Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.1, с. 49–84

УДК 519.876.2
ББК 22.18

ОГРАНИЧЕННАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

Дмитрий А. Новиков
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, д.65
e-mail: novikov@ipu.ru

Формулируется условие ограничения рациональности, которое гласит, что при совместном решении задач управления, вычислений и связи (C^3) требования реального времени могут не дать возможности найти оптимальное решение (управляющее воздействие), вынуждая использовать почти оптимальные решения (наилучшие из найденных при имеющихся ограничениях на процедуру поиска). Это условие связывает между собой и демонстрирует единство и глубокую взаимосвязь таких распространенных в управлении и оптимизации концепций, как: необходимое разнообразие, ограниченная рациональность, аналитическая сложность, эвристики, рекорды в оптимизации в реальном времени. Применительно к задаче институционального управления организационно-техническими системами приводится ряд примеров решения задач минимизации погрешности или сложности, а также поиска: критической пропускной способности канала связи, критического темпа вычислений и максимального числа управляемых подсистем.

Ключевые слова: принятие решений, ограниченная рациональность, сетевое управление, теория иерархических игр, аналитическая сложность, реальное время, закон необходимого разнообразия, эвристика, типовое решение.

Поступила в редакцию: 03.11.21 *После доработки*: 10.01.22 *Принята к публикации*: 10.03.22

©2022 Д.А. Новиков

1. Введение

Для анализа и синтеза систем *управления*, понимаемого как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения [19, 27], необходимо иметь модель управляемой системы, описывающую зависимость состояния последней от управляющих воздействий. Решение задачи поиска *оптимального* управления заключается в поиске управления, экстремизирующего при заданных ограничениях значение заданного *критерия эффективности*, определенного на множестве состояний управляемой системы и управляющих воздействий. То есть, управление неразрывно связано с *оптимизацией*.

Нахождение управляющей системой решения соответствующей задачи оптимизации требует получения информации (об управляемой системе, обстановке и т.п.), осуществления вычислений, реализации управляющих воздействий, а каждый из этих этапов требует временных затрат, в т.ч. с учетом имеющихся ограничений на пропускную способность каналов связи, вычислительные ресурсы и др. Поэтому, особенно в условиях реального времени, либо управляющая система не всегда может «успеть» найти и реализовать оптимальное управляющее воздействие, вынужденно ограничиваясь использованием почти оптимальных, рациональных решений; либо приходится формулировать условия на соотношение ограничений, при которых полный цикл решения задачи управления возможен в реальном времени (примером являются результаты класса DataRateTheorems см., например, пионерские работы [55, 56] и обзоры в монографиях [26, 54], статье [3] и в разделе 3.3 книги [27]).

В рамках такого раздела теории автоматического управления, как *сетевое управление* эта проблематика получила условное название C^3 (control + communication + computing) – совместного решения задач управления, вычислений и связи. В исследованиях организационных систем и моделях принятия решений (в т.ч., управленческих)похожая проблематика, инициированная нобелевским лауреатом Гербертом Саймоном, именуется *ограниченной рациональностью*.

Основной целью настоящей работы является установление качественного соответствия и поиск общих оснований для этих двух боль-

ших ветвей теории управления, а также применение предложенных подходов к решению ряда задач в рамках теоретико-игровых моделей управления организационно-техническими системами.

Для этого во втором разделе проводится краткий обзор исследовательских подходов к классической и ограниченной рациональности, в третьем формулируется ключевое *условие ограничения рациональности*, учитывающие временные/ресурсные ограничения на процесс принятия/оптимизации решений. В четвертом разделе ставится и решается задача институционального управления организационными системами, в которых решения принимаются т.е., решаются соответствующие оптимизационные задачи не только управляющей системой, но и управляемой системой в силу активности и целенаправленности поведения входящих в нее людей. В пятом разделе, посвященном аналитической сложности и погрешности решенийзадач управления,условие ограничения рациональностидетализируется применительно к задаче институционального управления в рамках временных, ресурсных и других ограничений. Там же приводится ряд примеров решения более частных задач. Шестой раздел посвящен эвристикам и типовым решениям. Заключение включает краткое обсуждение основных результатов.

2. Классическая и ограниченная рациональность

Рациональное поведение субъектов *(агентов)* традиционно моделируется их стремлением к увеличению значения некоторой функции (функции полезности, выигрыша, целевой функции и т.д.), определенной на множестве альтернатив *(действий)*, которые может выбирать агент, и *обстановок* (внешних условий его деятельности).

Рассмотрим одного агента (в одноэлементных моделях индекс, обозначающий номер агента, будет опускаться), интересы которого отражены его действительнозначной *целевой функцией* $f(\theta, y)$ (или *функцией полезности*), определенной на декартовом произведении множества A возможных действий y и множества Ω возможных *обстановок* θ его деятельности: $y \in A, \theta \in \Omega, f : \Omega \times A \to \Re^1$. Тогда *множеством рационального выбора* будет множество действий, доставляющих максимум целевой функции:

$$C^0(f(\cdot,\cdot), A, \theta) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} f(\theta, y). \tag{2.1}$$

Решение, принадлежащее множеству (2.1), называется *оптимальным* при обстановке θ.

Отметим, что *экстремизационный* принцип (2.1) принятия решений существенно детерминистичный (не учитывающий возможную неопределенность, например, обстановки), т.е. предполагает, что обстановка агенту на момент принятия решений полностью известна. В то же время, *теория полезности* в XX веке получила интенсивное развитие в рамках вероятностных моделей, в которых агенту на момент принятия решений известно только распределение вероятностей на множестве возможных обстановок. Рациональным при этом является максимизация им математического ожидания своей функции полезности [15, 28]. Свойствам функции полезности посвящено множество исследований. Ее нелинейность отражает отношение агента к риску (например, агенты с вогнутой функцией полезности несклонны к риску) [59], большая скорость убывания в отрицательной области отражает меньшую желательность для агента потерь по сравнению с аналогичным выигрышем [51] и т.д. Обзор теорий полезности и эмпирических данных из различных областей приведен в [38].

Экстремизационный принцип (2.1) принятия оптимальных решений соответствует так называемой *классической рациональности или полной рациональности* (full rationality). В работах Г. Саймона было предложено рассматривать так называемые модели *ограниченной рациональности* (OP, bounded rationality), то есть отказаться от предположения о стремлении агента к достижению абсолютного максимума функции полезности, заменив его предположением о стремлении к достижению определенного уровня полезности, быть может, зависящего от величины оптимума (первая статья Г. Саймона - [63], книга [65], последующие статьи [64, 66]). Такое поведение вызвано тем, что могут быть ограничены:

1) когнитивные способности агента:

- получать, обрабатывать и передавать информацию (в т.ч. производить вычисления) за требуемое время;

- оперировать несколькими целями или критериями;

2) информация об обстановке и/или последствиях различных решений.

Другими словами, *ограниченная рациональность имеет место,*

когда у субъекта нет знаний, времени, возможности или желания искать оптимальное решение. Отметим, что первые три «причины» соответствуют наличию ограничений (нехватки, отсутствия чего-либо), и именно ограничения, учитываемые в процессе принятия решений, в основном, рассматриваются ниже. В то время как отсутствие желания искать оптимальное решение, т.е. введенная первоначально Г. Саймоном трактовка ограниченной рациональности как удовлетворенности определенным уровнем притязаний, не имеет природы ограничения.

Рассмотрим, отчасти следуя [18, 22], ряд моделей ограниченной рациональности.

Введем следующее предположение о целевой функции и допустимых множествах: пусть функция $f(\cdot,\cdot)$ непрерывна, а множества A и Ω выпуклы и компактны. Очевидно, что в рамках этих предположений множество $C^0(f(\cdot,\cdot),A,\theta)$ не пусто.

Обозначим через $y^*(\theta) = \arg\max\limits_{y\in A} f(\theta,y)$. Отметим, что существует целое семейство целевых функций, имеющих одно и то же множество максимумов (1). Так, из теории полезности известно, что целевая функция определена с точностью до положительного линейного преобразования, то есть для любого числа a и любого положительного числа b функции $u(y)$ и $g(y) = a + b\,u(y)$ имеют одинаковые множества максимумов: $C^0(u(\cdot),A) = C^0(g(\cdot),A)$. Поэтому для простоты будем считать, что $\forall\theta\in\Omega : f(\theta,y^*(\theta)) \geq 0$.

Следуя [22], рассмотрим три типа ограниченной рациональности.

Первый тип ОР. Предположим, что агент стремится к обеспечению некоторого уровня индивидуальной полезности U (называемого *уровнем притязаний* – aspiration level), то есть множеством рационального выбора можно считать

$$C^I(f(\cdot,\cdot),A,\theta,U) = \{y\in A | f(\theta,y)\geq U\}. \tag{2.2}$$

В более общем случае уровень притязаний может зависеть от множества допустимых действий: $U(A)$. Глубокие результаты о связи между принципами принятия решений (2.1) и (2.2) получены в [1].

В качестве небольшого отступления сделаем важное методологическое замечание. Рациональность или «иррациональность» поведения не может быть определена в отрыве от модели этого пове-

дения. Модель поведения агента включает конкретные предположения о процедурах принятия им решений и может инкапсулировать в той или иной степени сведения из экономики, социологии, когнитивных и других наук. Так, например, экстремизационная модель (2.1) предполагает выбор агентом действия, максимизирующего его полезность. Выбор агентом любого другого «неоптимального», но, удовлетворяющего, например, модели/принципу (2), действия не будет рациональным с точки зрения экстремизационной модели, т.е. этот выбор можно считать «ограниченно рациональным». И наоборот, рациональный с точки зрения принципа (2.2) выбор будет «ограниченно рациональным» с точки зрения принципа (2.1). И так далее – в теории принятия решений, теории выбора, теории игр предложены уже, наверное, сотни моделей принятия решений, использующих аппарат функций полезности, функций выбора, отношений предпочтения и др. (см. обзоры в монографиях и учебниках [1, 2, 11, 25]). Соответственно, рациональное/оптимальное в рамках одной модели поведение будет «ограничено рациональным» (или даже недопустимым) в рамках других моделей. Более того, Ю.Б. Гермейер считал, что при известном решении всегда можно подобрать критерий (т.е. построить соответствующую модель), при котором именно это решение будет «оптимальным» [7]. С исторической же точки зрения термин ограниченная рациональность был введен впервые именно для отражения отличия решений, принимаемых в соответствии с принципом (2.2), от решений, принимаемых в соответствии с принципом (2.1).

Второй тип ОР. Предположим, что агент готов смириться с потерями фиксированной величины $\varepsilon \geq 0$ по сравнению с глобальным максимумом, то есть множеством рационального выбора можно считать (*принцип ε-оптимальности*)

$$C^{II}(f(\cdot,\cdot), A, \theta, \varepsilon) = \{y \in A | f(\theta, y) \geq f(\theta, y^*(\theta)) - \varepsilon\}. \qquad (2.3)$$

Отметим, что этот способ учета «нечувствительности» и наличия у агентов порогов различения последствий выбора наиболее распространен в теоретико-игровых моделях и позволяет, регуляризуя критерии оптимальности, добиться устойчивости решения по параметрам модели [13]. Кроме того, данный тип представления рациональ-

ного поведения согласован с моделями ОС, учитывающими неопределенность, в том числе – неопределенность целей агента [21]. В более общем случае величина «порога нечувствительности» может зависеть от сравниваемых альтернатив, всего множества, из которого осуществляется выбор, и др. – см. монографию [31].

Третий тип ОР. Предположим, что агент готов смириться с потерями, составляющими не более чем фиксированную долю $\delta \in (0;1]$ от максимального выигрыша, то есть множеством рационального выбора можно считать

$$C^{III}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,\delta) = \{y \in A | f(\theta,y) \geq (1-\delta) f(\theta,y^*(\theta))\}. \qquad (2.4)$$

Данные три типа ограниченной рациональности охватывают большинство известных моделей рационального и ограниченно рационального поведения.

Опишем свойства множеств (2.1)–(2.4). В рамках введенных предположений $\forall U \leq f(\theta,y^*(\theta)), \varepsilon \geq 0, \delta \in (0;1]$ имеет место [22] (там, где зависимость от обстановки не существенна, или последняя постоянна, будем ее опускать):

– $C^0 \subseteq C^I, C^0 \subseteq C^{II}, C^0 \subseteq C^{III}$;

– $\forall U' \geq U, \varepsilon' \geq \varepsilon, \delta' \geq \delta$ выполнено *(свойство монотонности)*
$C^I(f(\cdot,\cdot),A,\theta,U) \subseteq C^I(f(\cdot,\cdot),A,\theta,U')$,
$C^{II}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,\varepsilon) \subseteq C^{II}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,\varepsilon')$,
$C^{III}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,\delta) \subseteq C^{III}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,\delta')$;

– $C^I(f(\cdot,\cdot),A,\theta,0) = C^{II}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,0) = C^{III}(f(\cdot,\cdot),A,\theta,0) =$
$= C^0(f(\cdot,\cdot),A,\theta)$;

– для любого допустимого значения параметра ($U \leq f(\theta,y^*(\theta))$, $\varepsilon \geq 0$, $\delta \in (0,1]$) существуют значения двух других параметров, при которых множества (2.2)–(2.4) совпадают.

Последнее свойство позволяет говорить об эквивалентности в определенном смысле трех типов ОР, однако, использование в той или иной конкретной модели определенного типа ОР должно быть обусловлено спецификой последней (например, для первого типа, в отличие от второго и третьего, не требуется знания абсолютного максимума и т.д.).

В то же время, не все типы ограниченной рациональности обладают свойством инвариантности множества выбора относительно положительных линейных преобразований целевой функции. Так, для первого типа ОР множество (2.2), определенное для функции $u(\cdot)$, не изменится, если в определении этого множества для функции $g(y) = a + b\,u(y)$ изменить U на $a + b\,U$. Для второго типа ОР достаточно изменить ε на $b\,\varepsilon$. Для третьего типа ОР найти подобной замены общего вида не удается.

Принципы (2.1)–(2.4) соответствуют однократному принятию решения агентом. Существует множество моделей, описывающих принятие решений в динамике. Например, пусть время t дискретно ($t = 0, 1, 2, \ldots$), $A = \Re^1$, а обстановка стационарна (поэтому зависимость от нее в динамических моделях будем опускать). Обозначим через y_t действие агента в момент времени t. В соответствии с *гипотезой индикаторного поведения* [12, 24] в каждый такт времени агент делает шаг $\gamma_t \in [0; 1]$ в сторону текущего положения цели x^*_{t-1} (если агент один, а обстановка стационарна, то, очевидно, положение цели не меняется во времени):

$$y_t = y_{t-1} + \gamma_t\,(y^*_{t-1} - y_{t-1}), t = 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

Введенный в [63] Г. Саймоном *принцип приемлемого/удовлетворительного решения* (satisficing stop rule) гласит «прекращайте поиск, как только найдено решение, удовлетворяющее уровню притязаний». То есть агент, действующий в рамках первого типа ОР, будет изменять свои действия до тех пор, пока не достигнет своего уровня притязаний. В рамках процедуры (2.5) этот принцип примет вид:

$$y_t = \begin{cases} y_{t-1} + \gamma_t\,(y^*_{t-1} - y_{t-1}), & \text{если} f(y_{t-1}) < U; \\ y_{t-1}, & \text{если } f(y_{t-1}) \geq U. \end{cases} \tag{2.6}$$

По аналогии с выражением (2.6) можно записать динамические процедуры принятия решений агентами в рамках второго и третьего типов ОР (см. также более сложные модели в [58]).

В динамических моделях ОР могут учитываться ограничения на выбираемые действия, текущие значения целевой функции и др. в зависимости от предыстории (значений целевой функции, действий, ограничений, уровня притязаний); уровень притязаний может, в свою очередь, зависеть от предыстории [68].

В [35, 46] предложена и развита концепция *адаптивного набора инструментов* (adaptive toolbox), в соответствии с которой в сознании каждого человека хранится модульный набор *эвристик*, и субъект не пытается оптимизировать свое решение, а, встретившись с новой ситуацией, применяет ту или иную (максимально соответствующую ситуации) эвристику, выбирая приемлемое (удовлетворяющее его) решение (см. принцип приемлемого решения выше).

Эта концепция близка к идее Д. Канемана о двух когнитивных системах [50]: интуиция (т.н. «система 1») и рассуждения (т.н. «система 2»). *Система 1* включает в себя ассоциации, эвристики, т.е. быстрые («рефлекторные») процессы при минимальном контроле сознания. Эта система позволяет быстро принять решение, пусть и не оптимальное в текущей ситуации. Примерами эвристик являются: «выбирай наилучшее из известного», «соглашайся на первое предложение», «следуй мнению большинства», «дели поровну» и т.п. [46]. *Система 2* включает в себя логику, вычисления и оптимизацию – медленные процессы, требующие от субъекта значительных когнитивных усилий, но приводящие к более эффективному выбору [50, 51].

Роль эмоций во взаимодействии двух систем в процессе принятия решений подробно анализируется в монографии [41]. Психологические (в т.ч. эмоциональные аспекты рациональности) рассматриваются и в [67].

Частными случаями ограниченной рациональности могут рассматриваться:

– использование эвристик и типовых решений – см. [5, 6] и раздел 6 ниже;

– стратегическая рефлексия, в рамках которых агенты используют конечные ранги рефлексии, считая, что и ранги рефлексии оппонентов также ограничены [9, 20, 23, 37];

– равновесие дискретного отклика (quantal response equilibrium – QRE) и другие социофизические модели, в рамках которых выбор субъекта стохастичен, но приводящие к большему выигрышу действия выбираются чаще (что приводит, например при заданных ожидаемых выигрышах, к реализации т.н. равновесия Гиббса).

Примеры ограниченной рациональности в моделях *теории игр* и

экономических механизмов можно найти в [33, 47, 61]. Также модели ОР широко распространены в *поведенческой экономике* [42].

В рамках ограниченной рациональности можно интерпретировать и многие модели *научения*, рассматривая, например, процесс научения следующего вида: в каждый дискретный момент времени реализуется некоторое значение обстановки (принадлежащее априори известному конечному множеству); если некоторое значение θ реализуется повторно, то агент принимает оптимальное при этой обстановке решение $y^*(\theta)$; если же некоторое значение обстановки реализуется в первый раз, то агент принимает произвольное решение из заданного множества действий [1, 5]. Данный принцип принятия решений также условно соответствует модели Р. Ауманна, который в [34] разделял принятие решений, оптимальных в текущей ситуации (act-rationality), и принятие решений в соответствии с заранее определёнными правилами (rule-rationality).

Г. Саймон выделял рациональность выбора и рациональность процедур: «следует принимать в расчет не только *рациональность выбора* (substantive rationality), т.е. степень адекватности выбранных решений, но и *рациональность процедур* (procedural rationality), т.е. эффективность (в пределах человеческих когнитивных возможностей и ограничений) процедур, используемых для выбора.» [66].

Помимо ограниченной рациональности (в узком смысле Г. Саймона), в литературе предлагаются и рассматриваются и другие близкие к ней виды рациональности:

– *минимальная рациональность* (minimal rationality), в соответствии с которой агент анализирует в процессе принятия решения не обязательно все допустимые действия, но, как минимум, несколько из них [39, С. 166];

– *средовая рациональность* (ecological rationality), в соответствии с которой принимаемые субъектом решения в значительной степени определяются опытом его взаимодействия с окружающей средой [45];

– *вычислительная рациональность* (computational rationality), делающая акцент на вычислительной сложности и трудоемкости процессов принятия решений [32, 44, 48, 52, 53].

Также выделяют *поведенческую* (behavioral) и *эпистемическую* (epistemic) *рациональность* [40, 62] (последняя ориентирована на фор-

мирование логически адекватной системы представлений агента).

Все больший интерес проблематика ограниченной рациональности вызывает в последнее время у специалистов по искусственному интеллекту – см. обзор в [10]. Достаточно полный обзор различных концепций рациональности, в т.ч. постановка задачи совместного учета ограничений на память и число вычислительных операций в единицу времени, содержится в [30].

На сегодняшний день существуют десятки моделей ограниченной рациональности, использующие разнообразный математический аппарат. Например, в [43] агент, осуществляющий бинарный выбор, получает во времени информацию (что описывается винеровским процессом) о своем выигрыше при том или ином исходе и решает, в какой момент ему принять решение (задача об оптимальном моменте остановки). И т.д., и т.п.

Особенно велико разнообразие способов учета возможной *неопределенности* (как правило, об обстановке). Например, в [48] описывается трансформация распределений вероятности на множестве действий (стратегия выбора – смешанная), которая в соответствии с принципом Пигу-Дальтона приводит к росту неопределенности. Снижение неопределенности требует затрат, поэтому возникает задача выбора распределения, приводящего к максимуму ожидаемой полезности при ограничении на затраты, или минимизация затрат на обеспечение заданного значения ожидаемой полезности. Оптимальной смешанной стратегией при этом оказывается распределение Гиббса [48], а ε-оптимальности в условиях инфокоммуникационных ограничений соответствует экстремизация ε-энтропии [36].

Рассмотрим теперь, как взаимосвязаны между собой проблематика C^3 теории управления и концепция ограниченной рациональности в теории принятия решений.

3. Условие ограничения рациональности

Рассмотрим систему управления, приведенную на Рис. 1. Отметим, что в случае автоматического управления и управляемая, и управляющая системы являются техническими объектами, а в организационных, социальных, экономических и т.п. системах управляющая (и, зачастую, управляемая) система является субъектом, са-

мостоятельно принимающим решения (см. введение и раздел 1.1 в книге [27]). Обозначим через:

– t_1 время, необходимое на кодирование, дискретизацию, передачу, декодирование и восстановление информации об управляемой системе и, быть может, об обстановке;

– t_2 время, необходимое на нахождение управляющих воздействий (обработка информации, включая вычисление и выбор);

– t_3 время, необходимое на кодирование, дискретизацию, передачу, декодирование и восстановление информации об управляющих воздействиях;

– T время, к которому управляющее воздействие должно быть реализовано, в т.ч. с учетом собственной динамики управляемой системы.

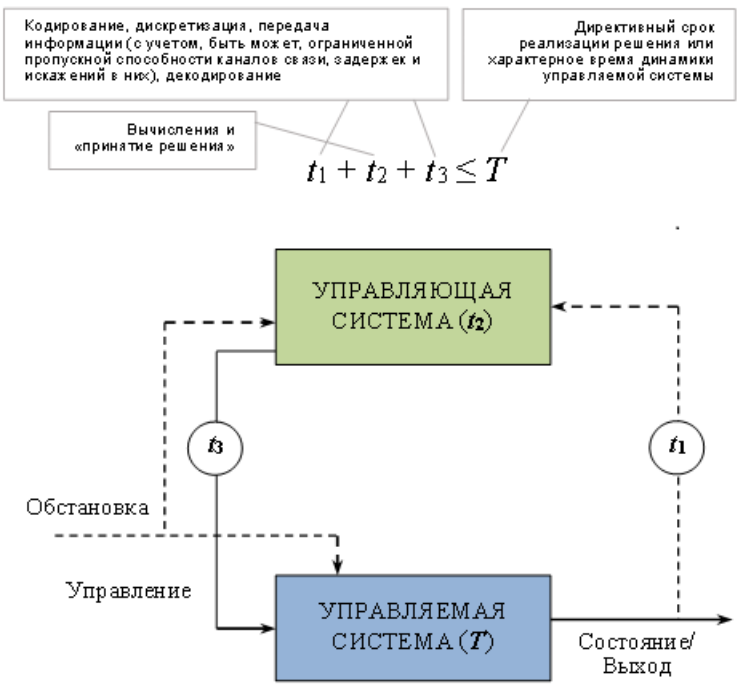

Рисунок 1. *Структура системы управления и задержки в петле обратной связи*

Данные времена должны удовлетворять следующему достаточно очевидному и интуитивно понятному условию, которое назовем условием ограничения рациональности (см. Рис.1):

$$t_1 + t_2 + t_3 \leq T. \tag{3.1}$$

В соответствии с терминологией второго раздела, добавление ограничения (3.1) меняет модель принятия решений центром, поэтому принятие решений с учетом этого ограничения может рассматриваться как «ограниченно рациональное» по сравнению с экстремизационным поведением в отсутствие этого и ему подобных ограничений. Т.е., условие ограничения рациональности (3.1), фактически, добавляет к экстремизационному принципу принятия решений временные/ресурсные ограничения и отражает:

– учитываемые в известных моделях *ограниченной рациональности* ограничения (когнитивные, вычислительные, информационные, коммуникационные и т.д.) – см. раздел 2, включая метод эвристик/типовых решений – см. раздел 6;

– *закон необходимого разнообразия*/адекватности У. Эшби [29], в соответствии с которым разнообразие управляющей системы должно превосходить разнообразие управляемой системы или, другими словами, управляющая система должны быть адекватна (в т.ч. по скорости реакции, вычислительным и другим возможностям) управляемой системе и условиям (обстановке), в которых функционирует последняя;

– *проблематику* C^3 (control, communication, computing) – совместного решения задач управления, вычислений и связи (см. обзоры в [1, 19, 26, 27]);

– проблематику вычислительной сложности поиска равновесий в *алгоритмической* и *вычислительной теории игр* [32, 53], а также в механизмах организационного управления [14, 17, 57] (и, отчасти, даже шире – *в распределенной оптимизации* – см. обзор и обсуждение в [19, 27]);

– *принцип рекорда (наилучшего текущего решения)*, используемый в оптимизации в системах реального времени, в соответствии с которым в директивный момент времени реализуется решение, обладающее максимальной эффективностью среди всех решений, про-

анализированных к этому моменту [60] (если в критерии удовлетворительного решения (2.6) критерием остановки является достижение приемлемого значения целевой функции, то в рамках принципа наилучшего текущего решения момент остановки фиксирован априори).

Ниже условие (3.1) иллюстрируется на примере задачи институционального управления организационно-технической системой. Для этого в следующем разделе приводится постановка и решение этой задачи, а в пятом разделе в ее терминах конкретизируется условие ограничения рациональности.

4. Нормы деятельности: задача управления

Пусть организационно-техническая система (ОС) состоит из n агентов, выбирающих действия $y_i \in A_i$ из компактных множеств A_i и имеющих непрерывные целевые функции $f_i(\theta, y)$, где $\theta \in \Omega$ – обстановка, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A' = \prod\limits_{i \in N} A_i$, $i \in N$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов.

Напомним, что *институциональным управлением* называется управление ограничениями и нормами деятельности [21].

Нормой деятельности будем называют отображение $\aleph : \Omega \to A'$ множества возможных обстановок во множество допустимых векторов действий агентов [18]. Ниже для простоты это отображение будет предполагаться однозначным. Содержательно i-ая компонента вектор-функции $\aleph(\cdot)$ определяет какое действие i-го агента от него ожидают остальные агенты и центр. Норма может интерпретироваться и как эвристика (см. второй раздел) или как типовое решение (см. шестой раздел).

Пусть предпочтения центра заданы на множестве обстановок, норм деятельности и действий агентов: $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), y)$. Предполагая, что агенты следуют установленным нормам, обозначим $K(\aleph(\cdot)) = F_0(\Phi(\theta, \aleph(\cdot), \aleph(\theta)))$ – *эффективность институционального управления* $\aleph(\cdot)$, где $F_0(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности. В качестве оператора устранения неопределенности (в зависимости от информированности управляющего органа – *центра*) может использоваться гарантированный результат по множеству Ω, или математическое ожидание по известному распределению вероятностей $p(\theta)$ на множестве Ω и т.д.

Задачей *институционального управления* при ограничениях $M_{\aleph}$ на нормы деятельности является выбор допустимой нормы $\aleph^*(\theta) \in M_{\aleph}$, имеющей максимальную эффективность [18]:

$$\aleph^*(\cdot) = arg \max_{\aleph(\cdot) \in M_{\aleph}} K(\aleph(\cdot)), \tag{4.1}$$

при условии, что агенты следуют установленным нормам деятельности. Последнее условие требует пояснений. Так как агенты активны и выбирают свои действия самостоятельно, то выбор агента будет совпадать с выбором, предписываемым нормой, только в том случае, если агенту это выгодно. Детализируем, что можно понимать под «выгодностью».

По аналогии с моделями ограниченной рациональности (2.2)–(2.4) определим *параметрическое равновесие Нэша* (4.2) и рациональное поведение (4.3)–(4.5) для каждого из трех типов ограниченной рациональности:

$$E_N^0(\theta) = \{x \in A^{'} | \forall i \in N, \forall y_i \in A_i : f_i(\theta, x) \geq f_i(\theta, x_{-i}, y_i)\}, \tag{4.2}$$

$$E_N^1(\theta, \overline{U}) = \{x \in A^{'} | \forall i \in N : f_i(\theta, x) \geq \overline{U}_i\}, \tag{4.3}$$

$$E_N^2(\theta, \varepsilon) = \{x \in A^{'} | \forall i \in N, \forall y_i \in A_i : f_i(\theta, x) \geq f_i(\theta, x_{-i}, y_i) - \varepsilon_i\}, \tag{4.4}$$

$$E_N^3(\theta, \delta) = \{x \in A^{'} | \forall i \in N, \forall y_i \in A_i : f_i(\theta, x) \geq (1 - \delta_i) f_i(\theta, x_{-i}, y_i)\}. \tag{4.5}$$

Будем называть норму $\aleph(\cdot)$ *согласованной* с j-ым типом рационального поведения [18], $j = 0, \ldots, 3$, если

$$\forall \theta \in \Omega : E_N^j(\theta) \cap \aleph(\theta) \neq \oslash. \tag{4.6}$$

Условие (4.6) можно интерпретировать следующим образом: норма деятельности *реализует* то или иное *равновесие*, если для любой обстановки выбор, предписываемый нормой, не противоречит рациональности поведения агентов, т.е. обеспечивает им соответствующий выигрыш и/или делает невыгодным одностороннее (в случае использования концепции равновесия Нэша) отклонение от нормы.

Так как $\aleph(\cdot)$ – однозначное отображение, то выбор центром согласованной нормы деятельности может рассматриваться как сужение множества равновесий (например, подсказка о существовании фокальной точки и т.д.). С этой точки зрения управление нормами деятельности можно рассматривать как задачу реализации соответствия

группового выбора, в которой $\theta \in \Omega$ является вектором индивидуальных характеристик агентов.

Обозначим через $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ *обстановку игры* для i-го агента, $i \in N$.

Условия (4.2) и (4.6) совместно можно записать в следующем виде: норма $\aleph(\cdot)$ является согласованной тогда и только тогда, когда

$$\forall \theta \in \Omega, \forall i \in N, \forall y_i \in A_i : f_i(\theta, \aleph(\theta)) \geq f_i(\theta, \aleph_{-i}(\theta) y_i). \tag{4.7}$$

Условие (4.7) означает, что норма согласована с интересами агентов, если при любой обстановке каждому агенту выгодно следовать норме деятельности при условии, что остальные агенты также следуют этой норме. Аналогичным условию (4.7) образом можно записать и условия (4.3)–(4.5).

Норму $\aleph(\cdot)$ назовем *сильно согласованной* если выбор любым агентом действия в соответствии с этой нормой является для него *доминантной стратегией:*

$$\forall \theta \in \Omega, \forall i \in N, \forall y_{-i} \in A_{-i}, \forall y_i \in A_i : f_i(\theta, y_{-i}, \aleph_i(\theta)) \geq f_i(\theta, y_{-i}, y_i). \tag{4.8}$$

Аналогичным условию (4.8) образом можно записать и условия (4.3)–(4.5).

Рассмотрим, какой информированностью должны обладать агенты для того, чтобы существовала согласованная норма. Легко видеть, что условия игры – множество агентов, целевые функции, допустимые множества, а также норма деятельности и реализовавшаяся обстановка должны быть *общим знанием* [23] (напомним, что общим знанием в теории игр называется факт, о котором: а) известно всем игрокам; б) всем игрокам известно а); всем игрокам известно б), и так далее до бесконечности).

Действительно, для вычисления параметрического равновесия Нэша (или *равновесия в доминантных стратегиях* (РДС)) в рамках действующих норм деятельности каждый агент должен быть уверен, что и остальные агенты вычислят то же равновесие, что и он. Для этого он должен поставить себя на место остальных агентов, моделирующих его поведение, и т.д. Одним из способов создания общего знания является публичное сообщение факта всем агентам, собранным вместе. Наверное, в том числе, этим объясняется то, что

для формирования корпоративной культуры, корпоративных стандартов поведения и т.д. в современных фирмах так много внимания уделяется неформальному общению сотрудников, лояльности фирме и т.д., то есть созданию у работников впечатления и убеждений в принадлежности общему делу, разделения общих ценностей и т.д. – все это нужно для существования общего знания.

Таким образом, под задачей институционального управления, как управления нормами деятельности, будем, следуя [18], понимать задачу (4.1), (4.6) поиска нормы, обладающей максимальной эффективностью на множестве допустимых и согласованных норм.

Обозначим через $S_\aleph$ множество норм (всевозможных отображений $\aleph : \Omega \to A'$), удовлетворяющих условию (4.6). Тогда задачу согласованного институционального управления можно записать в виде:

$$K(\aleph(\cdot)) \to \max_{\aleph(\cdot) \in M_\aleph \cap S_\aleph}. \tag{4.9}$$

То есть, решение задачи управления нормами деятельности заключается в следующем:

1) найти множество $S_\aleph$ согласованных норм;

2) найти множество $S_\aleph \cap M_\aleph$ норм, являющихся одновременно согласованными и допустимыми;

3) выбрать из этого множества норму, обладающую максимальной эффективностью с точки зрения центра. Первый этап решения задачи (4.9) является задачей согласованного управления [21]. Высокая вычислительная сложность этой задачи обусловлена тем, что искомой переменной является отображение $\aleph : \Omega \to A'$, поэтому исследуем ее более подробно.

Пусть институциональное управление используется совместно с мотивационным [18, 21], в рамках которого целевая функция i-го агента принимает вид:

$$G_i(\theta, y, \sigma_i) = f_i(\theta, y) + \sigma_i(\theta, \aleph(\cdot), y), y \in A, i \in N, \tag{4.10}$$

где $\sigma_i : \Omega \times M_\aleph \times A' \to \Re^1_+$ – *функция стимулирования* i-го агента. В [18] получены условия согласованности норм, в то время как следующее утверждение дает условие сильной согласованности.

Утверждение 1.

а) При использовании центром мотивационного управления

$$\sigma_i(\theta, \aleph(\cdot), y) = \begin{cases} s_i(\theta, \aleph(\cdot), y_{-i}), y_i = \aleph_i(\theta), \\ 0, \quad y_i \neq \aleph_i(\theta), \end{cases} \quad i \in N, \tag{4.11}$$

где

$$s_i(\theta, \aleph(\cdot), y_{-i}) = \max_{y_i \in A_i} f_i(\theta, y_{-i}, y_i) - f_i(\theta, y_{-i}, \aleph_i(\theta)) + \mu_i, i \in N, \tag{4.12}$$

$\mu_i > 0$ – сколь угодно малая строго положительная константа, $i \in N$, норма $\aleph(\cdot)$ является сильно согласованной, причем следование норме является единственным РДС игры агентов;

б) При $\mu_i = 0$ не существует другого неотрицательно значного мотивационного управления, реализующего $\aleph(\cdot)$ как РДС игры агентов, и требующего от центра строго меньших затрат на стимулирование.

Доказательство. Фиксируем произвольную обстановку $\theta \in \Omega$, произвольного агента $i \in N$, произвольное его действие $y_i \in A_i$ такое, что $y_i \neq \aleph_i(\theta)$ и произвольную обстановку игры для него $y_{-i} \in A_{-i}$. Подставляя систему стимулирования (4.12) в условие (4.8) для целевой функции (4.10), получим:

$$f_i(\theta, y_{-i}, \aleph_i(\theta)) + \max_{y_i \in A_i} f_i(\theta, y_{-i}, y) - f_i(\theta, y_{-i}, \aleph_i(\theta)) + \mu_i \geq f_i(\theta, y_{-i}, y_i) + 0,$$

т.е. $\max\limits_{y_i \in A_i} f_i(\theta, y_{-i}, y) \geq f_i(\theta, y_{-i}, y_i) - \mu_i$, что выполнено всегда. Пункт а) доказан.

Для доказательства пункта б) предположим противное, т.е. что существует система стимулирования $\hat{\sigma}(\theta, \aleph(\cdot), y)$, реализующая $\aleph(\cdot)$ как РДС игры агентов, и требующая от центра строго меньших затрат на стимулирование. Из условия (4.8) получаем, что $\forall \theta \in \Omega$, $\forall i \in N$, $\forall y_{-i} \in A_{-i}$, $\forall y_i \in A_i$:

$$f_i(\theta, y_{-i}, \aleph_i(\theta)) + \hat{\sigma}_i(\theta, \aleph_i(\theta), y_{-i}) \geq f_i(\theta, y_{-i}, y_i) + \hat{\sigma}_i(\theta, y_i, y_{-i}). \tag{4.13}$$

Фиксируем произвольную обстановку $\theta \in \Omega$, произвольного агента $i \in N$ и произвольную обстановку игры для него $y_{-i} \in A_{-i}$. В силу неотрицательности значения функции стимулирования в правой части выражения (4.13) и того, что оно выполняется для любого действия i-го агента, из него следует, что

$$\hat{\sigma}_i(\theta, \aleph_i(\theta), y_{-i}) \geq \max_{y_i \in A_i} f_i(\theta, y_{-i}, y_i) - f_i(\theta, y_{-i}, \aleph_i(\theta)).$$

В силу выражения (4.12) и того, что $\mu_i = 0$, получаем: $\hat{\sigma}_i(\theta, \aleph_i(\theta), y_{-i}) \geq s_i(\theta, \aleph(\cdot) y_{-i})$, что противоречит сделанному предположению. $\square$

Выражение (4.12) характеризует (в силу пункта б) утверждения) минимальные затраты центра на мотивацию i-го агента, побуждающего последнего следовать норме деятельности $\aleph(\cdot)$. Сумма выражений (4.12) по всем агентам (при условии, что все они следуют установленной центром норме деятельности)

$$c(\theta, \aleph(\cdot)) = \sum_{i \in N} \max_{y_i \in A_i} f_i(\theta, \aleph_{-i}(\theta), y_i) - \sum_{i \in N} f_i(\theta, \aleph(\theta)) \tag{4.14}$$

есть ни что иное, как минимальные затраты центра на сильно согласованное (совместное институциональное и мотивационное) управление. Отметим, что эти затраты одинаковы для случаев согласованности и сильной согласованности, так как оба предполагают, что агенты следуют нормам. Поэтому, если целевую функцию центра $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), y)$ представить в виде разности дохода $D(y)$ и затрат на управление $c(\theta, \aleph(\cdot))$, то в силу согласованности управления получим:

$$\Phi(\theta, \aleph(\cdot)) = D(\theta, \aleph(\theta)) - c(\theta, \aleph(\cdot)). \tag{4.15}$$

Тогда эффективность институционального управления $\aleph(\cdot)$ можно определить как

$$K(\aleph(\cdot)) = F_\theta(D(\theta, \aleph(\theta)) - c(\theta, \aleph(\cdot))),$$

где $F_\theta(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности (которую необходимо производить, если на момент принятия решений центр не знает реализовавшегося значения обстановки).

Задача сильно согласованного институционального управления

$$F_\theta(D(\theta, \aleph(\theta)) - c(\theta, \aleph(\cdot))) \to \max_{\aleph(\cdot) \in M_\aleph} \tag{4.16}$$

отличается от задачи (4.9) тем, что максимизация ведется по множеству всех допустимых норм деятельности, а условие согласованности учтено в максимизируемом критерии. Отметим, что, так как норма деятельности предполагается однозначным отображением, то использование мотивационного управления с *гибким планом* (планом, зависящим от обстановки – см. (4.17)) оказывается достаточным

[18]. Другими словами, для любого институционального управления в рамках рассматриваемой модели найдется мотивационное управление не меньшей эффективности. При этом процесс решения задачи мотивационного управления намного проще процесса решения задачи институционального управления, так как в первом случае максимизация ведется по множеству действий агентов, а не по множеству отображений.

В случае, когда на момент принятия решений центр знает реализовавшееся значение обстановки, задача сильно согласованного институционального управления принимает вид следующей задачи оптимизации – нахождения оптимального (с учетом затрат центра на управление) вектора согласованных *планов* $x(\theta)$:

$$x(\theta) = \arg\max_{x \in A'} [D(\theta, x) - c(\theta, x)]. \tag{4.17}$$

При этом выигрыш центра равен $\Phi_0(\theta) = D(\theta, x(\theta)) - c(\theta, x(\theta))$.

5. Аналитическая сложность и погрешность решений

Пусть в задаче институционального управления (см. предыдущий раздел) множества $\{A_i\}_{i \in N}$ и Ω являются отрезками $\Re_1^+$, а действительнозначная целевая функция агента $f(\theta, y)$ является липшицевой (далее будем для определенности использовать l_∞-норму) с константой Липшица l. Отметим, что из липшицевости функции следует ее равномерная непрерывность и, следовательно, непрерывность на всей области определения, а из последней следует непрерывность функций максимума и минимума (см., например, теорему 1.1.4 в [16]), которые также будут липшицевы.

Обозначим через $A|_h$ множество точек равномерной сетки с шагом $h \ll 1$ на множестве A. Тогда, если функция $f(\cdot, \cdot)$ задана таблично с равномерными сетками с шагами H и h по первому и второму аргументу соответственно (оракул нулевого порядка – напомним, что *оракулом* называется источник информации о значениях функции (нулевой порядок), ее градиенте (первый порядок) и др. [16]; т.е. будем рассматривать только *метод равномерного перебора*), то *аналитическая сложность* W_y вычисления множества рационального выбора (1) (т.е. – модель принятия решения агентом) $Arg \max_{y \in A} f(\theta, y)$ будет иметь порядок $\frac{|A|}{h}$, где $|A|$ – длина отрезка A, т.е. $W_y \sim \Theta(\frac{|A|}{h})$,

и позволит найти при любой фиксированнойобстановке максимальное значение целевой функции агента с *погрешностью/точностью* $\Delta_f \approx \frac{lh}{2}$ (см. общие результаты в [16] и оценки аналитической сложности для задач управления организационно-техническими системами в [17]). В случае, когда целевая функция известна неточно, могут быть использованы методы, описанные в [6], или методы интервальной оптимизации [7, 49], если неточно известны коэффициенты целевой функции. Отметим, что выбор в выражении (4.11) $\mu = lh/2$ компенсирует незнание значений целевой функции агента вне узлов сетки.

Наличие погрешности вычисления оптимума соответствует второму и третьему типам ограниченной рациональности (см. выше). Действительно, выбирая шаг сетки $h = \varepsilon/l$ или $h = \delta f(\theta, y^*(\theta))/l$, получим, что агент ведет себя в соответствии с выражениями (2.3) или (2.4).

Легко видеть, что (см. соответствующие оценки ниже):

1) при последовательной оптимизации (например, нахождение суммы максимумов/минимумов) соответствующие сложности, как и погрешности, складываются;

2) при последовательном («вложенном») вычислении максимумов/минимумов некоторой функции соответствующие сложности перемножаются.

Сложность W вычисления зависимости $y^*(\theta)$ рационального выбора агента от обстановки будет иметь порядок $\frac{|A|}{h}\frac{|\Omega|}{H}$, т.е. $W \sim \Theta(\frac{|A|}{h}\frac{|\Omega|}{H})$.

Предположим, что функция $D(\cdot,\cdot)$ является липшицевой с константой Липшица L и задана таблично по равномерной сетке с шагами соответственно H и h. Пусть на момент принятия решений центр знает реализовавшееся значение обстановки. С учетом (4.11) и (4.15) вычисление для всех значений обстановки значения целевой функции центра

$$\Phi_0(\theta) = \max_{x \in A'|_h} [D(\theta, x) + \sum_{i \in N} f_i(\theta, x) - \sum_{i \in N} \max_{y_i \in A_i|_h} f_i(\theta, x_{-i}, y_i) - \sum_{i \in N} \mu_i] \tag{5.1}$$

будет иметь аналитическую сложность

$$W_x \sim \Theta\left(\frac{|\Omega|}{H}\left(2n + \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|}{h}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{|A_j|}{h}\right) \tag{5.2}$$

и позволит получить значение величины (5.1) с погрешностью

$$\Delta_\Phi \approx \frac{LH\sqrt{n} + lhn[\sqrt{n} + \sqrt{n-1}]}{2}. \tag{5.3}$$

Отметим, что в более общем случае шаг дискретизации множества допустимых действий может выбираться разный для различных агентов, да и константы Липшица у них могут различаться.

Если вариация $[\max\limits_{\theta\in\Omega} \Phi_0(\theta) - \min\limits_{\theta\in\Omega} \Phi_0(\theta)]$ значений целевой функции центра в зависимости от обстановки априори точно оценена и имеет порядок Δ_Φ, то рациональным может быть не использование центром гибкого (зависящего от обстановки) плана (4.17), а использование следующего плана, не зависящего от обстановки (эту же стратегию центр вынужден использовать в условиях, когда на момент назначения плана он не знает и не рассчитывает узнать реализовавшееся значение обстановки):

$$x^* = \arg\max_{x\in A'|_h} \min_{\theta\in\Omega|_H} [D(\theta, x) + \sum_{i\in N} f_i(\theta, x) - \sum_{i\in N} \max_{y_i\in A_i|_h} f_i(\theta, x_{-i}, y_i) - \sum_{i\in N} \mu_i]. \tag{5.4}$$

Имея выражения (5.2) и (5.3) для сложности и погрешности принятия решений центром, можно рассматривать различные задачи учета ограничений на когнитивные, коммуникационные, вычислительные и другие возможности центра – см. общее условие ограничения рациональности (2.7).

Рассмотрим последовательность функционирования системы (*этапы* 1–6) и информированность участников (см. также Рис. 1):

1) центр получает информацию о целевых функциях агентов (он должен получить информацию об их значениях в $n\frac{\Omega}{H}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{|A_j|}{h}$ точках);

2) центр решает задачу (4.11), (5.1);

3) центр и агенты получают информацию о реализовавшемся значении обстановки $\theta \in \Omega$;

4) центр сообщает агентам систему стимулирования (4.11) с $\aleph_i(\theta) = x_i(\theta), i \in N$ (ему достаточно передать 2 n значений – для каждого агента план и вознаграждение в случае его выполнения; отметим, что система стимулирования (4.11) является очень «экономной» с точки зрения объемов передаваемой информации, ведь она

требует передачи всего пары значений, а не «функции» от обстановки θ и вектора y);

5) агенты одновременно и независимо выбирают действия (равные планам в силу утверждения 1) и получают вознаграждения;

6) центр получает информацию о действиях агентов (n значений).

Рассмотрим, как будет выглядеть общее условие (2.7) в рамках рассматриваемой задачи институционального управления.

Центр должен получить или передать по имеющемуся у него каналу связи (см. этапы 1, 3, 4 и 6) $1 + 3n + n\frac{\Omega}{H}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{|A_j|}{h}$ значений. *Пропускную способность канала* (измеряемую в битах за шаг времени) обозначим через R и предположим, что информация по этому каналу передается без кодирования, задержек и искажений. Следовательно,

$$t_1 + t_3 = \frac{1}{R}\log_2(1 + 3n + n\frac{\Omega}{H}\prod_{j=1}^{n}\frac{|A_j|}{h}).$$

Еще раз подчеркнем, что система стимулирования (4.11) является очень «экономной» с точки зрения объемов передаваемой информации. Действительно, она требует передачи для каждого агента всего пары значений (плана и вознаграждения за его выполнение), в то время как в общем случае система стимулирования определяется набором значений на всей сетке допустимых действий.

Фиксируем интервал времени продолжительностью T. Если известно время τ одного обращения к оракулу (т.н. *темп вычислений*), то при аналитической сложности решаемой задачи W общее «время вычислений» составит $t_2 = W\tau$. Таким образом, мы обосновали справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Условие (2.7) ограничения рациональности для задачи институционального управления имеет вид

$$\frac{1}{R}\log_2(1 + 3n + n\frac{\Omega}{H}\prod_{j=1}^{n}\frac{|A_j|}{h}) + \left(\frac{|\Omega|}{H}\left(2n + \sum_{i=1}^{n}\frac{|A_i|}{h}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{|A_j|}{h}\right)\tau \le T. \tag{5.5}$$

Условие (5.5) сформулировано в предположении, что о целевых функциях известны только ее значения в узлах сетки. Если имеется информация о ее градиентах (оракулы первого порядка в терминах

[16]), то можно переформулировать условия типа (5.5) с учетом этой информации.

Первое слагаемое-ограничение в выражении (5.5) можно условно назвать «коммуникационным», второе – «вычислительным». Если предположить, что $h = H = 1/x$, то «коммуникационное» слагаемое будет иметь порядок $n\,\ln(x)$, а «вычислительное» слагаемое будет иметь порядок $n\,(x)^n$, то есть «вычислительные» затраты с ростом числа агентов или с уменьшением шага сетки растут гораздо быстрее, чем «коммуникационные».

Таким образом, условие (5.5) ограничения рациональности в задаче институционального управления может интерпретироваться как (см. в т.ч. [17]):

– «ограничение реального времени», когда все вычисления и другую обработку информации необходимо завершить к моменту времени T;

– ограниченность когнитивных возможностей центра (на одну «элементарную операцию» ему необходимо τ единиц времени);

– ограниченность пропускных способностей каналов связи центра и т.п.

Повторим, что содержательно условие (5.5) означает, что сумма времен на получение, обработку и передачу информации центром не должна превышать отведенного на принятие (и реализацию) управленческого решения времени.

Возможны несколько постановок:

1) задача минимизации погрешности: минимизировать выбором шагов сетки h и H погрешность (5.3) при ограничении на сложность (5.5);

2) задача минимизации сложности (5.2) при ограничении на погрешность (см. второй и третий типы ограниченной рациональности выше)

$$\Delta_\Phi \le \Delta^*; \tag{5.6}$$

3) задача о критической пропускной способности канала связи или о критическом темпе вычислений – найти минимальное R (соответственно, τ), удовлетворяющее (5.5) при ограничениях на шаги сеток или непосредственно на погрешности;

4) задача о максимальном числе управляемых подсистем (подчиненных в организационно-технических системах): найти максимальное натуральное число n, при котором одновременно выполнены неравенства (5.5) и (5.6).

В предельном случае (при неограниченных возможностях субъекта по оперированию информацией, т.е. при сколь угодно быстрых вычислениях ($\tau = 0$) и неограниченных каналах связи ($R = +\infty$)) ограничение (5.5) несущественно – субъект гарантированно имеет возможность найти оптимальное решение. Во всех остальных случаях (при наличии ограничений) он принимает ограниченно рациональное решение.

Пример 1 (*ограниченно рациональное управление*). Пусть $A_i = \Omega = [0, 1]$. Тогда из (5.5) следует, что

$$\frac{1}{R}\log_2(1 + 3n + \frac{n}{Hh^n}) + \frac{n}{Hh^n}\left(2 + \frac{1}{h}\right)\tau \leq T. \tag{5.7}$$

Задача минимизации погрешности (поиска управления, обладающего максимальной эффективностью (минимальной погрешностью) при заданных ограничениях на оперирование информацией) имеет вид:

$$LN\sqrt{n} + lhn[\sqrt{n} + \sqrt{n-1}] \to \min_{h,H} \tag{5.8}$$

при ограничении (5.7). Отметим, что целевая функция (5.8) является линейной.

В оптимальном решении ограничение (5.7) выполняется как равенство. Можно записать его приближенно (пренебрегая линейными членами по сравнению со степенными и считая, что $H \ll 1, h \ll 1$) : $\frac{1}{R}\log_2(\frac{n}{Hh^n}) + \frac{\tau n}{Hh^{n+1}} = T$.

Рассмотрим отдельно два частных случая.

Случай 1 (только *коммуникационные ограничения*, т.е. $\tau = 0$). Из выражения (5.7) получаем:

$$H = \frac{n}{h^n(2^{TR} - 3n - 1)}. \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в (5.8), приравнивая производную по h нулю и решая относительно h, получим

$$h = \left[\frac{Ln\sqrt{n}}{l(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(2^{TR} - 3n - 1)}\right]^{\frac{1}{n+1}}. \tag{5.10}$$

Например, при $L = l = 1, n = 1, T = 10^{-5}$ с, $R = 10^6$ бит/с. вычисляем в соответствии с (5.10) $h \approx 0,0313$. Подставляя в (5.9), находим $H = 0,0313$.

Если заданы шаги сеток (пусть, например, $h = H = 0,001$), то из (5.7) можно найти оценку минимально необходимой пропускной способности канала связи:

$$R \geq \frac{1}{T}\log_2(1 + 3n + \frac{n}{Hh^n}) + \frac{n}{Hh^n} \approx 310^4 \text{ бит/с.}$$

Случай 2 (только *вычислительные ограничения*, т.е. $R = +\infty$). Из выражения (5.7) получаем:

$$H = \frac{n}{h^n}\left(2 + \frac{1}{h}\right)\frac{\tau}{T}. \tag{5.11}$$

Подставляя (5.11) в (5.8), приравнивая производную по h нулю, получим алгебраическое уравнение относительно h:

$$\frac{1}{h^n}\left(2 + \frac{1}{h}\right) = \frac{Tl}{\tau L}\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}. \tag{5.12}$$

Например, при $L = l = 1, n = 1, T = 10^{-5}$ с, $\tau = 10^{-8}$ с находим из (5.12) $h \approx 0,0326$. Подставляя в (5.11), находим $H \approx 1$.

Если заданы шаги сеток (пусть, например, $h = H = 0,1$), то из (5.7) можно найти оценку минимально необходимого темпа вычислений: $\tau \leq 8,3$ нс.

Пример 2 (*максимальная норма управляемости*). При известных шагах сеток (пусть, например, $h = H = 0,01$), пропускной способности канала связи $R = 10^6$ бит/с, темпе вычислений $\tau = 10^{-9}$ с и ограничении на время принятия решения $T = 0,1$ с, из (31) можно найти оценку максимального числа агентов, которыми центр может успешно управлять: $n \leq 5$.

Выше рассматривалась «статическая» модель – взаимодействие центра и агентов (см. этапы 1-6 выше) осуществлялось однократно. В случае, когда это взаимодействие осуществляется многократно (последовательно повторяясь во времени) и/или когда имеет место собственная динамика управляемой системы, рассмотренные модели могут обобщаться за счет использования аппарата повторяющихся или дифференциальных игр с учетом требований к управлению,

осуществляемому в условиях дискретизации состояний/управлений и ограниченности пропускных способностей каналов связи (см. [1, 26, 54-56]).

6. Типовые решения

Проанализируем задачу принятия агентом решений (выбора действия, максимизирующего соответствующую целевую функцию). Как отмечалось выше, поиск наилучшего действия $y^*(\theta)$ агента в обстановке θ имеет сложность $W_y \sim \Theta(\frac{|A|}{h})$ и позволит найти при любой фиксированной обстановке максимальное значение целевой функции агента с погрешностью/точностью $\Delta_f \approx \frac{lh}{2}$.

Для простоты можно предположить, что целевые функции таковы, что множество рационального выбора состоит из одной точки. Если $\theta \in [0;1]|_H$, то для каждого из $1/H$ значений обстановки необходимо найти действие агента, доставляющее максимум его целевой функции. Результатом будет $(1+[1/H])$-мерный вектор y^*. Если $A = [0;1]|_h$, то сложность W вычисления зависимости $y^*(\theta)$ рационального выбора агента от обстановки, как отмечалось выше, будет иметь порядок $\frac{1}{hH}$, т.е. $W \sim \Theta(\frac{1}{hH})$, а погрешность каждой его компоненты равна Δ_f.

Обозначим через $\{Q_i\}, i = \overline{1,k}$ разбиение единичного отрезка на k связных множеств. Пусть $y_i^{'}$ – решение задачи

$$\min_{\theta \in Q_i|_H} f(y,\theta) \to \max_{y \in [0;1]|_h}, i = \overline{1,k}. \tag{6.1}$$

Результат решения задачи (6.1) – k-мерный вектор $y^{'}$ в [5] назван *типовым решением*. Идея использования типовых решений (см. также *унифицированные решения* задач управления оргсистемами в [21]) заключается в следующем [5, 6]: вместо полного множества обстановок принятия решений (в рассматриваемом случае – единичного отрезка, или $1/H$ значений обстановки в случае дискретизации Ω) используются k типовых ситуаций, в которых агенту предписывается использовать эвристики (см. выше) – принимать соответствующие типовые решения.

То есть агент, принимая решения, должен «диагностировать» обстановку – какому из множеств $\{Q_i\}$, $i = \overline{1,k}$ принадлежит θ (будем считать, что эта задача решается агентом безошибочно; сложность

этой процедуры – применения типового решения: $\sim \Theta(k)$), а затем выбрать в качестве своего действия соответствующую компоненту вектора $y^{'}$ [5]. Если $k \ll \frac{1}{hH}$, то сложность применения типового решения намного ниже сложности полного решения задачи принятия решений.

Погрешность типового решения (см. выражение (6.1))

$$\Delta^{'} \approx \frac{l}{2} \max\{h, H\},$$

а сложность его нахождения при заданном разбиении $\{Q_i\}$, $i = \overline{1,k}$ равна $W^{'} \sim \Theta(\frac{k}{hH})$.

Однако характеристикой типового решения должна выступать не его погрешность, а «*цена стандартизации*» – потери (измеряемые в значениях целевой функции) от использования типового решения вместо полного:

$$\Delta^{''}(\{Q_i\}, i = \overline{1,k}) \max_{i=\overline{1,k}} \max_{\theta \in Q_i} [\max_{y \in [0;1]} f(y,\theta) - f(y_i^{'}, \theta)] \approx l \max_{i=\overline{1,k}} diam Q_i. \tag{6.2}$$

Отметим, что все предыдущие рассуждения проводились в рамках предположения, что разбиение $\{Q_i\}$, $i = \overline{1,k}$ задано. Однако, в целом, задача построения типовых решений заключается в нахождении, во-первых, оптимального (с учетом когнитивных и других возможностей ЛПР) числа k типовых ситуаций, а, во-вторых, в построении оптимального (минимизирующего цену стандартизации (6.2) разбиения. Аналитическая сложность последней задачи может быть очень высока, особенно в случае многомерных множеств допустимых действий и обстановок принятия решений.

Таким образом, использование типовых решений (эвристик) оправданно, если они ищутся один раз, а применяются многократно [5].

7. Заключение

Условие ограничения рациональности (2.7) накладывает требования на соотношения времени на оперирование информацией и времени, имеющегося на принятие и реализацию решения (управленческого воздействия). Это условие гласит, что при совместном решении задач управления, вычислений и связи требования реального времени

могут не дать возможности найти оптимальное решение (синтезировать оптимальное управляющее воздействие), вынуждая использовать почти оптимальные решения (наилучшие из найденных при имеющихся ограничениях на процедуру поиска).

Более того, условие ограничения рациональности связывает между собой и демонстрирует единство и глубокую взаимосвязь таких распространенных в управлении и оптимизации концепций, как: необходимое разнообразие, ограниченная рациональность, C^3 эвристики, рекорды в оптимизации в реальном времени и др. – Рис. 2.

Рисунок 2. Условие ограничения рациональности и смежные концепции

Частным результатом является конкретизация (5.5) условия ограничения рациональности для рассмотренной выше теоретико-игровой модели институционального управления организационно-технической системой. Конструктивность условия (5.5) позволяет ставить и решать задачи: минимизации погрешности или сложности; поиска критической пропускной способности канала связи, критического тем-

па вычислений, максимального числа управляемых подсистем и др. (некоторые иллюстративные числовые примеры приведены в пятом разделе выше).

Отметим, что условие ограничения рациональности сформулировано в терминах временных затрат. Но процесс принятия решения может требовать и финансовых затрат, от размера которых могут зависеть как имеющаяся на момент принятия решений информация (см., например, модели с платой за снижение неопределенности [21]), так и соответствующие времена – передачи данных, их обработки и т.д. Эти затраты могут учитываться, например, их аддитивным включением в целевую функцию субъекта. Модели оптимизации процессов принятия решений (по времени, точности, стоимости и другим взаимосвязанным критериям) является перспективным направлением дальнейших исследований.

Также перспективными представляются учет в условиях ограничения рациональности: динамики управляемой системы и внешней среды (включая текущую их идентификацию и скользящее прогнозирование состояний: рост периода упреждения при прогнозе в рамках стационарной модели объекта управления «ослабляет» условие (2.7), а использование нестационарных моделей его «ужесточает»); кодирования информации; помех в каналах связи; неопределенности условий, в которых функционирует система управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. *Выбор вариантов: основы теории.* М.: Наука, 1990.

2. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. *Бинарные отношения, графы и коллективные решения.* М.: ВШЭ, 2006.

3. Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи* // Автоматика и телемеханика. 2010. № 4. С. 34–99.

4. Белов М.В., Новиков Д.А. *Модели деятельности.* М.: Ленанд, 2021.

5. Белов М.В., Новиков Д.А. *Модели технологий.* М.: Ленанд, 2019.

6. Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В. *Типовые решения в управлении проектами.* М.: ИПУ РАН, 2003.

7. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971.

8. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* Новосибирск: Наука, 1986.

9. Корепанов В.О. *Модели рефлексивного группового поведения и управления.* М.: ИПУ РАН, 2011.

10. Кузнецов О.П. *Ограниченная рациональность и принятие решений* // Искусственный интеллект и принятие решений. 2019. № 1. С. 3–15.

11. Ларичев О.И. *Теория и методы принятия решений.* М.: Логос, 2002.

12. Малишевский А.В. *Качественные модели в теории сложных систем.* М.: Наука, 1998.

13. Молодцов Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности.* М.: Наука, 1987.

14. *Механизмы управления.* – М.: Ленанд, 2011.

15. Нейман Д., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука, 1970.

16. Нестеров Ю.Е. *Методы выпуклой оптимизации.* М.: МЦНМО, 2010.

17. Новиков Д.А. *Аналитическая сложность и погрешность решения задач управления организационно-техническими системами* // Автоматика и телемеханика. 2018. № 5. С. 107–118.

18. Новиков Д.А. *Институциональное управление организационными системами.* - М.: ИПУ РАН, 2004.

19. Новиков Д.А. *Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития.* М.: ЛЕНАНД, 2016.

20. Новиков Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 3–23.

21. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами. 3-е изд.* М.: Физматлит, 2012.

22. Новиков Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы.* М.: ИПУ РАН, 2003.

23. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели.* М.: Физматлит, 2013.

24. Опойцев В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.* М: Наука, 1977.

25. Петровский А.Б. *Теория принятия решений.* М.: Академия, 2009.

26. *Проблемы сетевого управления* / Под. ред. А.Л. Фрадкова. М.-Ижевск: ИКИ, 2015.

27. *Теория управления (дополнительные главы).* М.: Ленанд, 2019.

28. Фишберн П. *Теория полезности для принятия решений.* М.: Наука, 1978.

29. Эшби У.Р. *Введение в кибернетику.* М.: Мир, 1966.

30. Abel D. *Concepts in Bounded Rationality: Perspectives from Reinforcement Learning* / Master's Thesis. Providence: Brown University, 2019.

31. Aleskerov F., Monjardet B. *Utility Maximization, Choice and Preference.* Berlin: Springer, 2013.

32. *Algorithmic Game Theory (ed. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V.).* N.Y.: Cambridge University Press, 2009.

33. Aumann R. *Rationality and Bounded Rationality // Games and Economic Behavior*. 1997. Vol. 21. P. 2–14.

34. Aumann R. *Rule-rationality versus Act-rationality*. Discussion Paper No 497. Jerusalem: Hebrew University, 2008.

35. *Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox* / Edited by G. Gigerenzer and R. Selten: Massachusetts: The MIT Press, 2001.

36. Braun D., Ortega P. *Information-Theoretic Bounded Rationality and ε-Optimality* // Entropy. 2014. Vol. 16. P. 4662–4676.

37. Camerer C. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interactions*. Princeton: Princeton University Press, 2003.

38. Camerer C. *Bounded Rationality in Individual Decision Making* // Experimental Economics. 1998. Vol. 1. P. 163–183.

39. Cherniak C. *Minimal Rationality* // Mind. 1981. Vol. 90, no. 358. P. 161–183.

40. Christensen D. et al. *Putting Logic in its Place: Formal Constraints on Rational Belief*. Oxford: Oxford University Press, 2004.

41. Damasio A. *Descartes Error: Emotion, Reason, and the Human Brain*. N.Y.: Pengium Books, 2005.

42. Dhami S. *The Foundations of Behavioral Economic Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2016.

43. Fudenberg D., Strack P., Strzalecki T. *Speed, Accuracy, and the Optimal Timing of Choices* // American Economic Review. 2018. Vol. 108. N 12. P. 3651–3684.

44. Gershman S., Horvitz E., Tenenbaum J. *Computational Rationality: A Converging Paradigm for Intelligence in Brains, Minds and Machines* // Science. 2015. Vol. 349(6245). P. 273–278.

45. Gigerenzer G. *Adaptive Thinking: Rationality in the Real World*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

46. Gigerenzer G. *Why Heuristics Work* // Perspectives on Psychological Science. 2008. Vol. 3, no. 1. P. 20–29.

47. Gintis H. *The Bounds of Reason: Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences.* Princeton: Princeton University Press, 2009.

48. Gottwald S., Braun D. *Bounded Rational Decision-Making from Elementary Computations that Reduce Uncertainty* // Entropy. 2019. Vol. 21. P. 375.

49. Hansen E., Walster G. *Global Optimization Using Interval Analysis.* New York: Marcel Dekker, 2004.

50. Kahneman D. *Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics* // American Economic Review. 2003. Vol. 93. P. 1449–1475.

51. Kahneman D., Tversky A. *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

52. Lewis R., Howes A., Singh S. *Computational Rationality: Linking Mechanism and Behavior through Bounded Utility Maximization* // Topics in Cognitive Science. 2014. Vol. 6(2). P. 279–311.

53. Mansour Y. *Computational Game Theory.* Tel Aviv: Tel Aviv University, 2003.

54. Matveev A., Savkin A. *Estimation and Control over Communication Networks.* Basel: Birkhauser, 2009.

55. Matveev A., Savkin A. *The Problem of State Estimation via Asynchronous Communication Channels with Irregular Transmission Times* // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, no. 4. P. 670–676.

56. Nair G., Evans R. *Exponential Stability of Finitedimensional Linear Systems with Limited Data Rates* // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 585–593.

57. Narahari Y. *Game Theory and Mechanism Design.* Singapore: World Scientific Publishing Company. 2014.

58. Novikov D. *Control, Activity, Personality* // Advances in Systems Science and Applications. 2020. Vol. 20, no. 3. P. 113–135.

59. Pratt J. *Risk Aversion in the Small and in the Large* // Econometrica. 1964. Vol. 32, no. 1/2. P. 122–136.

60. *Real-Time Optimization* / Ed. by D. Bonvin. Basel: MDPI, 2017.

61. Rubinstein A. *Modeling Bounded Rationality in Economic Theory: Four Examples* / Routledge Handbook of Bounded Rationality. N.Y.: Routledge, 2020. P. 453–469.

62. Russel S., Subramanian D. *Provably Bounded-optimal Agents* // Journal of Artificial Intelligence Research. 1995. N 2. P. 575–609.

63. Simon H. *A Behavioral Model of Rational Choice* // Quarterly Journal of Economics. 1955. Vol. 69. P. 99–118.

64. Simon H. *Models of Bounded Rationality* / Volume 1: Economic Analysis and Public Policy. Volume 2: Behavioral Economics and Business Organization. Cambridge: MIT Press, 1982 (reprinted 1983).

65. Simon H. *Models of Man; Social and Rational.* London: Wiley, 1957.

66. Simon H. *Rationality as Process and as Product of Thought. Richard Ely Lecture* // American Economic Review. 1978. Vol. 68, no. 2. P. 1–16.

67. Stanovich K. *The Psychology of Rational Thought.* New Haven: Yale University Press, 2009.

68. Wall K. *A Bounded Rationality Decision Process Model* / Proceedings of IFAC Symposium on Dynamic Modelling and Control of National Economies. Edinburgh, 1989. P. 473–478.

BOUNDED RATIONALITY AND CONTROL

Dmitriy A. Novikov, Institute of Problems of Control, Dr.Sc., Corresponding member of RAS (novikov@ipu.ru).

Abstract: The rationality constraint condition is formulated, which states that when solving control, computing and communication problems (C^3) together, real-time requirements may not make it possible to find the optimal solution (control action), forcing the use of almost optimal solutions (the best found with the existing restrictions on the search procedure). This condition connects and demonstrates the unity and deep interconnection of such concepts common in management and optimization as: necessary diversity, limited rationality, analytical complexity, heuristics, records in real-time optimization. In relation to the problem of institutional management of organizational and technical systems, a number of examples of solving problems of minimizing error or complexity, as well as searching for: critical bandwidth of the communication channel, critical computing rate and the maximum number of controlled subsystems are given.

Keywords: decision-making, bounded rationality, network management, hierarchical game theory, analytical complexity, real time, the law of necessary diversity, heuristics, standard solution.