t \in [3.101), 3.772);$$

$$(3.7, 2, 6), t \in [3.772, 4.5]\}.$$

Соответствующие программные индикаторные функции, с помощью которых осуществляется перевод ситемы из состояния a в момент $T = 1.5$ в состояние h_3 в момент $\vartheta = 4.5$:

$$\alpha_1^{(0)}(t) = \{agg(3), t \in [1.5, 1.896); \;\; nor, t \in [1.896, 3.101)\}, \qquad (4.10)$$

$$\alpha_1^{(0)}(t) = \{alt(3), t \in [3.101, t_*); \;\; nor, t \in [t_*, 4.5]\},$$

$$\alpha_3^{(0)}(t) = \{agg(1), t \in [1.5, 1.896); \;\; alt(1), t \in [1.896, 2.616)\},$$

$$\alpha_3^{(0)}(t) = \{nor, t \in [2.616, 4.5\}.$$

Траектория, порожденная выбранным $P(BT)$-решением, является двухзвенником agh_3. Выигрыши игроков $P1$ и $P3$ в точке h_3 равны $I_1^{(3)} = 11.73$, $I_3^{(3)} = 9.03$. Подставляя эти величины в неравенства (1.5), (1.6), получаем $11.73 + L > 16, \;\; 9.03 - L > 4$, или

$$4.28 < L < 5.03. \qquad (4.11)$$

Таким образом, получаем следующее утверждение

Утверждение 1. *Пара стратегий* (U^{*1}, W^{*1}) *(4.09) игроков* $P1$ *и* $P3$*, пара индикаторных функций* $\alpha_1^{(1)}(t)$, $\alpha_3^{(1)}(t)$ *(4.10) и число L (4.11) доставляют решение Задачи 1.3.*

Перейдем теперь к игре двух лиц Γ^{12}. Можно проверить, что в игре Γ^{12} концы траекторий, порожденных $P(BT)$-решениями игры, заведомо находятся в области, ограниченной линией 11 и линией $\|x - a^{(2)}\| = |a^{(2)}g|$ (на рис.2 линия 33), являющейся сечением поверхности уровня функции $\gamma_2^{12}(t, x)$ плоскостями $t = const$. Опуская доказательство, отметим, что точка $h_2 = (-4.65, 3.79)$ является концом траектории, порожденной $P(BT)$-решением, наилучшим для игрока $P2$. Здесь мы не выписываем выражения для порождающих стратегий (U^{*2}, V^{*2}) и индикаторных функций $\alpha_1^{(2)}(t)$, $\alpha_2^{(2)}(t)$.

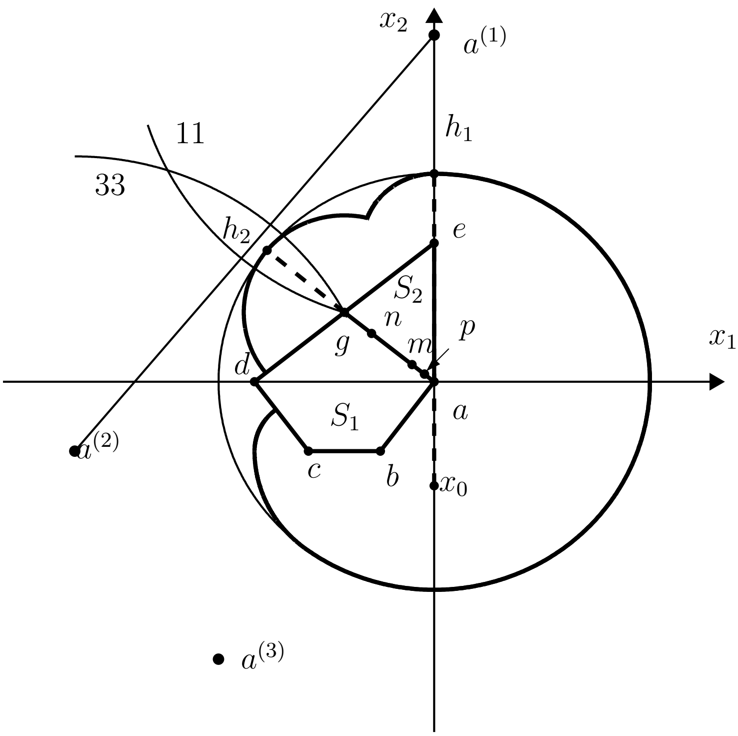

Рисунок 2. Опции 1.), 2.).

Выигрыши игроков $P1, P2$ в точке h_2 равны $I_1^{(2)} = 12.24$, $I_2^{(2)} = 12.12$. Подставляя эти величины в неравенства (1.5), (1.6), получаем $12.24 + L > 16$, $12.12 - L > 7.1$, или

$$3.76 < L < 5.02. \tag{4.12}$$

Утверждение 2. *Пара стратегий игроков $P1$ и $P2$ и пара индикаторных функций $P1$ и $P2$, обеспечивающих приведение системы в состояние h_2, а также число L (4.12) доставляют решение Задачи 1.2.*

Переходим к игре трех лиц Γ^{123} (4.5) (опция 4.)). На рис. 3 линии 11, 44 и 55 суть дуги окружностей $\|x - a^{(1)}\| = |da^{(1)}|$, $\|x - a^{(2)}\| =$

$|da^{(2)}|+(\vartheta-T)$, $\|x-d\|=|dg|+(\vartheta-T)$, соответственно. Эти окружности являются сечениями поверхностей уровня функций $\gamma_1^{123}(t,x)$, $\gamma_2^{123}(t,x)$ и $\gamma_3^{123}(t,x)$ (2.12) плоскостью $t=T$. Заметим, что линия 11 на рис. 1–3 одна и та же. От линии 55 по сути дела нужна только точка ее пересечения с отрезком ag.

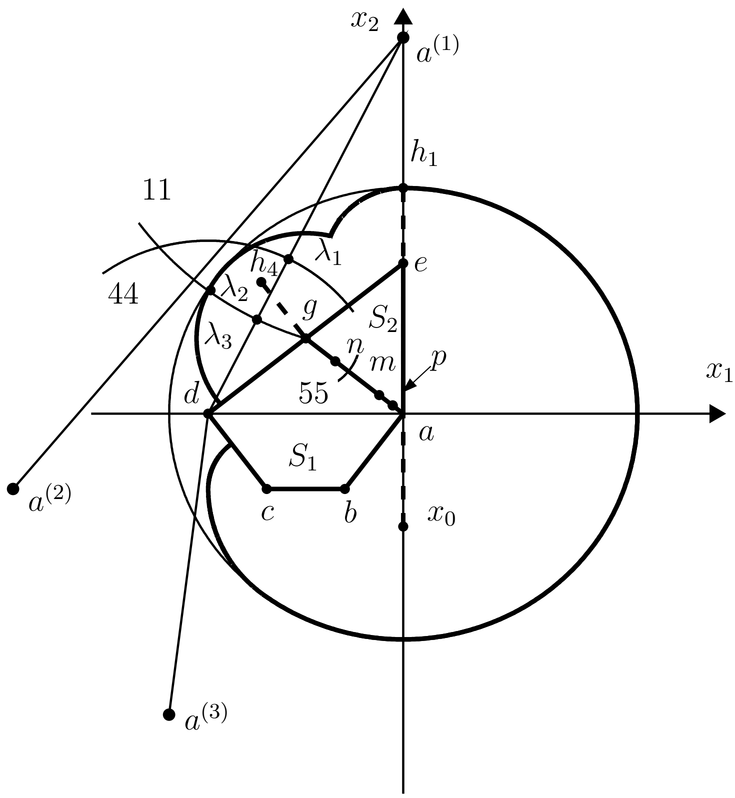

Рисунок 3. Опции 1.), 4.).

Согласно Свойству А из раздела 2 множество, ограниченное указанными линиями, содержит концы траекторий, порожденных $P(NE)$-решениями игры. При этом траектории, заканчивающиеся в точках $\lambda_1=(-2.94, 4.11)$, $\lambda_2=(-4.94, 3.28)$ и $\lambda_3=(-3.75, 2.50)$, порождены $P(NE)$-решениями, наилучшими для игроков $P1$, $P2$ и $P3$, соответственно.

Построим точку $h_4=(-3.64, 3.50)$, являющуюся взвешенным средним точек λ_1, λ_2 и λ_3 с весами 0.5, 0.25 и 0.25, соответственно. На рис. 3 кусок $P(NE)$-траектории, приводящей в точку h_4, выделен пунктирной линией gh_4.

Убеждаемся, что эта траектория порождена следующими стратегиями игроков $P1$, $P2$ и $P3$:

$$U^{*3} = \{u^{*3}(t,x,\varepsilon), \beta_1^{*3}(\varepsilon)\}, V^{*3} = \{v^{*3}(t,x,\varepsilon), \beta_2^{*3}(\varepsilon)\}, \quad (4.13)$$

$$W^{*3} = \{w^{*3}(t,x,\varepsilon), \beta_3^{*3}(\varepsilon)\},$$

причем при $\|x - x^{*3}(t)\| < \varepsilon$ будет

$$u^{*3}(t,x,\varepsilon) =$$

$$= \{(-0.781, 0.625), t \in [1.5, 3.101); (-0.407, 0.536), t \in [3.101, 4.5]\},$$

$$v^{*3}(t,x,\varepsilon) = w^{*3}(t,x,\varepsilon) = \{(-0.390, 0.313), t \in [1.5, 3.101);$$

$$(-0.204, 0.268), t \in [3.101, 4.5]\},$$

а при $\|x - x^{*3}(t)\| \geq \varepsilon$ будет

$$u^{*3}(t,x,\varepsilon) = (0.781, -0.625); v^{*3}(t,x,\varepsilon) = w^{*3}(t,x,\varepsilon) = (0.390, -0.313).$$

Порожденная траектория будет $x^{*3}(t) = ((-1.562(t - 1.5), 1.25 (t - 1.5)), 1.5 \leq t \leq 3.101; ((-2.5 - 0,814(t - 3.101), 2 + 1.072 (t - 3.101)), 3.101 < t \leq 4.5)$, $\beta_i^{*3}(\varepsilon) = 0.1\varepsilon, i = 1,2,3.$

Соответствующие программные индикаторные функции, с помощью которых осуществляется перевод ситемы из состояния a в момент $T = 1.5$ в состояние h_4 в момент $\vartheta = 4.5$, имеют вид:

$$\alpha_1^{(3)}(t) = \{agg(2), t \in [1.5, 1.675);\ alt(3), t \in [1.675), 1.896); \quad (4.14)$$

$$nor, t \in [1.896, 4.5]\},$$

$$\alpha_2^{(3)}(t) = \{agg(3), t \in [1.5, 1.675);\ \ alt(3), t \in [1.675, 2.616);$$

$$nor, t \in [2.616, 4.5]\},$$

$$\alpha_3^{(3)}(t) = \{agg(1), t \in [1.5, 1.675);\ \ nor, t \in [1.675, 4.5]\}.$$

Выигрыши игроков $P1$, $P2$ и $P3$ в точке h_4 составляют величины $I_1^{(3)} = 12.55$, $I_2^{(3)} = 11.59$, $I_3^{(3)} = 8.18$. Подставляя эти значения в неравенства (1.8),(1.9) получим $12.55 + L > 16$, $11.59 + 8.18 - L > 4.0 + 7.1$ или

$$3.05 < L < 8.67 \quad (4.15)$$

Утверждение 3. *Тройка стратегий* (U^{*3}, V^{*3}, W^{*3}) *(4.13) игроков* $P1$, $P2$ *и* $P3$ *вместе с тройкой индикаторных функций* $\alpha_1^{(3)}(t)$, $\alpha_2^{(3)}(t)$, $\alpha_3^{(3)}(t)$ *(4.14) и числом* L *(4.15) доставляют решение Задачи 2.*

5. Заключение

В работе рассматривается двухшаговая задача динамического управления на фиксированном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$, динамика которой формируется под воздействием управлений трех участников (игроков). У каждого игрока имеется свой терминальный функционал выигрыша.

На первом шаге $[t_0, T]$ в формировании управления участвует только первый игрок, который решает задачу оптимального управления с терминальным функционалом выигрыша I_1. На промежутке $[T, \vartheta]$, в соответствии с выбором первого игрока, может реализоваться один из следующих четырех вариантов: 1.) продолжается решение задачи оптимального управления с функционалом выигрыша I_1; 2.) разыгрывается дифференциальная игра первого и второго игроков с терминальными функционалами I_1 и I_2; 3.) разыгрывается дифференциальная игра первого и третьего игроков с функционалами I_1 и I_3; 4.) разыгрывается дифференциальная игра первого, второго и третьего игроков с функционалами I_1, I_2 и I_3.

При этом в каждом из четырех вариантов вектограмма правой части уравнений движения одна и та же. В вариантах 2)-4) игроки действуют в классе позиционных стратегий. В качестве решений здесь принимаются $P(NE)$-решения игры двух или трех лиц. Выигрыши игроков считаются трансферабельными. За участие в управляемом процессе на отрезке $[T, \vartheta]$ вновь вошедшие игроки выплачивают первому игроку платеж в размере $L > 0$ единиц. Ставятся Задачи 1.i и Задача 2.

Получено решение Задач 1.i и Задачи 2 в примере с уравнениями простой динамики на плоскости и фунционалами игроков, имеющих смысл минимума расстояния от целевой точки до конечной точки на траектории (Утверждения 1-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры.* Екатеринбург: Наука, 1993.
2. Клейменов А.Ф. *О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре* // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 739–746.
3. Клейменов А.Ф. *Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 40–55.
4. Клейменов А.Ф. *Альтруистический и агрессивный типы поведения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре трех лиц* // Труды Ин-та математики и механики. 2019. Т. 25, №3. С. 108–117.
5. Клейменов А.Ф. *Принятие решений в одной гибридной задаче динамического управления с тремя участниками* // Труды Ин-та математики и механики. 2020. Т. 26, № 1. С. 131–140.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.
7. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* М.: Наука, 1985.
8. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург, 2012.
9. Gromov D., Gromova E. *On a Class of Hybrid Differential Games* // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7(2). P. 266–288.
10. Kleimenov A.F., Kryazhimskii A.V. *Normal Behavior, Altruism and Aggression in Cooperative Game Dynamics.* Interim Report IR-98-076, Laxenburg: IIASA, 1998.
11. Kleimenov A.F. *An Approach to Building Dynamics for Repeated Bimatrix* 2×2 *Games Involving Various Behavior Types* // In: Dynamic and Control. Ed: G. Leitman. London: Gordon and Breach, 1998. P. 195–204.

12. Kleimenov A. *Altruistic, Aggressive and Paradoxical Types of Behavior in a Non- Antagonistic Positional Differential Two-Person Game* // In: Frontiers of Dynamic Games. Eds.: L.A. Petrosyan, V.V. Mazalov, N.A. Zenkevich. Basel: Birkhauser, 2018. P. 25–37.

13. Kort P.M., Wrzaczek S. *Optimal firm growth under the threat of entry* // Eur.J.Oper.Res. 2015. Vol. 246(1). P. 281–292.

HYBRID PROBLEM OF DYNAMIC CONTROL WITH THREE PARTICIPANTS IN THE PRESENCE OF ALTRUISTIC AND AGGRESSIVE BEHAVIOR TYPES

Anatoly F. Kleimenov, IMM UrO RAN, Dr.Sc.
(kleimenov@imm.uran.ru).

Abstract: The paper is close to [5] where a two-step hybrid dynamic control problem with three participants was considered; it was shown that in some cases it is profitable for the owner of management resources to sell a part of them to another participant(s) (assuming that the payoffs are transferable). This paper is also close to [4] where aggressive and altruistic types of behavior were allowed for the participants in three players differential game; then the players can apply the so-called BT-solutions which are better than the Nash ones. The developed in this paper approach is illustrated by a two-step control problem on a plane with the dynamics of simple motions in the presence of altruistic and aggressive behavior types.

Keywords: hybrid control problem, non-antagonistic differential game of two and three persons, altruistic and aggressive types of behavior, Nash solutions, BT-solutions.