

УДК 656.02 + 51-74

ББК 22.18

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ В ОДНОПРОДУКТОВОЙ СЕТИ*

АЛЕКСАНДР Ю. КРЫЛАТОВ

Юлия Е. ЛОНЯГИНА

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Настоящая работа посвящена проблеме анализа возникновения ненулевого продуктового потока между удаленными друг от друга в пространстве поставщиками и потребителями некоторого фиксированного продукта. Проблема сформулирована в виде задачи равновесного распределения потоков в однопродуктовой сети, представленной ориентированным графом, которая моделирует интегрированный рынок фиксированного продукта с множеством поставщиков и потребителей при линейных функциях спроса, потребления и транспортировки. В исследуемой задаче получен явный вид условий для выявления активных переменных, а также явный вид оптимальных значений искомых переменных. Явный вид условий возникновения ненулевого продуктового потока между поставщиками-потребителями позволит разрабатывать методологические инструменты поддержки принятия решений в области анализа пространственных рыночных отношений в рамках некоторого интегрированного рынка фиксированного продукта.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация, равновесное распределение потоков, однопродуктовая сеть.

Поступила в редакцию: 10.09.21 *После доработки:* 11.10.21 *Принята к публикации:* 10.12.21

1. Введение

В статье «Пространство и стоимость», опубликованной в 1942 году, американский экономист Стивен Энке поднимает вопрос о том, что широко распространенные на тот момент принципы экономики Альфреда Маршалла игнорируют проблему пространственной удаленности участников рынка друг от друга [4]. Действительно, А. Маршалл концентрировался на проблеме равновесной цены, зависящей от соотношения спроса и предложения, одинаковой для покупателей и продавцов (подобным же образом к вопросу равновесной цены в свое время подходили А.О. Курно и У.С. Джевонс) [6]. Однако, если транспортные затраты вносят существенный вклад в стоимость продукта, то невозможно говорить об одинаковой цене продукта для покупателя и продавца. В таком случае, речь должна идти отдельно о цене продажи и цене покупки продукта, а также стоимости транспортировки единицы продукта от поставщика потребителю, определяемой через разность между ценами покупки и продажи [4]. Опираясь на такое понимание ценообразования в условиях пространственного рыночного равновесия, С. Энке предложил первую модель пространственно равновесного распределения продуктового потока между множеством поставщиков и множеством потребителей [3]. Несмотря на то, что предложенная модель не имела четкой математической формализации, а представляла собой электрическую аналогию пространственно-экономических отношений, С. Энке считается одним из основоположников задачи равновесного распределения потоков в однопродуктовой сети.

В 1952 году Пол Самуэльсон построил функцию чистой общественной выгоды (net social pay-off) и на ее основе предложил первую математическую формализацию задачи равновесного распределения потоков в однопродуктовой сети в виде задачи условной оптимизации [11]. Наконец, Т. Такаяма и Г.Г. Джадж обобщили предложенную задачу на случай многопродуктовых потоков [10]. Сегодня построенную таким образом математическую модель принято называть моделью пространственного равновесия Энке-Самуэльсона-

Такаяма-Джаджа (ESTJ spatial equilibrium model) или моделью пространственного рыночного равновесия, так как она учитывает связь между спросом и предложением, а также ценами покупки, продажи и транспортировки продукта. Принципом равновесия, лежащим в основе такой модели, является следующий: *«разность между ценой покупки потребителя и ценой продажи поставщика равна стоимости транспортировки единицы продуктового потока между поставщиком-потребителем с положительным продуктовым потоком и меньше стоимости транспортировки единицы продукта между поставщиком-потребителем с нулевым продуктовым потоком»*. Распределение продуктового потока, удовлетворяющее этому принципу, принято называть равновесным. Исследование общих условий оптимальности допустимых решений соответствующей математической задачи приведено в работе [5].

Сегодня задача равновесного распределения продуктовых потоков не теряет своей актуальности. В частности, в научной литературе ведется дискуссия о границах ее применимости при моделировании реальных рыночных процессов. Одной из активно обсуждаемых проблем является возможность моделирования процесса интеграции удаленных друг от друга рынков при помощи концепции пространственного равновесия [7]. С одной стороны, исследователи указывают на *нетождественность* между моделями пространственного равновесия, в основе которых лежит принцип конкурентного рыночного равновесия, и реальной интеграцией рынков, проявленной в наличие ненулевого продуктового потока между удаленными друг от друга поставщиками-потребителями [2]. С другой стороны, модели пространственного равновесия демонстрируют высокую объяснительную силу и серьезный методологический потенциал при анализе продуктовых потоков и вопросов ценообразования на продовольственных рынках [12].

Настоящая работа посвящена проблеме анализа возникновения ненулевого продуктового потока между удаленными друг от друга поставщиками-потребителями. Интегрированный рынок фиксированного продукта будет представлен в виде однопродуктовой сети с множеством поставщиков-потребителей, моделируемой ориентированным графом, в узлах которого расположены поставщики и потре-

бители. В случае линейных функций спроса, предложения и транспортировки будут получены условия возникновения ненулевого потока между удаленными друг от друга поставщиками-потребителями в явном виде. Явный вид условий возникновения ненулевого продуктового потока между поставщиками-потребителями позволит разрабатывать методологические инструменты поддержки принятия решений в области анализа рыночных отношений в рамках некоторого интегрированного рынка фиксированного продукта.

Статья построена следующим образом. Математической модели пространственного равновесия посвящен п. 2. В п. 3 сформулированы и доказаны два утверждения, касающиеся аналитических отношений между продуктовым потоком и ценами покупки, продажи, а также доставки в случае линейных функций спроса, предложения и, соответственно, транспортировки. В п. 4 проведено аналитическое исследование задачи равновесного распределения потоков в однопродуктовой сети при линейных функциях спроса, предложения и транспортировки для случая m поставщиков и 1 потребителя, а в п. 5 – для случая 1 поставщика и n потребителей, получен явный вид условий возникновения ненулевого продуктового потока между поставщиками-потребителями. В п. 6 сделаны выводы и описаны перспективы.

2. Модель пространственного равновесия

Рассмотрим упорядоченное множество поставщиков M и упорядоченное множество потребителей N некоторого однотипного продукта. Переменной s_i зададим величину предложения i -го поставщика, в то время как λ_i – цена единицы продукта от i -го поставщика, $i \in M$, $s = (s_1, \dots, s_m)^T$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$. Переменной d_j зададим величину спроса j -го потребителя, в то время как μ_j – цена единицы продукта для j -го потребителя, $j \in N$, $d = (d_1, \dots, d_n)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$. Переменной $x_{ij} \geq 0$ зададим величину продуктового потока между упорядоченной парой (i, j) , при стоимости транспортировки единицы продукта, задаваемой строго возрастающей функцией $t_{ij}(x_{ij})$, $(i, j) \in M \times N$.

Введем непрерывно дифференцируемую функцию цены покупки, зависящей от спроса, $\mu_j = p_j(d_j)$ для любого $j \in N$, а также непрерывно дифференцируемую функцию цены продажи, зависящей от

предложения, $\lambda_i = r_i(s_i)$ для любого $i \in M$. Другими словами, будем считать, что существует непрерывно дифференцируемая зависимость между ценой покупки и спросом, а также между ценой продажи и предложением. В таком случае, решение следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{d,s,x} \sum_{i \in M} \int_0^{s_i} r_i(v) dv + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(u) du - \sum_{j \in N} \int_0^{d_j} p_j(z) dz \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = s_i \quad \forall i \in M, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in N, \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in M \times N, \quad (2.4)$$

$$s_i \geq 0, \quad \forall i \in M, \quad (2.5)$$

$$d_j \geq 0, \quad \forall j \in N. \quad (2.6)$$

приводит к *равновесному распределению потоков* в однопродуктовой сети, а именно: положительный товаропоток возникает между поставщиком и потребителем если сумма цены продажи поставщика и затраты на транспортировку единицы продукта потребителю равна цене покупки потребителя, но если сумма цены продажи поставщика и затраты на транспортировку единицы продукта потребителю превышает цену покупки потребителя, то между парой поставщик-потребитель товаропоток окажется нулевым [8, 9].

В рамках настоящей статьи исследуется равновесное распределение потоков в однопродуктовой сети с линейными функциями спроса, предложения и транспортировки. Другими словами, предполагается, что рост цены покупки влечет за собой линейное уменьшение спроса:

$$\mu_j = p_j(d_j) = p_j^0 - k_j^p d_j, \quad p_j^0 \geq 0, k_j^p > 0, \quad \forall j \in N, \quad (2.7)$$

а рост цены продажи влечет за собой линейное увеличение предложения:

$$\lambda_i = r_i(s_i) = r_i^0 + k_i^r s_i, \quad r_i^0 \geq 0, k_i^r > 0, \quad \forall i \in M, \quad (2.8)$$

в то время как совокупные затраты на перевозку единицы товара растут линейно с ростом объёма перевозки:

$$t_{ij}(x_{ij}) = t_{ij}^0 + k_{ij}^t x_{ij}, \quad t_{ij}^0 \geq 0, k_{ij}^t > 0, \quad \forall (i, j) \in M \times N. \quad (2.9)$$

Отметим, что вид зависимости (2.9) продиктован тем, что в совокупные затраты на перевозку включены временные издержки на поставку, увеличивающиеся при существенном росте размера партии.

3. Пространственное равновесие: m поставщиков и n потребителей

Введем индикаторы наличия ненулевого спроса и ненулевого предложения:

$$\delta_i^r = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i > 0, \\ 0, & \text{если } s_i = 0, \end{cases} \quad \delta_j^p = \begin{cases} 1, & \text{если } d_j > 0, \\ 0, & \text{если } d_j = 0, \end{cases}$$

для любого $i \in M$ и $j \in N$ соответственно, а также индикатор наличия ненулевого продуктового потока между парой $(i, j) \in M \times N$:

$$\delta_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases} \quad \forall (i, j) \in M \times N.$$

Ясно, что

$$\delta_i^r = \max_{j \in N} \delta_{ij}^t \quad \forall i \in M \quad \text{и} \quad \delta_j^p = \max_{i \in M} \delta_{ij}^t \quad \forall j \in N.$$

Другими словами, если у некоторого поставщика (потребителя) отсутствует продуктовый поток со всеми потребителями (поставщиками), то его предложение (спрос) равен нулю. При этом, если у некоторого поставщика (потребителя) имеется ненулевой продуктовый поток хотя бы с одним потребителем (поставщиком), то его предложение (спрос) положителен.

С учетом введенных обозначений, справедлива следующая Лемма.

Лемма 3.1. *Равновесное распределение потоков в задаче (2.1)–(2.6) при линейных функциях спроса, предложения и транспортировки*

(2.7)–(2.9) достигается реализацией следующего шаблона распределения продуктового потока:

$$d_j = \begin{cases} \frac{p_j^0 - \mu_j}{k_j^p} & \text{если } p_j^0 \geq \mu_j, \\ 0 & \text{если } p_j^0 < \mu_j, \end{cases} \quad \forall j \in N, \quad (3.1)$$

$$s_i = \begin{cases} \frac{\lambda_i - r_i^0}{k_i^r}, & \text{если } \lambda_i \geq r_i^0, \\ 0, & \text{если } \lambda_i < r_i^0, \end{cases} \quad \forall i \in M, \quad (3.2)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_j - \lambda_i - t_{ij}^0}{k_{ij}^t}, & \text{если } \mu_j - \lambda_i > t_{ij}^0, \\ 0, & \text{если } \mu_j - \lambda_i \leq t_{ij}^0, \end{cases} \quad \forall (i, j) \in M \times N, \quad (3.3)$$

при λ и μ , удовлетворяющих следующему матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} B & -B_r \\ B_p & -B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_p \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где матрицы B , B_r и B_p таковы, что $B = \{\delta_{ij}^t/k_{ij}^t\}_{i \in M, j \in N}$,

$$B_r = \text{diag} \left\{ \sum_{j \in N} \frac{\delta_{1j}^t}{k_{1j}^t} + \frac{\delta_1^r}{k_1^r}, \dots, \sum_{j \in N} \frac{\delta_{mj}^t}{k_{mj}^t} + \frac{\delta_m^r}{k_m^r} \right\},$$

$$B_p = \text{diag} \left\{ \sum_{i \in M} \frac{\delta_{i1}^t}{k_{i1}^t} + \frac{\delta_1^p}{k_1^p}, \dots, \sum_{i \in M} \frac{\delta_{in}^t}{k_{in}^t} + \frac{\delta_n^p}{k_n^p} \right\},$$

а вектор-столбцы q_r и q_p :

$$q_r = \left(\sum_{j \in N} \frac{t_{1j}^0 \delta_{1j}^t}{k_{1j}^t} - \frac{r_1^0 \delta_1^r}{k_1^r}, \dots, \sum_{j \in N} \frac{t_{mj}^0 \delta_{mj}^t}{k_{mj}^t} - \frac{r_m^0 \delta_m^r}{k_m^r} \right)^T,$$

$$q_p = \left(\sum_{i \in M} \frac{t_{i1}^0 \delta_{i1}^t}{k_{i1}^t} + \frac{p_1^0 \delta_1^p}{k_1^p}, \dots, \sum_{i \in M} \frac{t_{in}^0 \delta_{in}^t}{k_{in}^t} + \frac{p_n^0 \delta_n^p}{k_n^p} \right)^T.$$

Доказательство. При доказательстве Леммы воспользуемся условиями Каруша–Куна–Таккера. Заметим, что в силу выпуклости целевой функции (2.1), а также области допустимых решений (2.2)–(2.6), условия Каруша–Куна–Таккера являются как необходимыми, так и достаточными. Построим Лагранжиан для задачи (2.1)–(2.6):

$$L = \sum_{i \in M} \int_0^{s_i} r_i(v) dv + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(u) du - \sum_{j \in N} \int_0^{d_j} p_j(z) dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in M} \lambda_i \left(\sum_{j \in N} x_{ij} - s_i \right) + \sum_{j \in N} \mu_j \left(- \sum_{i \in M} x_{ij} + d_j \right) + \\
& + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (-x_{ij}) \xi_{ij} + \sum_{i \in M} (-s_i) \eta_i + \sum_{j \in N} (-d_j) \nu_j,
\end{aligned}$$

где λ_i и $\eta_i \geq 0$, $i \in M$, μ_j и $\nu_j \geq 0$, $j \in N$, а также $\xi_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in M \times N$, являются множителями Лагранжа. Продифференцируем полученный Лагранжиан по искомым переменным, учитывая линейность функций спроса, предложения и транспортировки (2.7)–(2.9), и полученные выражения приравняем к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial d_j} = -(p_j^0 - k_j^p d_j) + \mu_j - \nu_j = 0 \quad \forall j \in N, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = r_i^0 + k_i^r s_i - \lambda_i - \eta_i = 0 \quad \forall i \in M, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = t_{ij}^0 + k_{ij}^t x_{ij} + \lambda_i - \mu_j - \xi_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in M \times N. \quad (3.7)$$

При этом, условия дополняющей нежесткости требуют выполнение следующих равенств: $\nu_j d_j = 0$ для любого $j \in N$, $\eta_i s_i = 0$ для любого $i \in M$, а также $\xi_{ij} x_{ij} = 0$ для любых $(i, j) \in M \times N$. Таким образом, согласно условиям дополняющей нежесткости, учитывая, что $\nu_j \geq 0$, $\eta_j \geq 0$ и $\xi_{ij} \geq 0$, равенства (3.5)–(3.7) могут быть преобразованы следующим образом:

$$p_j^0 - k_j^p d_j \begin{cases} = \mu_j, & \text{если } d_j > 0, \\ \leq \mu_j, & \text{если } d_j = 0, \end{cases} \quad \forall j \in N,$$

$$r_i^0 + k_i^r s_i \begin{cases} = \lambda_i, & \text{если } s_i > 0, \\ \geq \lambda_i, & \text{если } s_i = 0, \end{cases} \quad \forall i \in M,$$

$$t_{ij}^0 + k_{ij}^t x_{ij} \begin{cases} = \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ \geq \mu_j - \lambda_i, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases} \quad \forall (i, j) \in M \times N,$$

откуда получаем (3.1)–(3.3).

Благодаря введенным индикаторам наличия ненулевого спроса, ненулевого предложения и ненулевого продуктового потока, условия (2.2) и (2.3) могут быть представлены следующим образом:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \delta_{ij}^t = s_i \delta_i^r, \quad i \in M,$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \delta_{ij}^t = d_j \delta_j^p, \quad j \in N$$

или, с учетом (3.1)–(3.3):

$$\sum_{j \in N} \frac{\mu_j - \lambda_i - t_{ij}^0}{k_{ij}^t} \delta_{ij}^t = \frac{\lambda_i - r^0}{k_i^r} \delta_i^r, \quad i \in M,$$

$$\sum_{i \in M} \frac{\mu_j - \lambda_i - t_{ij}^0}{k_{ij}^t} \delta_{ij}^t = \frac{p_j^0 - \mu_j}{k_j^p} \delta_j^p, \quad j \in N,$$

или

$$\sum_{j \in N} \frac{\mu_j}{k_{ij}^t} \delta_{ij}^t - \lambda_i \left(\sum_{j \in N} \frac{\delta_{ij}^t}{k_{ij}^t} + \frac{\delta_i^r}{k_i^r} \right) = \sum_{j \in N} \frac{t_{ij}^0}{k_{ij}^t} \delta_{ij}^t - \frac{r^0}{k_i^r} \delta_i^r, \quad i \in M,$$

$$\mu_j \left(\sum_{i \in M} \frac{\delta_{ij}^t}{k_{ij}^t} + \frac{\delta_j^p}{k_j^p} \right) - \sum_{i \in M} \frac{\lambda_i}{k_{ij}^t} \delta_{ij}^t = \sum_{i \in M} \frac{t_{ij}^0}{k_{ij}^t} \delta_{ij}^t + \frac{p_j^0}{k_j^p} \delta_j^p, \quad j \in N,$$

что в матричном виде примет вид (3.4). $\square$

Ясно, что конструктивный потенциал доказанной Леммы зависит от того, в каком случае обратима блочная матрица из матричного уравнения (3.4). Допустим (d, s, x) является решением задачи (2.1)–(2.6), тогда существуют $\hat{M} \subseteq M$ и $\hat{N} \subseteq N$ такие, что

$$d_j \begin{cases} > 0, & \text{при } j \in \hat{N}, \\ = 0, & \text{при } j \in N \setminus \hat{N}, \end{cases} \quad s_i \begin{cases} > 0, & \text{при } i \in \hat{M}, \\ = 0, & \text{при } i \in M \setminus \hat{M}. \end{cases}$$

В таком случае матричное уравнение (3.4) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \\ \hat{B}_p & -\hat{B}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_r \\ \hat{q}_p \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$ содержат только те компоненты исходных векторов, которые соответствуют активным (с ненулевыми оптимальными значениями) переменным спроса и предложения соответственно.

Лемма 3.2. *В случае m поставщиков и 1 потребителя (1 поставщика и n потребителей) блочная матрица из матричного уравнения (3.8) обратима.*

Доказательство. В случае m поставщиков и 1 потребителя размерность блочной матрицы из матричного уравнения (3.8) равна $(\hat{m} + 1) \times (\hat{m} + 1)$, где $\hat{m} = |\hat{M}|$. В силу того, что матрица $\hat{B}_r$ имеет диагональную структуру при гарантированно ненулевых значениях на главной диагонали, поскольку $\delta_i^r = 1$ для всех $i \in \hat{M}$, строки матрицы $\begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \end{pmatrix}$ линейно независимы между собой, а значит справедливо следующее:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \end{pmatrix} = \hat{m}.$$

Предположим, что вектор-строка $\begin{pmatrix} \hat{B}_p & -\hat{B}^T \end{pmatrix}$ представляет собой линейную комбинацию строк матрицы $\begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \end{pmatrix}$. Другими словами, предположим, что существует набор коэффициентов α (вектор-столбец) такой, что

$$\alpha^T \begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B}_p & -\hat{B}^T \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Матричное уравнение (3.9) справедливо тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие два равенства:

$$\sum_{i \in \hat{M}} \alpha_i \frac{1}{k_{i1}^t} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}, \quad (3.10)$$

и

$$\alpha_i \left(\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r} \right) = \frac{1}{k_{i1}^t} \quad \forall i \in \hat{M}. \quad (3.11)$$

Воспользовавшись (3.11), выразим коэффициенты α_i , $i \in \hat{M}$, в явном виде:

$$\alpha_i = \frac{\frac{1}{k_{i1}^t}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} \quad \forall i \in \hat{M},$$

а значит, исходя из (3.10), получаем:

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{\frac{1}{k_{i1}^t}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} \frac{1}{k_{i1}^t} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p},$$

откуда

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{\frac{1}{k_{i1}^t}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} \frac{1}{k_{i1}^t} > \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t},$$

хотя, с другой стороны,

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{\frac{1}{k_{i1}^t}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} \frac{1}{k_{i1}^t} < \sum_{i \in \hat{M}} \frac{\frac{1}{k_{i1}^t}}{\frac{1}{k_{i1}^t}} \frac{1}{k_{i1}^t} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t},$$

что приводит к противоречию.

Таким образом, можно сделать вывод, что не существует такого набора коэффициентов α_i , $i \in \hat{M}$, при котором матричное уравнение (3.9) выполняется. Другими словами, вектор-строку $(\hat{B}_p \quad -\hat{B}^T)$ невозможно представить в виде линейной комбинации строк матрицы $(\hat{B} \quad -\hat{B}_r)$. Следовательно, приходим к заключению, что все строки матрицы

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \\ \hat{B}_p & -\hat{B}^T \end{pmatrix}$$

линейно независимы, то есть

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \\ \hat{B}_p & -\hat{B}^T \end{pmatrix} = \hat{m} + 1,$$

а, следовательно, эта матрица является обратимой.

Аналогичным образом доказывается, что блочная матрица из матричного уравнения (3.8) обратима в случае 1 поставщика и n потребителей. $\square$

4. Пространственное равновесие: m поставщиков и 1 потребитель

Без умаления общности, перенумеруем поставщиков таким образом, что

$$r_1^0 + t_{11}^0 \leq \dots \leq r_m^0 + t_{m1}^0. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. *В случае m поставщиков, перенумерованных согласно (4.1), и 1 потребителя, при линейных функциях спроса, предложения и транспортировки (2.7)–(2.9), если существует $\hat{m}$, $1 \leq \hat{m} \leq m$, такое, что*

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 > \sum_{i=1}^{\hat{m}} \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0) \quad \forall \tau \leq \hat{m},$$

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 \leq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0) \quad \forall \tau > \hat{m},$$

то равновесное распределение потоков в задаче (2.1)–(2.6) достигается реализацией следующего шаблона распределения продуктового потока:

$$x_{\tau 1} \begin{cases} > 0, & \text{при } \tau \leq \hat{m}, \\ = 0, & \text{при } \tau > \hat{m}, \end{cases}$$

при этом вектор $\hat{x} = (x_{11}, \dots, x_{\hat{m}1})^T$ равен:

$$\hat{x} = \hat{D}_r^{-1} \left(\left(e_{\hat{m}} - \hat{B}_r^{-1} \hat{B} \right) \frac{\hat{q}_p - \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r}{\hat{B}_p - \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} \hat{B}} + \hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r - \hat{t}_r \right), \quad (4.2)$$

где $e_{\hat{m}} = (1, \dots, 1)^T$ при $\dim e_{\hat{m}} = \hat{m} \times 1$,

$$\hat{D}_r = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_{11}^t}, \dots, \frac{1}{k_{\hat{m}1}^t} \right\} \quad \text{и} \quad \hat{t}_r = (t_{11}^0, \dots, t_{\hat{m}1}^0)^T.$$

Доказательство. I. Согласно Лемме 3.1, конкурентное равновесие в задаче (2.1)–(2.6) при линейных функциях спроса, предложения и транспортировки (2.7)–(2.9) достигается реализацией шаблона распределения продуктового потока, удовлетворяющего условиям (3.1)–(3.3), зависимым от значений компонент λ и μ . В свою очередь, λ и μ должны удовлетворять матричному уравнению (3.4):

$$\begin{pmatrix} -B_r & B \\ -B^T & B_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_p \end{pmatrix},$$

которое можно преобразовать в матричное уравнение (3.8):

$$\begin{pmatrix} -\hat{B}_r & \hat{B} \\ -\hat{B}^T & \hat{B}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_r \\ \hat{q}_p \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$ содержат только те компоненты исходных векторов, которые соответствуют активным (с ненулевыми оптимальными значениями) переменным спроса и предложения соответственно. При этом, в случае m поставщиков и 1 потребителя, матричное уравнение (4.3) будет обладать тем свойством, что $\dim \hat{B}_p = 1 \times 1$.

Согласно Лемме 3.2, блочная матрица из матричного уравнения (4.3) обратима. Более того, в связи с тем, что $\hat{B}_r$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят гарантированно ненулевые элементы:

$$\hat{B}_r = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r} \right\}_{i \in \hat{M}},$$

$\hat{B}_r$ является неособенной матрицей, а значит можно воспользоваться формулой Фробениуса для нахождения обратной матрицы к матрице, имеющей блочную структуру [1]:

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{B}_r^{-1} - \hat{B}_r^{-1} \hat{B} H^{-1} \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} & \hat{B}_r^{-1} \hat{B} H^{-1} \\ -H^{-1} \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_r \\ \hat{q}_p \end{pmatrix},$$

где

$$H = \hat{B}_p - \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} \hat{B}.$$

Заметим, что в силу $\dim \hat{B}_p = 1 \times 1$, H – скаляр, то есть

$$H^{-1} = \frac{1}{H},$$

а если произведение матриц $\hat{B}_r^{-1}$ и $\hat{B}$ обозначить через G , то есть

$$G = \hat{B}_r^{-1} \hat{B},$$

при

$$G^T = \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1},$$

так как матрица $\hat{B}_r^{-1}$ – диагональная, то выражение для $\hat{\lambda}$ и μ_1 можно записать более компактно:

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{B}_r^{-1} - \frac{1}{H} G G^T & \frac{1}{H} G \\ -\frac{1}{H} G^T & \frac{1}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_r \\ \hat{q}_p \end{pmatrix},$$

откуда

$$\hat{\lambda} = -\hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r - \frac{1}{H} G G^T \hat{q}_r + \frac{1}{H} G \hat{q}_p \quad (4.4)$$

и

$$\mu_1 = -\frac{1}{H} G^T \hat{q}_r + \frac{1}{H} \hat{q}_p. \quad (4.5)$$

II. Согласно Лемме 3.1, компоненты вектора $(x_{11}, \dots, x_{m1})^T$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$x_{i1} = \begin{cases} \frac{\mu_1 - \lambda_i - t_{i1}^0}{k_{i1}^t}, & \text{если } \mu_1 - \lambda_i > t_{i1}^0, \\ 0, & \text{если } \mu_1 - \lambda_i \leq t_{i1}^0, \end{cases} \quad \forall i \in M.$$

В таком случае, можно сказать, что множество $\hat{M}$ состоит из таких индексов i , что

$$\mu_1 - \lambda_i - t_{i1}^0 \begin{cases} > 0 & \text{при } i \in \hat{M}, \\ \leq 0 & \text{при } i \in M \setminus \hat{M}, \end{cases} \quad (4.6)$$

в то время как

$$x_{i1} = \frac{\mu_1 - \lambda_i - t_{i1}^0}{k_{i1}^t}, \quad \forall i \in \hat{M} \quad (4.7)$$

и

$$x_{i1} = 0, \quad \forall i \in M \setminus \hat{M}. \quad (4.8)$$

Введем Q_i для любого $i \in M$ такой, что

$$Q_i = \mu_1 - \lambda_i - t_{i1}^0 \quad \forall i \in M.$$

В таком случае, согласно (4.6), для $i \in \hat{M}$ справедливо:

$$Q_i > 0, \quad (4.9)$$

в то время как для $i \in M \setminus \hat{M}$ справедливо:

$$Q_i \leq 0. \quad (4.10)$$

III. Выразим Q_i для $i \in \hat{M}$, воспользовавшись (4.4) и (4.5):

$$\hat{Q} = (e_{\hat{m}} - G) \left(\frac{\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r}{H} \right) + \hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r - \hat{t}_r, \quad (4.11)$$

где $\hat{Q} = (\dots, Q_i, \dots)^T$, $i \in \hat{M}$, и $\hat{t}_r = (\dots, t_{i1}^0, \dots)^T$, $i \in \hat{M}$. Заметим, что

$$G^T \hat{q}_r = \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{\frac{1}{k_{i1}^t}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} \left(\frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} - \frac{r_i^0}{k_i^r} \right),$$

в таком случае

$$\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} - \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} \frac{\frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} - \frac{r_i^0}{k_i^r}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}},$$

при этом

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} \frac{\frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} - \frac{r_i^0}{k_i^r}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} \frac{k_{i1}^t k_i^r}{k_i^r + k_{i1}^t} \frac{t_{i1}^0 k_i^r - r_i^0 k_{i1}^t}{k_{i1}^t k_i^r},$$

то есть

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} \frac{\frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} - \frac{r_i^0}{k_i^r}}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 k_i^r - r_i^0 k_{i1}^t}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)},$$

а значит

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} - \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 k_i^r - r_i^0 k_{i1}^t}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 k_{i1}^t + r_i^0 k_{i1}^t}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)} + \frac{p_1^0}{k_1^p},$$

то есть

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0}{k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} - \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 k_i^r - r_i^0 k_{i1}^t}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}$$

или

$$\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}.$$

В свою очередь,

$$H = \hat{B}_p - \hat{B}^T \hat{B}_r^{-1} \hat{B} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p} - \sum_{i \in \hat{M}} \frac{\left[\frac{1}{k_{i1}^t} \right]^2}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}},$$

при этом

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{\left[\frac{1}{k_{i1}^t} \right]^2}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} = \sum_{i \in \hat{M}} \left[\frac{1}{k_{i1}^t} \right]^2 \frac{k_{i1}^t k_i^r}{k_i^r + k_{i1}^t} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{k_i^r}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)},$$

а

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p} - \sum_{i \in \hat{M}} \frac{k_i^r}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{(k_i^r + k_{i1}^t) - k_i^r}{k_{i1}^t (k_i^r + k_{i1}^t)} + \frac{1}{k_1^p},$$

то есть

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p} - \sum_{i \in \hat{M}} \frac{\left[\frac{1}{k_{i1}^t} \right]^2}{\frac{1}{k_{i1}^t} + \frac{1}{k_i^r}} = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}$$

или

$$H = \sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}.$$

Таким образом, $\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r / H$ является числом, таким, что

$$\frac{\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r}{H} = \frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}}, \quad (4.12)$$

которое, согласно (4.11), умножается на все компоненты вектор-столбца $e_{\hat{m}} - G$ или $e_{\hat{m}} - \hat{B}_r^{-1} \hat{B}$. Заметим, что τ -ая компонента вектор-столбца $e_{\hat{m}} - \hat{B}_r^{-1} \hat{B}$ имеет вид:

$$1 - \frac{\frac{1}{k_{\tau 1}^t}}{\frac{1}{k_{\tau 1}^t} + \frac{1}{k_{\tau}^r}} = 1 - \frac{1}{k_{\tau 1}^t} \frac{k_{\tau 1}^t k_{\tau}^r}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t} = 1 - \frac{k_{\tau}^r}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t},$$

то есть

$$1 - \frac{\frac{1}{k_{\tau 1}^t}}{\frac{1}{k_{\tau 1}^t} + \frac{1}{k_{\tau}^r}} = \frac{k_{\tau 1}^t}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t},$$

а τ -ая компонента вектор-столбца $\hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r - \hat{t}_r$ имеет вид:

$$\frac{\frac{t_{\tau 1}^0}{k_{\tau 1}^t} - \frac{r_{\tau}^0}{k_{\tau}^r}}{\frac{1}{k_{\tau 1}^t} + \frac{1}{k_{\tau}^r}} - t_{\tau 1}^0 = \frac{k_{\tau 1}^t k_{\tau}^r}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t} \left(\frac{t_{\tau 1}^0 k_{\tau}^r - r_{\tau}^0 k_{\tau 1}^t}{k_{\tau 1}^t k_{\tau}^r} \right) - t_{\tau 1}^0,$$

то есть

$$\frac{\frac{t_{\tau 1}^0}{k_{\tau 1}^t} - \frac{r_{\tau}^0}{k_{\tau}^r}}{\frac{1}{k_{\tau 1}^t} + \frac{1}{k_{\tau}^r}} - t_{\tau 1}^0 = \frac{-r_{\tau}^0 k_{\tau 1}^t - t_{\tau 1}^0 k_{\tau 1}^t}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t} = -\frac{(r_{\tau}^0 + t_{\tau 1}^0) k_{\tau 1}^t}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t}.$$

Таким образом, исходя из матричного уравнения (4.11), приходим к равенству:

$$Q_{\tau} = \frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}} \frac{k_{\tau 1}^t}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t} - \frac{(r_{\tau}^0 + t_{\tau 1}^0) k_{\tau 1}^t}{k_{\tau}^r + k_{\tau 1}^t} \quad \forall \tau \in \hat{M}.$$

IV. Выразим Q_i для $i \in M \setminus \hat{M}$. Согласно (4.8), $x_{\tau 1} = 0$ для всех $\tau \in M \setminus \hat{M}$, а значит, $s_\tau = 0$ для всех $\tau \in M \setminus \hat{M}$, что, согласно (2.8), приводит к

$$\lambda_\tau = r_\tau^0 \quad \forall \tau \in M \setminus \hat{M}.$$

В таком случае, воспользовавшись (4.5), приходим к

$$Q_\tau = \frac{\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r}{H} - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 \quad \forall \tau \in M \setminus \hat{M},$$

при этом, если подставить (4.12), то

$$Q_\tau = \frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}} - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 \quad \forall \tau \in M \setminus \hat{M}$$

или

$$Q_\tau = \frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}} \quad \forall \tau \in M \setminus \hat{M}.$$

V. Согласно (4.9), $Q_\tau > 0$ для всех $\tau \in \hat{M}$, а значит справедливо неравенство:

$$\frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}} \frac{k_{\tau 1}^t}{k_\tau^r + k_{\tau 1}^t} - \frac{(r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0) k_{\tau 1}^t}{k_\tau^r + k_{\tau 1}^t} > 0 \quad \forall \tau \in \hat{M},$$

что в силу строгой положительности отношения $k_{\tau 1}^t / (k_\tau^r + k_{\tau 1}^t)$ ведет к

$$\frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}} - (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0) > 0 \quad \forall \tau \in \hat{M},$$

а также, в силу того, что

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p} > 0,$$

имеем для любого $\tau \in \hat{M}$:

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0}{k_1^p} - (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0) \left(\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p} \right) > 0,$$

откуда

$$\frac{p_1^0}{k_1^p} - \frac{r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0}{k_1^p} > - \sum_{i \in \hat{M}} \left(\frac{t_{i1}^0 + r_i^0}{k_i^r + k_{i1}^t} - \frac{r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0}{k_i^r + k_{i1}^t} \right) \quad \forall \tau \in \hat{M},$$

или

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 > \sum_{i \in \hat{M}} \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0) \quad \forall \tau \in \hat{M}. \quad (4.13)$$

Согласно (4.10), $Q_\tau \leq 0$ для всех $\tau \in M \setminus \hat{M}$, а значит справедливо неравенство:

$$\frac{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0}{k_1^p}}{\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p}} \leq 0 \quad \forall \tau \in M \setminus \hat{M},$$

что в силу

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{1}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{1}{k_1^p} > 0,$$

приводит к

$$\sum_{i \in \hat{M}} \frac{t_{i1}^0 + r_i^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0}{k_i^r + k_{i1}^t} + \frac{p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0}{k_1^p} \leq 0 \quad \forall \tau \in M \setminus \hat{M}$$

или

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 \leq \sum_{i \in \hat{M}} \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0) \quad (4.14)$$

$$\forall \tau \in M \setminus \hat{M}.$$

VI. Введем Δ_τ^l для всех $\tau \in M$ и l , $1 \leq l \leq m$, такое, что

$$\Delta_\tau^l = \sum_{i=1}^l \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0).$$

Заметим, что если поставщики перенумерованы согласно (4.1), то есть

$$r_1^0 + t_{11}^0 \leq \dots \leq r_m^0 + t_{m1}^0,$$

то

$$\Delta_1^l \leq \Delta_2^l \leq \dots \leq \Delta_m^l \quad \forall l = \overline{1, m},$$

так как, в силу (4.1),

$$\sum_{i=1}^l \frac{k_1^p(r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0)}{k_i^r + k_{i1}^t} \leq \sum_{i=1}^l \frac{k_1^p(r_{\tau+1}^0 + t_{\tau+1,1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0)}{k_i^r + k_{i1}^t},$$

для всех $\tau \in M$ и l , $1 \leq l \leq m$. С другой стороны, если поставщики перенумерованы согласно (4.1), то

$$p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0 \geq \dots \geq p_1^0 - r_m^0 - t_{m1}^0,$$

а значит если существует $\hat{m}$, $1 \leq \hat{m} \leq m$, такой, что

$$p_1^0 - r_{\hat{m}}^0 - t_{\hat{m}1}^0 > \Delta_{\hat{m}}^{\hat{m}} \geq p_1^0 - r_{\hat{m}+1}^0 - t_{\hat{m}+1,1}^0,$$

то

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 > \Delta_{\hat{m}}^{\hat{m}} \geq \Delta_\tau^{\hat{m}} \quad \forall \tau \leq \hat{m},$$

но при этом

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 \leq \Delta_{\hat{m}}^{\hat{m}} \leq \Delta_\tau^{\hat{m}} \quad \forall \tau > \hat{m}.$$

Таким образом, если поставщики перенумерованы согласно (4.1) и $\hat{M}$ состоит из $\hat{m}$ первых индексов множества M , то есть $\hat{M} = \{1, 2, \dots, \hat{m}\}$, то выполняются условия (4.13) и (4.14):

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 > \sum_{i=1}^{\hat{m}} \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0) \quad \forall \tau \leq \hat{m},$$

и

$$p_1^0 - r_\tau^0 - t_{\tau 1}^0 \leq \sum_{i=1}^{\hat{m}} \frac{k_1^p}{k_i^r + k_{i1}^t} (r_\tau^0 + t_{\tau 1}^0 - r_i^0 - t_{i1}^0) \quad \forall \tau > \hat{m},$$

соответственно и, следовательно:

$$x_{\tau 1} \begin{cases} > 0, & \text{при } \tau \leq \hat{m}, \\ = 0, & \text{при } \tau > \hat{m}. \end{cases}$$

Наконец, выразим $\hat{x} = (x_{11}, \dots, x_{\hat{m}1})^T$, воспользовавшись (4.7):

$$\hat{x} = \hat{D}_r^{-1} \hat{Q},$$

при $\hat{D}_r = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_{11}^t}, \dots, \frac{1}{k_{\hat{m}1}^t} \right\}$, получим:

$$\hat{x} = \hat{D}_r^{-1} \left((e_{\hat{m}} - G) \left(\frac{\hat{q}_p - G^T \hat{q}_r}{H} \right) + \hat{B}_r^{-1} \hat{q}_r - \hat{t}_r \right),$$

откуда приходим к (4.2). □

5. Пространственное равновесие: 1 поставщик и n потребителей

Без умаления общности, перенумеруем потребителей таким образом, что

$$p_1^0 - t_{11}^0 \geq \dots \geq p_n^0 - t_{1n}^0. \quad (5.1)$$

Теорема 5.1. *В случае n потребителей, перенумерованных согласно (5.1), и 1 поставщика, при линейных функциях спроса, предложения и транспортировки (2.7)–(2.9), если существует $\hat{n}$, $1 \leq \hat{n} \leq n$, такое, что*

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 > \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0) \quad \forall \tau \leq \hat{n},$$

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 \leq \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0) \quad \forall \tau > \hat{n},$$

то равновесное распределение потоков в задаче (2.1)–(2.6) достигается реализацией следующего шаблона распределения продуктового потока:

$$x_{1\tau} \begin{cases} > 0, & \text{при } \tau \leq \hat{n}, \\ = 0, & \text{при } \tau > \hat{n}, \end{cases}$$

при этом вектор $\hat{x} = (x_{11}, \dots, x_{1\hat{n}})^T$ равен:

$$\hat{x} = \hat{D}_p^{-1} \left(\left(\hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T - e_{\hat{n}} \right) \frac{\hat{q}_r - \hat{B} \hat{B}_p^{-1} \hat{q}_p}{\hat{B}_r - \hat{B} \hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T} + \hat{B}_p^{-1} \hat{q}_p - \hat{t}_p \right), \quad (5.2)$$

где $e_{\hat{n}} = (1, \dots, 1)^T$ при $\dim e_{\hat{n}} = \hat{n} \times 1$,

$$\hat{D}_p = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_{11}^t}, \dots, \frac{1}{k_{1\hat{n}}^t} \right\} \quad \text{и} \quad \hat{t}_p = (t_{11}^0, \dots, t_{1\hat{n}}^0)^T.$$

Доказательство. I. Согласно Лемме 3.1, конкурентное равновесие в задаче (2.1)–(2.6) при линейных функциях спроса, предложения и транспортировки (2.7)–(2.9) достигается реализацией шаблона распределения продуктового потока, удовлетворяющего условиям (3.1)–(3.3), зависимым от значений компонент λ и μ . В свою очередь, λ и μ должны удовлетворять матричному уравнению (3.4):

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & -\hat{B}_r \\ \hat{B}_p & -\hat{B}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_r \\ \hat{q}_p \end{pmatrix},$$

которое можно преобразовать в матричное уравнение (3.8):

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_p & -\hat{B}^T \\ \hat{B} & -\hat{B}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_p \\ \hat{q}_r \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$ содержат только те компоненты исходных векторов, которые соответствуют активным (с ненулевыми оптимальными значениями) переменным спроса и предложения соответственно. При этом, в случае 1 поставщика и n потребителей, матричное уравнение (5.3) будет обладать тем свойством, что $\dim \hat{B}_r = 1 \times 1$.

Согласно Лемме 3.2, блочная матрица из матричного уравнения (5.3) обратима. Более того, в связи с тем, что $\hat{B}_p$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят гарантированно ненулевые элементы:

$$\hat{B}_p = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^r} \right\}_{j \in \hat{N}},$$

$\hat{B}_p$ является неособенной матрицей, а значит можно воспользоваться формулой Фробениуса для нахождения обратной матрицы к матрице, имеющей блочную структуру [1]:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B}_p^{-1} - \hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T H^{-1} \hat{B} \hat{B}_p^{-1} & \hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T H^{-1} \\ -H^{-1} \hat{B} \hat{B}_p^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_p \\ \hat{q}_r \end{pmatrix},$$

где

$$H = -\hat{B}_r + \hat{B} \hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T.$$

Заметим, что в силу $\dim \hat{B}_r = 1 \times 1$, H – скаляр, то есть

$$H^{-1} = \frac{1}{H},$$

а если произведение матриц $\hat{B}_p^{-1}$ и $\hat{B}^T$ обозначить через G , то есть

$$G = \hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T,$$

при

$$G^T = \hat{B} \hat{B}_p^{-1},$$

так как матрица B_p^{-1} – диагональная, то выражение для λ_1 и $\hat{\mu}$ можно записать более компактно:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B}_p^{-1} - \frac{1}{H}GG^T & \frac{1}{H}G \\ -\frac{1}{H}G^T & \frac{1}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_p \\ \hat{q}_r \end{pmatrix},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \hat{B}_p^{-1}\hat{q}_p - \frac{1}{H}GG^T\hat{q}_p + \frac{1}{H}G\hat{q}_r \quad (5.4)$$

и

$$\lambda_1 = -\frac{1}{H}G^T\hat{q}_p + \frac{1}{H}\hat{q}_r. \quad (5.5)$$

II. Согласно Лемме 3.1, компоненты вектора $(x_{11}, \dots, x_{1n})^T$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$x_{1j} = \begin{cases} \frac{\mu_j - \lambda_1 - t_{1j}^0}{k_{1j}^t}, & \text{если } \mu_j - \lambda_1 > t_{1j}^0, \\ 0, & \text{если } \mu_j - \lambda_1 \leq t_{1j}^0, \end{cases} \quad \forall j \in N.$$

В таком случае, можно сказать, что множество $\hat{N}$ состоит из таких индексов j , что

$$\mu_j - \lambda_1 - t_{1j}^0 \begin{cases} > 0 & \text{при } j \in \hat{N}, \\ \leq 0 & \text{при } j \in N \setminus \hat{N}, \end{cases} \quad (5.6)$$

в то время как

$$x_{1j} = \frac{\mu_j - \lambda_1 - t_{1j}^0}{k_{1j}^t}, \quad \forall j \in \hat{N} \quad (5.7)$$

и

$$x_{1j} = 0, \quad \forall j \in N \setminus \hat{N}. \quad (5.8)$$

Введем Q_j для любого $j \in N$ такой, что

$$Q_j = \mu_j - \lambda_1 - t_{1j}^0 \quad \forall j \in N.$$

В таком случае, согласно (5.6), для $j \in \hat{N}$ справедливо:

$$Q_j > 0, \quad (5.9)$$

в то время как для $j \in N \setminus \hat{N}$ справедливо:

$$Q_j \leq 0. \quad (5.10)$$

III. Выразим Q_j для $j \in \hat{N}$, воспользовавшись (5.4) и (5.5):

$$\hat{Q} = (G - e_{\hat{n}}) \left(\frac{\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p}{H} \right) + \hat{B}_p^{-1} \hat{q}_p - \hat{t}_p, \quad (5.11)$$

где $\hat{Q} = (\dots, Q_j, \dots)^T$, $j \in \hat{N}$, и $\hat{t}_p = (\dots, t_{1j}^0, \dots)^T$, $j \in \hat{N}$. Заметим, что

$$G^T \hat{q}_p = \hat{B} \hat{B}_p^{-1} \hat{q}_p = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{\frac{1}{k_{1j}^t}}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}} \left(\frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} + \frac{p_j^0}{k_j^p} \right),$$

в таком случае

$$\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} - \sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} \frac{\frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} + \frac{p_j^0}{k_j^p}}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}},$$

при этом

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} \frac{\frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} + \frac{p_j^0}{k_j^p}}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}} = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} \frac{k_{1j}^t k_j^p}{k_j^p + k_{1j}^t} \frac{t_{1j}^0 k_j^p + p_j^0 k_{1j}^t}{k_{1j}^t k_j^p},$$

то есть

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} \frac{\frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} + \frac{p_j^0}{k_j^p}}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}} = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 k_j^p + p_j^0 k_{1j}^t}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)},$$

а значит

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} - \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 k_j^p + p_j^0 k_{1j}^t}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)} = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 k_{1j}^t - p_j^0 k_{1j}^t}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)} - \frac{r_1^0}{k_1^r},$$

то есть

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0}{k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} - \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 k_j^p + p_j^0 k_{1j}^t}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)} = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r}$$

или

$$\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r}.$$

В свою очередь,

$$H = -\hat{B}_r + \hat{B} \hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T = -\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} - \frac{1}{k_1^r} + \sum_{j \in \hat{N}} \frac{\left[\frac{1}{k_{1j}^t} \right]^2}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}},$$

при этом

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{\left[\frac{1}{k_{1j}^t} \right]^2}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}} = \sum_{j \in \hat{N}} \left[\frac{1}{k_{1j}^t} \right]^2 \frac{k_{1j}^t k_j^p}{k_j^p + k_{1j}^t} = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{k_j^p}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)},$$

а

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r} - \sum_{j \in \hat{N}} \frac{k_j^p}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)} = \sum_{j \in \hat{N}} \frac{(k_j^p + k_{1j}^t) - k_j^p}{k_{1j}^t (k_j^p + k_{1j}^t)} + \frac{1}{k_1^r},$$

то есть

$$- \sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_{1j}^t} - \frac{1}{k_1^r} + \sum_{j \in \hat{N}} \frac{\left[\frac{1}{k_{1j}^t} \right]^2}{\frac{1}{k_{1j}^t} + \frac{1}{k_j^p}} = - \sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{1}{k_1^r}$$

или

$$H = - \sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{1}{k_1^r}.$$

Таким образом, $\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p / H$ является числом, таким, что

$$\frac{\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p}{H} = - \frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r}}, \quad (5.12)$$

которое, согласно (5.11), умножается на все компоненты вектор-столбца $G - e_{\hat{n}}$ или $\hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T - e_{\hat{n}}$. Заметим, что τ -ая компонента вектор-столбца $\hat{B}_p^{-1} \hat{B}^T - e_{\hat{n}}$ имеет вид:

$$\frac{\frac{1}{k_{1\tau}^t}}{\frac{1}{k_{1\tau}^t} + \frac{1}{k_\tau^p}} - 1 = \frac{1}{k_{1\tau}^t} \frac{k_{1\tau}^t k_\tau^p}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} - 1 = \frac{k_\tau^p}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} - 1,$$

то есть

$$\frac{\frac{1}{k_{1\tau}^t}}{\frac{1}{k_{1\tau}^t} + \frac{1}{k_\tau^p}} - 1 = - \frac{k_{1\tau}^t}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t},$$

а τ -ая компонента вектор-столбца $\hat{B}_p^{-1} \hat{q}_p - \hat{t}_p$ имеет вид:

$$\frac{\frac{t_{1\tau}^0}{k_{1\tau}^t} + \frac{p_\tau^0}{k_\tau^p}}{\frac{1}{k_{1\tau}^t} + \frac{1}{k_\tau^p}} - t_{1\tau}^0 = \frac{k_{1\tau}^t k_\tau^p}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} \left(\frac{t_{1\tau}^0 k_\tau^p + p_\tau^0 k_{1\tau}^t}{k_{1\tau}^t k_\tau^p} \right) - t_{1\tau}^0,$$

то есть

$$\frac{\frac{t_{1\tau}^0}{k_{1\tau}^t} + \frac{p_\tau^0}{k_\tau^p}}{\frac{1}{k_{1\tau}^t} + \frac{1}{k_\tau^p}} - t_{1\tau}^0 = \frac{p_\tau^0 k_{1\tau}^t + t_{1\tau}^0 k_\tau^p}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} - t_{1\tau}^0 = \frac{(p_\tau^0 - t_{1\tau}^0) k_{1\tau}^t}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t}.$$

Таким образом, исходя из матричного уравнения (4.11), приходим к равенству:

$$Q_\tau = \frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^t}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^t}} \frac{k_{1\tau}^t}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} + \frac{(p_\tau^0 - t_{1\tau}^0) k_{1\tau}^t}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} \quad \forall \tau \in \hat{N}.$$

IV. Выразим Q_j для $j \in N \setminus \hat{N}$. Согласно (5.8), $x_{1\tau} = 0$ для всех $\tau \in N \setminus \hat{N}$, а значит, $d_\tau = 0$ для всех $\tau \in N \setminus \hat{N}$, что, согласно (2.7), приводит к

$$\mu_\tau = p_\tau^0 \quad \forall \tau \in N \setminus \hat{N}.$$

В таком случае, воспользовавшись (5.5), приходим к

$$Q_\tau = p_\tau^0 - \frac{\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p}{H} - t_{\tau 1}^0 \quad \forall \tau \in N \setminus \hat{N},$$

при этом, если подставить (5.12), то

$$Q_\tau = p_\tau^0 + \frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^t}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^t}} - t_{1\tau}^0 \quad \forall \tau \in N \setminus \hat{N}$$

или

$$Q_\tau = \frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0 + p_\tau^0 - t_{1\tau}^0}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0}{k_1^t}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^t}} \quad \forall \tau \in N \setminus \hat{N}.$$

V. Согласно (5.9), $Q_\tau > 0$ для всех $\tau \in \hat{N}$, а значит справедливо неравенство:

$$\frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^t}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^t}} \frac{k_{1\tau}^t}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} + \frac{(p_\tau^0 - t_{1\tau}^0) k_{1\tau}^t}{k_\tau^p + k_{1\tau}^t} > 0 \quad \forall \tau \in \hat{N},$$

что в силу строгой положительности отношения $k_{1\tau}^t/(k_\tau^p + k_{1\tau}^t)$ ведет к

$$\frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r}} + p_\tau^0 - t_{1\tau}^0 > 0 \quad \forall \tau \in \hat{N},$$

а также, в силу того, что

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r} > 0,$$

имеем для любого $\tau \in \hat{N}$:

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} - \frac{r_1^0}{k_1^r} + (p_\tau^0 - t_{1\tau}^0) \left(\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r} \right) > 0,$$

откуда

$$\frac{p_\tau^0 - t_{1\tau}^0}{k_1^r} - \frac{r_1^0}{k_1^r} > - \sum_{j \in \hat{N}} \left(\frac{t_{1j}^0 - p_j^0}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{p_\tau^0 - t_{1\tau}^0}{k_j^p + k_{1j}^t} \right) \quad \forall \tau \in \hat{N},$$

или

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 > \sum_{j \in \hat{N}} \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0) \quad \forall \tau \in \hat{N}. \quad (5.13)$$

Согласно (5.10), $Q_\tau \leq 0$ для всех $\tau \in N \setminus \hat{N}$, а значит справедливо неравенство:

$$\frac{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0 + p_\tau^0 - t_{1\tau}^0}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0}{k_1^r}}{\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r}} \leq 0 \quad \forall \tau \in N \setminus \hat{N},$$

что в силу

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{1}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{1}{k_1^r} > 0,$$

приводит к

$$\sum_{j \in \hat{N}} \frac{t_{1j}^0 - p_j^0 + p_\tau^0 - t_{1\tau}^0}{k_j^p + k_{1j}^t} + \frac{p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0}{k_1^r} \leq 0 \quad \forall \tau \in N \setminus \hat{N}$$

или

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 \leq \sum_{j \in \hat{N}} \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0) \quad (5.14)$$

$$\forall \tau \in M \setminus \hat{M}.$$

VI. Введем Δ_τ^l для всех $\tau \in N$ и l , $1 \leq l \leq n$, такое, что

$$\Delta_\tau^l = \sum_{j=1}^l \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0).$$

Заметим, что если поставщики перенумерованы согласно (5.1), то есть

$$p_1^0 - t_{11}^0 \geq \dots \geq p_n^0 - t_{1n}^0,$$

то

$$\Delta_1^l \leq \Delta_2^l \leq \dots \leq \Delta_m^l \quad \forall l = \overline{1, n},$$

так как, в силу (5.1),

$$\sum_{j=1}^l \frac{k_1^r (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0)}{k_j^p + k_{1j}^t} \leq \sum_{j=1}^l \frac{k_1^r (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_{\tau+1}^0 + t_{1,\tau+1}^0)}{k_j^p + k_{1j}^t},$$

для всех $\tau \in M$ и l , $1 \leq l \leq m$. С другой стороны, если поставщики перенумерованы согласно (5.1), то

$$p_1^0 - r_1^0 - t_{11}^0 \geq \dots \geq p_n^0 - r_1^0 - t_{1n}^0,$$

а значит если существует $\hat{n}$, $1 \leq \hat{n} \leq n$, такой, что

$$p_{\hat{n}}^0 - r_1^0 - t_{1\hat{n}}^0 > \Delta_{\hat{n}}^{\hat{n}} \geq p_{\hat{n}+1}^0 - r_1^0 - t_{1,\hat{n}+1}^0,$$

то

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 > \Delta_{\hat{n}}^{\hat{n}} \geq \Delta_\tau^{\hat{n}} \quad \forall \tau \leq \hat{n},$$

но при этом

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 \leq \Delta_{\hat{n}}^{\hat{n}} \leq \Delta_\tau^{\hat{n}} \quad \forall \tau > \hat{n}.$$

Таким образом, если потребители перенумерованы согласно (5.1) и $\hat{N}$ состоит из $\hat{n}$ первых индексов множества N , то есть $\hat{N} = \{1, 2, \dots, \hat{n}\}$, то выполняются условия (5.13) и (5.14):

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 > \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0) \quad \forall \tau \leq \hat{n},$$

и

$$p_\tau^0 - r_1^0 - t_{1\tau}^0 \leq \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{k_1^r}{k_j^p + k_{1j}^t} (p_j^0 - t_{1j}^0 - p_\tau^0 + t_{1\tau}^0) \quad \forall \tau > \hat{n},$$

соответственно и, следовательно:

$$x_{1\tau} \begin{cases} > 0, & \text{при } \tau \leq \hat{n}, \\ = 0, & \text{при } \tau > \hat{n}. \end{cases}$$

Наконец, выразим $\hat{x} = (x_{11}, \dots, x_{1\hat{n}})^T$, воспользовавшись (5.7):

$$\hat{x} = \hat{D}_p^{-1} \hat{Q},$$

при $\hat{D}_p = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_{11}^t}, \dots, \frac{1}{k_{1\hat{n}}^t} \right\}$, получим:

$$\hat{x} = \hat{D}_p^{-1} \left((G - e_{\hat{n}}) \left(\frac{\hat{q}_r - G^T \hat{q}_p}{H} \right) + \hat{B}_p^{-1} \hat{q}_p - \hat{t}_p \right),$$

откуда приходим к (5.2). □

6. Выводы и перспективы

Настоящая работа посвящена проблеме анализа возникновения ненулевого продуктового потока между удаленными друг от друга в пространстве поставщиками и потребителями некоторого фиксированного продукта. Проблема была сформулирована в виде задачи равновесного распределения потоков в однопродуктовой сети, представленной ориентированным графом, которая моделирует интегрированный рынок фиксированного продукта с множеством поставщиков и потребителей при линейных функциях спроса, потребления и транспортировки. С математической точки зрения сформулированная задача являлась специальной задачей нелинейной оптимизации на множестве линейных ограничений в виде равенств и требованием неотрицательности искоемых переменных. В исследуемой задаче был получен явный вид условий для выявления активных переменных, а также явный вид оптимальных значений искоемых переменных. Другими словами, в случае линейных функций спроса, предложения и транспортировки были получены аналитические условия возникновения ненулевого потока между удаленными друг от друга в пространстве поставщиками и потребителями. Явный вид условий возникновения ненулевого продуктового потока между поставщиками-потребителями позволит разрабатывать методологические инструменты поддержки принятия решений в области анализа рыночных

отношений в рамках некоторого интегрированного рынка фиксированного продукта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. М.: Наука, 1966.
2. Barrett C.B., Li J.R. *Distinguishing between equilibrium and integration in spatial price analysis* // American Journal of Agricultural Economics. 2002. V. 84, N 2. P. 292–307.
3. Enke S. *Equilibrium among spatially separated markets: solution by electric analogue* // Econometrica. 1951. V. 19, N 1. P. 40–47.
4. Enke S. *Space and value* // The Quarterly Journal of Economics. 1942. V. 56, N 4. P. 627–637.
5. Florian M., Los M. *A new look at static spatial price equilibrium models* // Regional Science and Urban Economics. 1982. V. 12, N 4. P. 579–597.
6. Marshall A. *Principles of economics. 8th ed.*. London: Macmillan and Co., 1920.
7. McNew K. *Spatial market integration: definition, theory, and evidence* // Agricultural and Resource Economics Review. 1996. V. 25, N 1. P. 1–11.
8. Nagurney A. *Network economics: a variational inequality approach*. Amsterdam: Kluwer Academic Publ., 1993.
9. Patriksson M. *The traffic assignment problem: models and methods*. New York: Dover Publ., 1994.
10. Takayama T., Judge G.G. *Equilibrium among spatially separated markets: a reformulation* // Econometrica. 1964. V. 32, N 4. P. 510–524.
11. Samuelson P.A. *Spatial price equilibrium and linear programming* // The American Economic Review. 1952. V. 42, N 3. P. 283–303.

12. Stephens E.C., Mabaya E., von Cramon-Taubadel S., Barrett C.B. *Spatial Price Adjustment with and without Trade* // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. 2012. V. 74, N 3. P. 453–469.

EQUILIBRIUM FLOW ASSIGNMENT IN A SINGLE-COMMODITY NETWORK

Alexandr Y. Krylatov, Saint-Petersburg State University, Dr.Sc.
(a.krylatov@spbu.ru),

Yulia E. Lonyagina, Saint-Petersburg State University
(aykrylatov@yandex.ru).

Abstract: The paper is devoted to the analysis of non-zero commodity flows between distant from each other suppliers and consumers of some certain product. The issue is formulated in the form of a single-commodity equilibrium flow assignment problem. A single-commodity network, presented by a directed graph, models an integrated market of a certain product with multiple suppliers and consumers under linear functions of demand, supply, and transportation. An explicit form of conditions on active variables is obtained as well as an explicit form of variables themselves. An explicit form of conditions on non-zero commodity flow between suppliers and consumers will allow one to develop methodological tools for decision-making support in the field of analysis of spatial market relations in some integrated market of a certain product.

Keywords: nonlinear optimization, equilibrium flow assignment, single-commodity network.