

УДК 519.83, 519.86

ББК 22.18

ДИНАМИКА ПРИСПОСОБЛЕНИЯ В РЕГУЛЯРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТИ

МАРИАННА В. МАТЮШКИНА

Санкт-Петербургский филиал

Национального исследовательского университета

«Высшая школа экономики»

190121, Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, 3А

e-mail: mariannamatuskina04@gmail.com

КСЕНИЯ В. СОБОЛЕВА

Санкт-Петербургский Государственный

Электротехнический университет «ЛЭТИ»

197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5

e-mail: xeniasoboleva7@gmail.com

Вводятся стохастические параметры в модели сетевой игры с производством и экстерналиями знаний. Исходная модель была сформулирована В.Д. Матвеевко и А.В. Королевым и представляла собой обобщение простой двухпериодной модели Ромера, перенесенной на сети. Каждый экономический агент имеет начальный запас блага, который в первом периоде он может использовать для потребления и для инвестиций в знания. Во втором периоде агент получает результаты своих инвестиций, но эти результаты зависят не только от размера его инвестиций, но и от суммарных инвестиций его соседей по сети. Целевая функция каждого агента зависит от его потребления в обоих периодах. Понятие «джекобианского» равновесия в данной модели конкретизируется как «равновесие Нэша

с экстерналиями». Данное равновесие отличается от обычного равновесия Нэша тем, что каждый агент, принимая решение о величине своих инвестиций, рассматривает среду (в которую входят и его инвестиции), как экзогенно заданную. Приведены основные результаты базовой детерминистской модели, в частности, определение динамики приспособления при непрерывном рассмотрении. В данной работе рассматривается стохастическое обобщение базовой модели. Продуктивности агентов имеют не только детерминированную, но и винеровскую составляющие. Получено решение стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику приспособления в регулярной сети. В предшествующих исследованиях переходная динамика между состояниями устойчивого равновесия в сети рассматривалась в детерминированном случае. Оказывается, границы различных сценариев поведения агентов (и сами эти сценарии) в стохастическом случае существенно изменяются по сравнению с детерминистским случаем. В заключении рассматриваются возможные дальнейшие постановки задачи.

Ключевые слова: сетевые игры, дифференциальные игры, регулярная сеть, броуновский процесс, динамика приспособления, стохастические дифференциальные уравнения.

Поступила в редакцию: 17.12.20 *После доработки:* 19.05.21 *Принята к публикации:* 01.09.21

1. Введение

В последние десятилетия развивались исследования в таких областях, как анализ социальных сетей, экономика сетей и игры на сетях (напр., [6], [7]). Многочисленные теоретические результаты в этих областях (см. [8], [9], [11]) привели к широкому распространению реальных сетей, таких как интернет, отношения людей в коллективах и населенных пунктах, отношения между странами и т.д. Однако до сих пор недостаточное внимание в литературе уделялось сетям, связанным с производством.

В [12] рассмотрена модель с производством и экстерналиями знаний, обобщающая модель Ромера с двумя временными периодами [16], где по существу изучается специальный случай полной сети. Агенты, владеющие исходным запасом в первом периоде, находятся

в вершинах сети произвольной формы. Агенты распределяют свой начальный запас между инвестициями в знания и потреблением.

Потребление во втором периоде определяется производством, которое зависит как от инвестиций самого агента, так и от инвестиций его соседей по сети. Полезность агента определяется его потреблением в обоих периодах.

В [12] вводится понятие равновесия Нэша с экстерналиями, при котором, как и при обычном равновесии Нэша, агенты максимизируют свои выигрыши и ни одному из агентов не выгодно менять свою стратегию, в случае, если остальные агенты не меняют своего поведения. Однако в этой модели предполагается, что агент не способен полностью произвольно менять свое поведение, как это позволяет делать равновесие Нэша, а в определенном смысле агент привязан к равновесной ситуации в данной игре. Более точно, в [12] предполагается, что агент принимает решение, в то время как определенная среда сформирована им и его соседями, и он включен в формирование среды в момент принятия решения, но среда в этот момент рассматривается им как экзогенно заданная.

В [12] рассматривались только сети с однородными агентами. В [13] изучалось обобщение модели [12] в котором продуктивности агентов могут быть различными. Выяснялись условия, при которых агент в равновесии ведет себя тем или иным образом: пассивен (не инвестирует), активен (инвестирует часть дохода), гиперактивен (инвестирует весь доход). Также были найдены условия существования внутреннего равновесия (т.е. равновесия, при котором все агенты активны) для некоторых сетей и доказана теорема о сравнении полезностей агентов. Введена динамика сетей в дискретном времени, определено понятие динамической устойчивости равновесий. Переходные процессы между состояниями равновесия, которые возникают при объединении сетей, изучались в [13] также в дискретном времени.

В [15] динамика в сетях с производством и экстерналиями знаний и понятие динамической устойчивости равновесий рассматривались в непрерывном времени. Однако во всех названных работах параметры сетей были детерминированными.

В данной работе рассматривается описание переходной динамики в стохастическом случае, когда продуктивность агента имеет как

детерминистскую, так и броуновскую компоненты. Изучается поведение агентов в регулярной сети, т.е. в такой сети, в которой все агенты имеют одинаковое число соседей. Оказывается, что границы различных сценариев поведения агентов в стохастическом случае сдвигаются по сравнению с детерминированным случаем.

Дальнейшее содержание статьи следующее. Второй раздел содержит описание нашей основной модели и обзор предшествующих результатов. В частности, даны определения равновесия Нэша в сети с производством и экстерналиями знаний, а также динамической устойчивости равновесия. Также во втором разделе приводится характеристика типов поведения агентов, т.е. создаются основные инструменты анализа. В конце раздела формулируется новая модификация модели. Третий раздел содержит динамику регулярной сети в детерминистском и стохастическом случаях. Получено явное выражение динамики агентов сети в форме броуновского случайного процесса (Предложение 3.1). Выполнен качественный анализ решения стохастического уравнения (Следствие 3.2). В заключении подводятся итоги и обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

2. Детерминистская модель и обзор основных результатов

Начнем с описания основной модели и перечисления некоторых ее свойств, так как наша новая модель отличается от исходной модели стохастической природой параметров. Основная модель, которую мы рассматриваем (детерминистская версия) была сформулирована в [12] и представляет собой перенесение на сеть обобщенной модели Ромера [16].

Имеется сеть (неориентированный граф) с m вершинами, $i = 1, 2, \dots, m$; каждая вершина представляет агента. В период 1 каждый агент i обладает начальным запасом блага, e , и использует его частично для потребления в первый период жизни, c_i^1 , и частично для инвестиций в знания, k_i , которые используются в производстве благ для потребления во втором периоде жизни

$$c_2^i : c_1^i + k_i = e, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Инвестиции непосредственно и взаимно-однозначно трансформируются в знания, которые используются в производстве благ для по-

ребления во втором периоде, c_2^i . Предпочтения агента i описываются квадратичной функцией полезности:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + b_ic_2^i,$$

где a – коэффициент насыщения, $b_i > 0$ представляет собой параметр, характеризующий ценность комфорта и здоровья во втором периоде жизни по сравнению с потреблением в первом периоде. Предполагается, $c_1^i \in [0, e]$, полезность возрастает по аргументу c_1^i и функция полезности вогнута (предельная полезность убывает) по c_1^i . Эти предположения гарантируются условием $0 < a < 1/2$.

Средой агента i будем называть сумму инвестиций самого агента и его соседей:

$$K_i = k_i + \tilde{K}_i, \tilde{K}_i = \sum_{j \in N(i)} k_j,$$

где $N(i)$ – множество вершин, соседствующих с вершиной i , $\tilde{K}_i$ будем называть *чистой экстерналией*. Производство в вершине i описывается производственной функцией

$$F(k_i, K_i) = B_ik_iK_i, \quad B_i > 0,$$

которая зависит от уровня знаний в i -ой вершине, k_i , и от среды, K_i , а B_i – технологический коэффициент.

Обозначим произведение b_iB_i через A_i и всегда будем считать, что $a < A_i$. Поскольку увеличение любого из параметров b_i , B_i способствует увеличению потребления во втором периоде, будем называть параметр A_i *продуктивностью*. Будем предполагать, что $A_i \neq 2a$, $i = 1, 2, \dots, t$. При этом, если $A_i > 2a$, будем говорить, что i -ый агент продуктивен, а если $A_i < 2a$, будем говорить, что i -ый агент непродуктивен.

Возможны три типа поведения агента: агент i называется *пассивным*, если он делает нулевые инвестиции, $k_i = 0$ (т.е. потребляет весь свой начальный запас в первом периоде); *активным*, если $0 < k_i < e$; *гиперактивным*, если он делает максимально возможные инвестиции e (т.е. ничего не потребляет в первом периоде).

Рассмотрим следующую игру. Игроками являются агенты $i = 1, 2, \dots, t$. Возможные действия (стратегии) игрока i – это уровни его инвестиций $k_i \in [0, e]$. *Равновесие Нэша с экстерналиями* (для

краткости, *равновесие*) – это профиль уровней знаний (инвестиций) $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*)$, таких что каждое k_i^* является решением следующей задачи $P(K_i^*)$ максимизации полезности i -го игрока при данной среде K_i^* :

$$U_i(c_1^i, c_2^i) \xrightarrow{c_1^i, c_2^i} \max \begin{cases} c_1^i \leq e - k_i, \\ c_2^i \leq F(k_i, K_i^*), \\ c_1^i \geq 0, c_2^i \geq 0, k_i \geq 0, \end{cases}$$

где среда K_i^* определяется профилем $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*)$:

$$K_i^* = k_i^* + \sum_{j \in N(i)} k_j^*.$$

Первые два ограничения задачи $P(K_i^*)$ в точке оптимума, очевидно, выполняются как равенства. Подставляя эти ограничения в целевую функцию, получаем новую функцию (*платежную функцию*, или *косвенную функцию полезности*):

$$V_i(k_i, K_i) = U_i(e - k_i, F_i(k_i, K_i)) = (e - k_i)(e - a(e - k_i)) + A_i k_i K_i = e^2(1 - a) - k_i e(1 - 2a) - a k_i^2 + A_i k_i K_i. \quad (2.1)$$

Если все решения игроков внутренние ($0 < k_i^* < e$), т.е. все игроки активны, то равновесие будем называть *внутренним* равновесием. В противном случае равновесие называется *угловым* равновесием. Угловое равновесие, в котором уровень знаний в каждой вершине равен 0 или e , т.е. все игроки пассивны или гиперактивны, будем называть чисто угловым равновесием. Очевидно, что внутреннее равновесие (если оно существует для данных значениях параметров) определено системой уравнений

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

или, в соответствии с (2.1),

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = e(2a - 1) - 2a k_i + A_i K_i = 0, \quad (2.3)$$

где D_1 обозначает частную производную от функции нескольких переменных по первому аргументу.

В [14] вводится типология вершин. Понятие типов вершин может быть очень просто неформально объяснено. Вершины графа можно раскрасить в S цветов таким образом, чтобы любые две вершины цвета j имели определенное число соседей цвета i (для каждого $i = 1, 2, \dots, t$). Более формально, понятие типов вершин определяется следующим образом.

Определение 2.1. Пусть множество вершин сети $1, 2, \dots, t$ разбито на минимальное число S непересекающихся классов $j = 1, 2, \dots, S$ таким образом, что любые две вершины, принадлежащие одному и тому же классу j , имеют одинаковое для обеих вершин число l_i^j соседей из каждого класса i (для любого $i = 1, 2, \dots, S$). В этом случае классы разбиения будем называть типами вершин. Тип j характеризуется вектором $l(j) = (l_1(j), l_2(j), \dots, l_S(j))$, где $l_i(j)$ – число соседей типа i у каждой вершины типа j .

Опишем алгоритм разбиения множества вершин на типы. Пусть S – текущее число подмножеств разбиения. Изначально $S = 1$.

Итерация алгоритма. Рассмотрим вершины первого подмножества. Если все они имеют одно и то же число соседей каждого из подмножеств $1, 2, \dots, S$, то первое подмножество не меняется. В противном случае мы разбиваем первое подмножество на новые подмножества так, чтобы все вершины каждого нового подмножества имели одно и то же число соседей в каждом подмножестве. Мы поступаем точно так же со вторым, третьим, ..., S -ым подмножеством. Если на какой-либо итерации число подмножеств S не изменилось, то алгоритм свою работу заканчивает. Если же число S возрастает, то происходит новая итерация. Число классов S не убывает в процессе выполнения алгоритма. Так как число классов S ограничено сверху числом вершин сети, алгоритм сходится. Ясно, что данный алгоритм разбивает множество вершин на минимально возможное число классов.

Определение 2.2. *Равновесие, в котором все агенты одного и того же типа делают одинаковые инвестиции, будем называть симметричным равновесием.*

Введем следующие обозначения: $\tilde{A}$ – диагональная матрица, на

главной диагонали которой находятся числа $A_1, A_2, \dots, A_m$, I – единичная $m \times m$ – матрица, M – матрица смежности сети. В этой матрице $M_{ij} = M_{ji} = 1$, если существует дуга, соединяющая вершины i и j , и $M_{ij} = M_{ji} = 0$ – в противном случае. Считаем, что $M_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Система уравнений (2.3) принимает вид

$$(\tilde{A} - 2aI)k + \tilde{A}Mk = \bar{e}, \quad (2.4)$$

где $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T$, $\bar{e} = (e(1 - 2a), e(1 - 2a), \dots, e(1 - 2a))^T$.

Определение 2.3. *Полной сетью называется такая сеть, в которой любая пара вершин соединена ребром.*

Теорема 2.1. *(Теорема 1.1, [13]) Система уравнений (2.4) для полной сети имеет единственное решение.*

Компоненты этого решения мы будем обозначать k_i^s и называть стационарными значениями инвестиций. Для внутреннего равновесия $k_i^* = k_i^s$; $i = 1, 2, \dots, m$.

Центральную роль в анализе равновесий в детерминистской версии модели играет следующее утверждение.

Предложение 2.1. *(Леммы 2.1, 2.2 и следствие 2.1, [13]). В равновесии:*

агент i пассивен тогда и только тогда когда

$$K_i \geq \frac{e(1 - 2a)}{A_i};$$

агент i активен тогда и только тогда когда

$$\frac{e(1 - 2a)}{A_i} < K_i < \frac{e}{A_i}$$

или, что равносильно,

$$k_i = \frac{e(2a - 1) + A_i \tilde{K}_i}{2a - A_i}, \quad 0 < k_i < e;$$

агент i гиперактивен тогда и только тогда когда

$$K_i \geq \frac{e}{A_i}.$$

Следующая теорема является основным инструментом при сравнении полезностей.

Теорема 2.2. (Теорема 1.2, [13]). Пусть W^* и W^{**} – пара сетей, находящихся в равновесии, i – некоторая вершина сети W^* , а j – некоторая вершина сети W^{**} ; при этом агент в вершине i имеет продуктивность A_i , а агент в вершине j имеет продуктивность A_j ; k_i^* , K_i^* , U_i^* – равновесные значения уровня знаний, среды и полезности в i , причем $k_i^* \in (0, e]$; k_j^{**} , K_j^{**} , U_j^{**} – равновесные значения уровня знаний, среды и полезности в j , причем $k_j^{**} \in (0, e]$. Тогда

1. если $A_i K_i^* < A_j K_j^{**}$, то $U_i^* < U_j^{**}$;
2. если $A_i K_i^* \leq A_j K_j^{**}$, то $U_i^* \leq U_j^{**}$;
3. если $A_i K_i^* = A_j K_j^{**}$, то $U_i^* = U_j^{**}$.

Если же $k_i^* = 0$, $K_j^{**} > 0$, то $U_i^* = U(e, 0) < U_j^{**}$.

Замечание 2.1. Если $k_i^* \neq k_j^{**}$, то даже в случае 2 имеем $U_i^* < U_j^{**}$.

Замечание 2.2. Если обе сети W^* и W^{**} находятся во внутреннем равновесии, то

$A_i K_i^* < A_j K_j^{**}$, тогда и только тогда, когда $k_i^* < k_j^{**}$,
 $A_i K_i^* = A_j K_j^{**}$, тогда и только тогда, когда $k_i^* = k_j^{**}$.

В [13] в дискретном времени вводится динамика приспособления, которая может начаться после малого отклонения стратегий агентов от положения равновесия или после объединения сетей, каждая из которых до объединения находилась в положении равновесия.

Динамика приспособления для детерминированной модели введена в дискретном времени в [14] следующим способом. Пусть t – номер временного периода.

Мы представляем себе динамику в сети таким образом, что каждый агент максимизирует полезность, выбирая уровень инвестиций, при этом он рассматривает среду как заданную. Следовательно, если $k_i^t = 0$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} \leq 0$, то $k_i^{t+1} = 0$, если $k_i^t = e$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} \geq 0$, то $k_i^{t+1} = e$. Во всех остальных случаях, т.е. во всех внутренних точках промежутка $[0, e]$, а также если $k_i^t = 0$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} > 0$,

а также если $k_i^t = e$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} < 0$, поведение агента определяется соотношением:

$$-2ak_i^{t+1} + A_i K_i^t - e(1 - 2a) = 0.$$

В [15] динамика приспособления определяется в непрерывном времени. Каждый агент максимизирует свою полезность, выбирая уровень инвестиций; в момент принятия решения он рассматривает свою среду как экзогенно заданную. Этим мотивировано следующее определение.

Определение 2.4. (Определение 5, [15]). Динамика в непрерывном времени задается следующим образом. Если $k_i(t) = 0$, где t – произвольный момент времени, и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} \leq 0$ или $k_i(t) = e$ и $D_1 V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} \geq 0$, то $\dot{k}_i(t) = 0$; во всех остальных случаях $k_i(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{k}_i = \frac{A_i}{2a} \tilde{K}_i + \frac{A_i - 2a}{2a} k_i - \frac{e(1 - 2a)}{2a}.$$

Определение 2.5. (Определение 6, [15]). Равновесие называется устойчивым, если после малого отклонения одного из агентов от равновесия начинается динамика, которая возвращает сеть в начальное состояние. В противном случае равновесие называется неустойчивым.

Следующей естественной задачей является отказ от детерминизма и переход к стохастическим параметрам агентов в нашей модели. Предположение о наличии стохастической компоненты продуктивностей агентов представляется совершенно реалистическим, в то время как начальный запас агентов по своей природе и смыслу является постоянной величиной.

В новой версии модели продуктивность каждого агента имеет не только детерминированную A_i , но также и броуновскую (винеровскую) составляющую αW_t^i ($W_0 = 0$). Таким образом, полная продуктивность i -го агента равна теперь $A_i + \alpha W_t^i$. Остальные предположения остаются теми же самыми, что и в нашей основной модели.

В [13], [15] много внимания уделено динамике приспособления, которая в детерминированном случае возникает при отклонении поведения каких-либо агентов от положения равновесия или при объединении сетей, каждая из которых до объединения находилась в

положении равновесия. В нашем стохастическом расширении модели [12] – [15] мы также будем рассматривать динамику приспособления на примере регулярной сети, состоящей из однородных агентов.

Уравнение динамики агента i теперь принимают вид

$$\dot{k}_i = \left(\frac{A_i + \alpha_i \dot{W}_t^i}{2a} - 1 \right) k_i + \frac{A_i + \alpha_i \dot{W}_t^i}{2a} \tilde{K}_i - \frac{e(1 - 2a)}{2a}, \quad (2.5)$$

или в дифференциальной форме

$$dk_i = \left(\frac{A_i}{2a} - 1 \right) k_i dt + \frac{\alpha_i}{2a} k_i dW_t^i + \frac{A_i}{2a} \tilde{K}_i dt + \frac{\alpha_i}{2a} \tilde{K}_i dW_t^i - \frac{e(1 - 2a)}{2a} dt.$$

Хорошо известно, что сильное решение данного стохастического уравнения существует и единственно (см., напр., [3, стр. 40, Теорема 1]).

Замечание 2.3. Точка над W_t в (2.5), разумеется, не означает операции дифференцирования по времени t . Производной у винеровского процесса не существует ни в одной точке. Однако данная запись применяется многими авторами (см. [2], стр. 288) и является традиционной. Другие же авторы (см., напр. [1], [4]) этой записи не используют.

3. Динамика приспособления в регулярной сети

Пусть все агенты сети однородны (имеют одинаковую продуктивность).

Определение 3.1. *Сеть, в которой все вершины имеют одну и ту же степень (одинаковое число соседей) называется регулярной. Регулярную сеть, состоящую из m вершин степени n будем называть регулярной сетью типа (m, n) .*

Таким образом, полная сеть порядка m представляет собой частный случай регулярной сети, а именно сеть $(m, m - 1)$.

Замечание 3.1. Так как среда у всех агентов полной сети одинакова, в любом равновесии, а также и в любом переходном процессе при одинаковых начальных условиях, однородные агенты в полной сети делают одинаковые инвестиции. Таким образом, в полной сети, состоящей из однородных агентов, имеет место гомофилия: все агенты при одинаковых начальных условиях ведут себя одинаково. То же

самое можно сказать и о регулярной сети, если в начальный момент все агенты делали одинаковые инвестиции. В частности, это имеет место, если в начальный момент сеть находилась в симметричном равновесии.

Рассмотрим динамику в регулярной сети, состоящей из m однородных агентов, расположенных в вершинах степени n . Мы предположили, что детерминированная составляющая продуктивности A каждого агента не зависит от времени, изменения продуктивностей агентов вызваны одними и теми же случайными влияниями в сети, а начальные инвестиции каждого агента в момент времени $t = 0$ были $k(0) = k_0$. Тогда продуктивность агента равна $A + \alpha W_t$, и динамика любого агента такой сети выражается следующим уравнением:

$$\dot{k} = \left(\frac{nA + n\alpha \dot{W}_t}{2a} - 1 \right) k - \frac{e(1-2a)}{2a}, \quad (3.1)$$

или, в дифференциальной форме,

$$dk = \left(\frac{nA}{2a} - 1 \right) k dt + \frac{n\alpha}{2a} k dW_t - \frac{e(1-2a)}{2a} dt. \quad (3.2)$$

Предложение 3.1. *Если в начальный момент все агенты регулярной сети типа (m, n) делали одинаковые инвестиции в знания k_0 , то динамика инвестиций любого агента такой сети выражается уравнением:*

$$k(t) = \exp\{-\Psi_t\} \left(k_0 - \frac{e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp\{\Psi_\tau\} d\tau \right) = \exp\left\{ \lambda t + \mu W_t - \frac{\mu^2}{2} t \right\} k_0 - \frac{e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp\left\{ \lambda(t-\tau) - \frac{\mu^2}{2}(t-\tau) + \mu(W_t - W_\tau) \right\} d\tau. \quad (3.3)$$

где

$$\lambda = \frac{nA}{2a} - 1, \quad \mu = \frac{n\alpha}{2a}, \quad \Psi_t = -\lambda t - \mu W_t + \frac{1}{2} \mu^2 t. \quad (3.4)$$

Доказательство. Умножая уравнение (3.2) на $\exp\{\Psi_t\}$, с учетом обозначений (3.4), получаем

$$\exp\{\Psi_t\} dk = \lambda k \exp\{\Psi_t\} dt + \mu k \exp\{\Psi_t\} dW_t - \frac{e(1-2a)}{2a} \exp\{\Psi_t\} dt. \quad (3.5)$$

Заметим, что по формуле Ито:

$$\begin{aligned} d \exp\{\Psi_t\} &= -\lambda \exp\{\Psi_t\}dt - \mu \exp\{\Psi_t\}dW_t + \frac{1}{2}\mu^2 \exp\{\Psi_t\}dt + \\ &+ \frac{1}{2}\mu^2 \exp\{\Psi_t\}dt = \exp\{\Psi_t\}(-\lambda dt - \mu dW_t + \mu^2 dt), \end{aligned} \quad (3.6)$$

и, следовательно, учитывая (3.5) и (3.6):

$$\begin{aligned} d(k \exp\{\Psi_t\}) &= \exp\{\Psi_t\}dk + kd \exp\{\Psi_t\} + dkd \exp\{\Psi_t\} = \\ &= \lambda k \exp\{\Psi_t\}dt + \mu k \exp\{\Psi_t\}dW_t - \frac{e(1-2a)}{2a} \exp\{\Psi_t\}dt + \\ &+ k \exp\{\Psi_t\}(-\lambda dt - \mu dW_t + \mu^2 dt) - \mu^2 k \exp\{\Psi_t\}dt = \\ &= -\frac{e(1-2a)}{2a} \exp\{\Psi_t\}dt. \end{aligned}$$

Записывая данный результат в конечной форме, получаем (3.3). $\square$

Предложение 3.2. Математическое ожидание геометрического броуновского движения без сноса, т.е. $\exp\{\mu W_t\}$, где $W_0 = 0$, равно $\exp\{\frac{\mu^2}{2}t\}$.

Доказательство. По формуле Ито

$$d \exp\{\mu W_t\} = \mu \exp\{\mu W_t\}dW_t + \frac{1}{2}\mu^2 \exp\{\mu W_t\}dt,$$

или, в конечной форме,

$$\exp\{\mu W_t\} = \exp\{\mu W_0\} + \mu \int_0^t \exp\{\mu W_s\}dW_s + \frac{1}{2}\mu^2 \int_0^t \exp\{\mu W_s\}ds. \quad (3.7)$$

Беря математическое ожидание от обеих частей (3.7) и учитывая свойства броуновских процессов $E \left[\int_0^t \exp\{\mu W_s\}dW_s \right] = 0$, получаем

$$E [\exp\{\mu W_t\}] = E [\exp\{\mu W_0\}] + \frac{1}{2}\mu^2 \int_0^t E [\exp\{\mu W_s\}] ds,$$

или

$$\frac{d}{dt} E [\exp\{\mu W_t\}] = \frac{1}{2}\mu^2 E [\exp\{\mu W_t\}], \quad E [\exp\{\mu W_0\}] = 1.$$

Решая данное дифференциальное уравнение, находим

$$E [\exp\{\mu W_t\}] = \exp\{\frac{\mu^2}{2}t\}.$$

$\square$

Замечание 3.2. Математическое ожидание стохастического процесса $k(t)$, соответствующего (3.3), равно

$$\begin{aligned} E[k(t)] &= \exp\{\lambda t\}k_0 + \frac{e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp\{\lambda(t-\tau)\}d(t-\tau) = \\ &= \exp\{\lambda t\}k_0 + \frac{e(1-2a)}{2a} \exp\{\lambda(t-\tau)\}|_0^t = \\ &= (k_0 - k^s) \exp\left\{\frac{nA-2a}{2a}t\right\} + k^s, \end{aligned}$$

где

$$k^s = \frac{e(1-2a)}{nA-2a}$$

– стационарное значение инвестиций.

Таким образом, динамика математического ожидания величины инвестиций в знания агента регулярной сети совпадает с динамикой его инвестиций в детерминистском случае, когда $\alpha = 0$, т.е. с решением уравнения (3.1) с начальными условиями $k(0) = k_0$, которое, очевидно, также равно

$$k(t) = (k_0 - k^s) \exp\left\{\frac{nA-2a}{2a}t\right\} + k^s. \quad (3.8)$$

Однако границы различных сценариев поведения агента (и само поведение) в стохастическом случае очевидным образом изменяются по сравнению с детерминистским случаем.

Замечание 3.3. В детерминистском случае, из двух возможных угловых равновесий равновесие $k = 0$ всегда возможно, согласно предложению 2.1, и всегда устойчиво, потому что, согласно формуле (2.1),

$$D_1V(0, 0) = e(2a - 1) < 0,$$

а равновесие $k = e$, согласно предложению 2.1, возможно, если $A \geq 1$, и устойчиво, если $A > 1$, так как согласно (2.1),

$$D_1V(e, e) = e(2a - 1) - 2ae + Ane = Ane - e.$$

Внутреннее равновесие

$$k^* = k^s = \frac{e(1-2a)}{nA-2a},$$

в соответствии с предложением 2.1, возможно тогда и только тогда когда $0 < k^s < e$, т. е. когда $A > 1/n$.

Внутреннее равновесие неустойчиво, так как корень характеристического уравнения для (3.1) в детерминистском случае ($\alpha = 0$) при тех значениях параметров, при которых равновесие возможно, положителен: $\lambda = (nA - 2a)/2a > 0$.

Следствие 3.1. *В детерминистском случае возможны следующие варианты.*

1) $A < \frac{2a}{n} < 1$. Тогда $k^s < 0$, $\lambda < 0$, поэтому при любом начальном значении $k_0 \in [0, e]$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

2) $\frac{2a}{n} = A < 1$, $n > 2$. Тогда, очевидно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

3) $\frac{2a}{n} < A < 1$, $n > 1$. Тогда $k^s > e$, $\lambda > 0$, поэтому при любом начальном значении $k_0 \in [0, e]$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

4) $A \geq 1 > 2a$. Тогда $\lambda > 0$; при этом $k^s \in (0, e)$, если $n > 1$, и $k^s = e$, если $A = 1$, $n = 1$. Возможны три случая. Если $k_0 \in [0, k^s)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

Если $k_0 \in (k^s, e]$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = e.$$

Если же $k_0 = k^s$ то агент остается в этом неустойчивом равновесии $k = k^s$, но при малейшем отклонении от него, будет продолжать двигаться в ту же сторону, в которую произошло отклонение, и придет, соответственно, к одному из двух устойчивых равновесий $k = 0$ или $k = e$.

В стохастическом случае мы будем использовать закон повторного логарифма.

Теорема 3.1. (Закон повторного логарифма, [10]) Для одномерного броуновского движения W_t , имеет место равенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \quad a.s.,$$

где *a.s.* обозначает почти на верное, т.е. за исключением множества исходов меры ноль.

Перепишем выражение (3.3), принимая во внимание обозначения (3.4), следующим образом:

$$k(t) = \exp\left\{\frac{nA-2a}{2a}t + \frac{n\alpha}{2a}W_t - \frac{n^2\alpha^2}{8a^2}t\right\} \times \\ \times \left(k_0 - \frac{e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp\left\{-\frac{nA-2a}{2a}\tau - \frac{n\alpha}{2a}W_\tau + \frac{n^2\alpha^2}{8a^2}\tau\right\} d\tau\right). \quad (3.9)$$

Для проведения качественного анализа, т.е. выяснения поведения решения при $t \rightarrow \infty$, нам важно знать, в случае $A > \frac{2a}{n} + \frac{n\alpha^2}{4a}$, достигает ли значение интегрального члена в правой части выражения (3.9) значения k_0 при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 3.4. Плотность распределения случайной величины

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{nA-2a}{2a}\tau - \frac{n\alpha}{2a}W_\tau + \frac{n^2\alpha^2}{8a^2}\tau\right\} d\tau$$

если $A > \frac{2a}{n} + \frac{n\alpha^2}{4a}$, в соответствии с [5], равна

$$f(k) = \frac{\left(\frac{n^2\alpha^2}{8a^2}\right)^{-\frac{4a(nA-2a)}{n^2\alpha^2}+1}}{\Gamma\left(\frac{4a(nA-2a)}{n^2\alpha^2} - 1\right)} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{8a^2}{n^2\alpha^2 k}\right)}{k^{\frac{4a(nA-2a)}{n^2\alpha^2}}},$$

где Γ обозначает гамма-функцию, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp\{-t\} dt$, $z \in C$, $Re z > 0$.

Тогда вероятность того, что величина

$$\frac{e(1-2a)}{2a} \cdot \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{nA-2a}{2a}\tau - \frac{n\alpha}{2a}W_\tau + \frac{n^2\alpha^2}{8a^2}\tau\right\} d\tau$$

не достигнет при $t \rightarrow \infty$ величины k_0 , равна

$$\hat{P} = \frac{\left(\frac{n^2\alpha^2}{8a^2}\right)^{-\frac{4a(nA-2a)}{n^2\alpha^2}+1}}{\Gamma\left(\frac{4a(nA-2a)}{n^2\alpha^2} - 1\right)} \cdot \int_0^{\frac{2ak_0}{e(1-2a)}} \frac{\exp\left(-\frac{8a^2}{n^2\alpha^2 k}\right)}{k^{\frac{4a(nA-2a)}{n^2\alpha^2}}} dk. \quad (3.10)$$

Следствие 3.2. В стохастическом случае возможны следующие варианты.

1) $A < \frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a}$. Тогда, в соответствии с законом повторного логарифма, мы имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0 \quad a.s.$$

2) $A = \frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a}$. Тогда процесс $k(t)$ будет флуктуировать между 0 и e .

3) $A > \frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a}$. Тогда с вероятностью $\hat{P}$, которая определена (3.10), мы получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = e$$

и с вероятностью $1 - \hat{P}$, соответственно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

Доказательство. Из закона повторного логарифма (теорема 3.1) следует, что первый сомножитель в выражении (3.9), т.е.

$$k(t) = \exp\left\{\frac{nA - 2a}{2a}t + \frac{n\alpha}{2a}W_t - \frac{n^2\alpha^2}{8a^2}t\right\}$$

при $t \rightarrow \infty$ стремится к 0 почти наверное или стремится к ∞ почти наверное в зависимости от знака величины $A - (\frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a})$.

Из замечания 3.4 следует, что второй сомножитель в выражении (3.9) с вероятностью $\hat{P}$ (3.10) остается положительным при любом t , а с вероятностью $1 - \hat{P}$ становится отрицательным начиная с некоторого момента t .

При этом значение $k(t)$ в нашей модели лежит в пределах от 0 до e , таким образом, в случае роста, при достижении правой частью выражения (3.9) величины e значение $k(t)$ остается равным e , а в случае убывания, при достижении правой частью выражения (3.9) нуля значение $k(t)$ остается равным 0.

Поэтому, если $A < \frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a}$, то независимо от поведения второго сомножителя (3.9) значение $k(t)$ почти наверное стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Если $A = \frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a}$, то первый сомножитель в (3.9) равен $\exp\{\frac{n\alpha}{2a}W_t\}$, поэтому процесс $k(t)$ будет флуктуировать между 0 и e .

Если же $A > \frac{2a}{n} + \frac{n^2\alpha^2}{4a}$, то поведение $k(t)$ при $t \rightarrow \infty$ будет зависеть от знака второго сомножителя в (3.9). Если этот сомножитель остается положительным (вероятность этого $\hat{P}$), то $k(t)$ стремится к ϵ . Если же знак второго сомножителя в (3.9) начиная с некоторого момента t станет отрицательным, то $k(t)$ стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. $\square$

4. Заключение

В данной статье рассматривается развитие модели [12]–[15]. Рассматривается описание переходной динамики в стохастическом случае, когда продуктивность агентов имеет не только детерминированную, но и броуновскую составляющие. В предшествующих исследованиях переходная динамика между состояниями устойчивого равновесия в сети рассматривалась только в детерминированном случае. Оказывается, границы различных сценариев поведения агентов (и само поведение) в стохастическом случае смещаются по сравнению с детерминированным случаем. Мы получили явное выражение для динамики приспособления агентов полной сети (предложение 3.1). Был проведен качественный анализ поведения решения стохастического уравнения (следствие 3.2). Тем самым, было установлено, в каком направлении и с какой вероятностью будет развиваться случайный процесс и в какое состояние он придет в конечном итоге.

Следующей задачей является изучение переходной динамики в полных и регулярных стохастических сетях с агентами, имеющими разные продуктивности и с произвольными корреляционными функциями между винеровскими составляющими параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белопольская Я.И. *Стохастические дифференциальные уравнения*. СПб.: Лань, 2019
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. Киев: Наукова думка, 1968.
4. Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 2003.
5. Borodin A.N., Salminen P. *Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae*. Birkhauser Verlag. Basel. Boston. Berlin. 1996.
6. Bramoullé Y., Kranton R., D'Amours M. *Strategic interaction and networks* // Amer. Econ. Review. 2014. Vol. 104(3). P. 898–930.
7. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega-Redondo F., Yariv L. *Network games* // Review of Econ. Studies. 2010. Vol. 77. P. 218–244.
8. Garmash M.V., Kaneva X.A. *Game equilibria and adjustment dynamics in full networks and in triangle with heterogeneous agents* // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81(6). P. 1149–1165.
9. Jackson M.O., Zenou Y. *Games on networks* // In: Young P. and Zamir S. eds., *Handbook of game theory*. 2014. Vol. 4. P. 95–163.
10. Lamperti J. *Stochastic processes*. Springer – Verlag. New York, 1977.
11. Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. *On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network* // Int. Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. Vol. 4(4). P. 475–492.
12. Matveenko V. D., Korolev A.V. *Network game with production and knowledge externalities* // Contributions to Game Theory and Management. 2015. Vol. 8. P. 199–222.
13. Matveenko V., Korolev A., Zhdanova, M. *Game equilibria and unification dynamics in networks with heterogeneous agents* // Int. Journal of Engineering Business Management. 2017. Vol. 9. P. 1–17.

14. Matveenko V.D., Korolev A.V. *Knowledge externalities and production in network: game equilibria, types of nodes, network formation* // Int. Journal of Computational Economics and Econometrics. 2017. Vol. 7(4). P. 323–358.
15. Matveenko V., Garmash M., Korolev A. *Game Equilibria and Transition Dynamics in Networks with Heterogeneous Agents* // In: Frontiers of Dynamic Games. 2018. / Ed. by L.A. Petrosyan, V.V. Mazalov, N.A. Zenkevich. Birkhauser/Springer. Chapter 10. P. 165–188.
16. Romer P.M. *Increasing returns and long-run growth* // The Journal of Political Economy. 1986. Vol. 94. P. 1002–1037.

ADJUSTMENT DYNAMICS IN A REGULAR STOCHASTIC NETWORK

Marianna V. Matushkina, National Research University Higher School of Economics at St. Petersburg
(mariannamatushkina04@gmail.com),

Xenia V. Soboleva, Saint Petersburg State Electrotechnical University (xeniasoboleva7@gmail.com).

Abstract: Stochastic parameters are introduced in the network game model with production and knowledge externalities. The original model was formulated by V. D. Matveenko and A.V. Korolev and was a generalization of a simple two-period Romer model transferred to networks. Each economic agent has an initial supply of goods, which in the first period it can use for consumption and for investment in knowledge. In the second period, it receives the results of its investments, but these results depend not only on the size of its investments, but also on the total investments of its neighbors in the network. The target function of each agent depends on its consumption in both periods. The concept of "Jacobian" equilibrium in this model is concretized as "Nash equilibrium with externalities". This equilibrium differs from the usual Nash equilibrium in that each agent, when making a decision about the size of its investment, considers the environment (which includes its investment) as exogenously defined. The main results of the basic deterministic model are presented, in particular, the definition of the adjustment dynamics under continuous consideration. In this paper, we consider a stochastic generalization of the basic model. Agent productivity has not only deterministic, but also Brown components. The explicit solution of stochastic differential equations describing the adjustment dynamics is obtained. In previous studies, the transition dynamics between stable equilibrium states in the network was considered in the deterministic case. It turns out that the boundaries of various scenarios of agent behavior (and these scenarios themselves) in the stochastic case change significantly compared to the deterministic case. In conclusion, possible further statements of the problem are considered.

Keywords: network games, differential games, regular network, Brownian process, Nash equilibrium, adjustment dynamics, stochastic differential equations.