Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.1, с. 85–101

УДК 519.83
ББК 22.18

ПЛАНИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ С НЕМОНОТОННОЙ ОТДАЧЕЙ

Максим А. Савченко
Факультет вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: pdunan@gmail.com

В статье описывается модель ранее не исследованного обобщения проблемы планирования работ на немонотонные функции вознаграждения. Показывается чувствительность рассматриваемого конфликта к дополнительной информационной асимметрии и проистекающая из этого связь с «теорией заговоров». Демонстрируется использование структурной согласованности равновесий в качестве приемлемого критерия оптимальности решения.

Ключевые слова: планирование заданий, информационная асимметрия, необязывающие соглашения.

Поступила в редакцию: 21.01.21 *После доработки*: 26.11.21 *Принята к публикации*: 10.01.22

1. Введение

Проблема планирования заданий [4] занимает важное место в концептуальном ландшафте теории игр. При помощи этого конфликта хорошо иллюстрируются понятия *цены анархии* и *цены стабильности*, давая вероятно самый выразительный пример того, насколько равновесия Нэша в одной и той же игре могут различаться в смысле их глобальной оптимальности. Здесь же мы рассмотрим эту игру под другим углом, предложив её тривиальное обобщение, проявляющее новое свойство – чувствительность к дополнительной информационной асимметрии. При помощи этого мы покажем, как наличие у подгрупп игроков возможностей для тайной координации стратегий может порождать новые точки равновесия, поощряющие такое поведение.

Начнём с классической модели планирования заданий. В вычислительном центре работают m сотрудников, каждому из которых поручено произвести некое вычисление. В их распоряжении находятся n компьютеров, на каждом из которых может быть запущена одна или несколько программ, производящих вычисления сотрудников. Машины отличаются архитектурными особенностями, что задаётся матрицей констант $t_i^a \geq 0$, обозначающих время выполнения программы сотрудника $a = \overline{1,m}$ на компьютере $i = \overline{1,n}$. Каждое вычисление может производиться только одним устройством. Несколько программ на одном компьютере выполняются последовательно, но результаты их работы выводятся одновременно после остановки последней из них. Таким образом, выгода сотрудника заключается в выборе такого компьютера для своего вычисления, что для него оказывается минимальным суммарное время выполнения всех запущенных программ. Опишем происходящее в терминах игры нормальной формы

$$\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A \rangle \tag{1.1}$$

с параметрами:

- $A = \{1, \ldots, m\}$ – множество сотрудников (задач);
- $S^1 = \ldots = S^m = \{1, \ldots, n\}$ – совпадающие множества узлов, доступных сотрудникам;
- $u^a(s) = -t_{s^a}(s)$, где $t_i(s) = \sum\limits_{a \in A, s^a = i} t_i^a$ – затраты сотрудника i в профиле s.

Здесь следует заострить внимание на определении функции выплат. Выбрав $u^a(s) = -t_{s^a}(s)$, мы моделируем ситуацию, когда все вычисления должны были быть готовы ещё вчера, и сотрудники напрямую штрафуются за каждую лишнюю секунду, пока их результаты не лягут на стол начальству. Однако, можно смоделировать и менее напряжённый рабочий момент, взяв, например, ступенчатую функцию выплат:

$$u^a(s) = \begin{cases} u^a_{GOOD}, & t_{s^a}(s) < t^a_{DEADLINE}; \\ u^a_{LATE}, & t_{s^a}(s) \geq t^a_{DEADLINE}. \end{cases}$$

При этом получается, что для каждого игрока a назначен срок успешного выполнения задания $t^a_{DEADLINE}$, уложившись в который, он получает фиксированную выплату u^a_{GOOD} (с учётом премии), а не уложившись – u^a_{LATE} (обычную ставку). Можно придумать и более сложные схемы поощрения сотрудников, так что сформулируем сразу в общем виде:

$$u^a(s) = v^a(t_{s^a}(s)), \tag{1.2}$$

где $v^a(t)$ – монотонно невозрастающая функция оплаты за срочность по заданию сотрудника a. Любая игра в нормальной форме, построенная по схеме 1.1 с платёжной функцией вида 1.2, в сущности является проблемой планирования задач. При этом условие монотонного невозрастания $v^a(t)$ необходимо, поскольку на него в явном виде опирается доказательство считающегося важным свойства этой игры – равенство 1 цены стабильности [2]. Напомним, в оптимизационных задачах с эгоистичными агентами цена стабильности представляет собой соотношение $\frac{t_{NASH}}{t_{BEST}}$, где t_{NASH} – значение наилучшего из равновесий Нэша, а t_{BEST} – значение глобально оптимального решения. Это означает, что в проблеме планирования задач среди всех ситуаций, минимизирующих время до остановки последнего компьютера, обязательно найдутся равновесия по Нэшу. Однако, в данной работе предлагается на время забыть о минимизации общей продолжительности вычислений и вместо этого проанализировать, какие новые свойства модели могут проявиться в отсутствие такого ограничения на монотонность.

2. Штраф за индивидуализм

Представим вычислительный центр с компьютерами, требующими сложного техобслуживания после смены, если на них запускали хотя бы одну задачу. Если поощрять укладывающихся в дедлайны сотрудников невзирая на это, несложно представить ситуацию, когда они, в стремлении любой ценой гарантировать себе премию, будут раскидывать задачи по неразумно большому количеству компьютеров. Перед лицом такой перспективы у руководства может возникнуть соблазн стимулировать своих сотрудников избегать систематической недозагрузки машин при помощи штрафов. Это может быть смоделировано ступенчатой функцией оплаты за срочность следующего вида:

$$v^a(t) = \begin{cases} u^a_{HAST}, & t < t^a_{BREAKAWAY}; \\ u^a_{GOOD}, & t^a_{BREAKAWAY} \le t < t^a_{DEADLINE} \quad ; \\ u^a_{LATE}, & t^a_{DEADLINE} \quad \le t \quad . \end{cases}$$

Здесь для каждого сотрудника a зафиксирован не только дедлайн $t^a_{DEADLINE}$, к которому требуется успеть, чтобы получить премию $u^a_{GOOD} > u^a_{LATE}$, но и минимальная загруженность используемого компьютера $t^a_{BREAKAWAY}$, которой нужно достигнуть, чтобы не нарваться на штраф за нерациональное расходование вычислительных ресурсов $u^a_{HAST} < u^a_{GOOD}$. Размер минимальной загруженности может устанавливаться, например, в зависимости от важности соответствующей задачи – если срочное получение результата окупает использование дополнительных машин, то его можно сделать пониже или вовсе приравнять к нулю. Если же наоборот задача не так уж и важна, то большая минимальная загруженность заставит соответствующего сотрудника вспомнить об интересах фирмы и скооперироваться с коллегами.

Как видно, сотрудникам в данном случае приходится руководствоваться немонотонной функцией оплаты за срочность, что создаёт некоторые эффекты, несвойственные для классической формулировки проблемы планирования заданий. Во-первых, при такой постановке ожидаемо не во всякой игре цена стабильности обязана равняться 1. Достаточно рассмотреть игру с 2 сотрудниками и 2 одинаковыми компьютерами:

- $t^1_1 = t^1_2 = 8$,
  $t^2_1 = t^2_2 = 2$;

- $t^1_{DEADLINE} = t^2_{DEADLINE} = 9$,
  $t^1_{BREAKAWAY} = t^2_{BREAKAWAY} = 3$;

- $u^1_{HAST} < u^1_{LATE} < u^1_{GOOD}$,
  $u^2_{HAST} < u^2_{LATE} < u^2_{GOOD}$.

Поскольку первый игрок, заведомо не имеющий проблем с недозагрузкой, укладывается в дедлайн только если компьютер будет в его безраздельном пользовании, то очевидно, что сочетания стратегий, в которых оба игрока выбирают одну машину, равновесиями Нэша быть не могут. Похожим образом, поскольку второму игроку выгоднее опоздать с расчётами нежели быть наказанным за использование отдельного компьютера для недостаточно большой задачи ($u^a_{HAST} < u^a_{LATE}$), равновесиями Нэша не могут быть и те ситуации, где каждый из сотрудников использует свою машину. По структуре выплат игра оказывается неотличима от игры в чёт-нечет, вовсе не имеющей решений в чистых стратегиях и с единственным равновесием Нэша в точке независимого равновероятного выбора между альтернативами обоими игроками. При этом максимально загруженная машина с вероятностью $\frac{1}{2}$ проработает либо 10 часов при совпадении их выбора, либо 8 при несовпадении, что даёт математическое ожидание цены стабильности равное $\frac{9}{8}$.

По сути, при отказе от монотонности функции оплаты за срочность вряд ли имеет смысл вообще рассуждать о ценах стабильности и анархии, поскольку класс игр теперь начинает включать и такие, которые явно не имеют отношения к поискам минимума продолжительности вычислений. Тем не менее эта потеря интересных свойств далее будет скомпенсирована демонстрацией того, что рассматриваемое расширение включает игры, обладающие новым необычным свойством – чувствительностью к дополнительной информационной асимметрии.

3. Игра Γ^3_n и её равновесия

В контексте этой работы мы будем говорить об информационной асимметрии в более узком, чем она обычно понимается, смысле. Традиционно это понятие формулируется для игр, функции выигрышей в которых параметризуются случайными величинами. Если при этом разные игроки обладают разным объёмом информации о параметрах игры, то считается, что в ней присутствует информационная асимметрия. Здесь же мы будем говорить только о *дополнительной* информационной асимметрии, возникающей тогда, когда различия в знаниях игроков касаются случайных величин, никак не связанных с функциями выплат. Сформулируем в терминах коррелированного расширения игр в нормальной форме:

Определение 3.1. *Пусть* $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A\rangle$ *– игра в нормальной форме с* m *участниками, а* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *– множество всех векторов выплат, достижимых в её смешанных равновесиях по Нэшу. Игра* Γ *называется чувствительной к дополнительной информационной асимметрии, когда существует пространство корреляции* $\Phi = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A\rangle$ *такое, что в игре* $\Gamma|\Phi$ *найдётся коррелированное равновесие по Нэшу с вектором выплат, не принадлежащим выпуклой оболочке множества* U*.*

Здесь параметры, характеризующие пространство корреляции Φ:

- A – множество игроков, наблюдающих события из пространства корреляции;
- Ω – множество элементарных исходов пространства корреляции;
- $\mathfrak{I}^a$ – σ-алгебра подмножеств Ω, задающая информированность игрока a;
- $\mathbb{P}$ – вероятностная мера на множестве Ω, по которой измеримы все $\mathfrak{I}^a$.

Соответственно, коррелированное расширение игры Γ в пространстве Φ также можно представить в виде игры нормальной формы $\Gamma|\Phi = \langle A, \mathbf{S}^a, u^a(\mathbf{s}), a \in A\rangle$, где

$$\mathbf{S}^a = \{\mathbf{s}^a : \Omega \to S^a | (\mathbf{s}^a)^{-1}(s^a) \in \mathfrak{I}^a, \forall s^a \in S^a\},$$

$$u(\mathbf{s}) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(\mathbf{s}^{-1}(s)) u(s), \mathbf{s}^{-1}(s) = \bigcap_{a \in A} (\mathbf{s}^a)^{-1}(s^a).$$

Таким образом, под коррелированной стратегией игрока a подразумевается любое $\mathfrak{I}^a$-измеримое отображение из множества элементарных исходов Ω в множество чистых стратегий S^a. Игра как бы проходит в две фазы: на первой проверяется состояние природы и игроки извещаются о реализовавшихся событиях в соответствии с индивидуальной информированностью, а на второй игроки выбирают чистые стратегии, учитывая значения полученного сигнала. В качестве вектора платежей для набора коррелированных стратегий выступает математическое ожидание выигрышей для заданной вероятностной меры $\mathbb{P}$. Равновесие по Нэшу описанной игры и называется коррелированным.

На первый взгляд определение 3.1 может показаться бессмыслицей, поскольку совершенно неочевидно, как получение игроками информации о событиях, никак не связанных с исходами игры, может повлиять на структуру выплат. Однако, примеры таких игр приводил ещё Роберт Ауманн [3] – секрет заключается в том, что при помощи приватного внешнего сигнала часть игроков получает возможность использовать совместные стратегии в то время, как не наблюдающие сигнала аутсайдеры не могут к ним присоединиться. Построим и мы похожий пример, принадлежащий к классу проблем планирования заданий с немонотонными функциями оплаты за срочность. Рассмотрим игру Γ_n^3 той же общей схемы, что в предыдущем разделе, но чуть боле сложную, с 3 однотипными заданиями и $n \geq 2$ одинаковыми компьютерами:

- $t_i^1 = t_i^2 = t_i^3 = 2, i = \overline{1, n}$;
- $t_{DEADLINE}^1 = t_{DEADLINE}^2 = t_{DEADLINE}^3 = 5$,
  $t_{BREAKAWAY}^1 = t_{BREAKAWAY}^2 = t_{BREAKAWAY}^3 = 3$;
- $u_{HAST}^1 = u_{HAST}^2 = u_{HAST}^3 = 0$,
  $u_{GOOD}^1 = u_{GOOD}^2 = u_{GOOD}^3 = 3$,
  $u_{LATE}^1 = u_{LATE}^2 = u_{LATE}^3 = 2$

Проще говоря, в игре Γ_n^3 выгоднее всего использовать компьютер вдвоём – 4 часа суммарной продолжительности работы оказываются как раз в оптимальном промежутке между границей недогруза и дедлайном. Следующий по выгоде вариант – использование одной машины втроём, что приводит к штрафу за опоздание. Наименее привлекателен выбор компьютера, на котором задача оказывается одна – за такое расходование общественного ресурса игрок не получает вообще ничего. На первый взгляд эта игра не выглядит слишком необычно. В ней без особого труда находятся равновесия Нэша в чистых стратегиях – все наборы $(i,i,i), i = \overline{1,n}$, причём очевидно и то, что других решений в чистых стратегиях быть не может. Со смешанными стратегиями дело становится чуть интереснее.

Лемма 3.1. *Пусть $T \subseteq \{1,\dots,n\}$ – произвольное непустое подмножество компьютеров. Тогда в игре Γ_n^3 набор одинаковых смешанных стратегий $s^1 = s^2 = s^3 = \left(\frac{[1\in T]}{|T|},\dots,\frac{[n\in T]}{|T|}\right)$, где каждый игрок независимо и равновероятно выбирает одну из машин множества T, является равновесием по Нэшу.*[1]

Доказательство. Воспользуемся тем, что достаточно проверить отклонения только в пользу чистых стратегий. Обозначим символом $s|_i^a$ отклонение от набора s игроком a в пользу стратегии i и заметим, что

$$\begin{aligned} u^a(s|_i^a) &= [i \in T]\left(\frac{(|T|-1)^2}{|T|^2}u^a_{HAST} + 2\frac{|T|-1}{|T|^2}u^a_{GOOD} + \frac{1}{|T|^2}u^a_{LATE}\right) \\ &= [i\in T]\frac{6\,|T|-4}{|T|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого игрока максимум ожидаемого выигрыша достигается при отклонении в пользу любого из компьютеров, входящих в T. □

Соответственно без отклонений математическое ожидание выигрышей предстаёт в виде $u^a(s) = \frac{6|T|-4}{|T|^2}, a = \overline{1,3}$. Для доказательства того, что других равновесий по Нэшу в смешанных стратегиях нет, нам понадобятся ещё пара лемм:

Лемма 3.2. *В игре Γ_n^3 набор смешанных стратегий $s = (s^1, s^2, s^3)$ может быть равновесием по Нэшу только в том случае, когда $s^1 = s^2 = s^3$.*

Доказательство. Пусть $s^a = (p_1^a,\dots,p_n^a), a = \overline{1,3}$. Если стратегии игроков не совпадают, то найдётся компьютер i, для которого (без потери общности) вероятности выбора первым и вторым игроком

[1]Здесь и далее для упрощения и сокращения записи используется нотация «скобка Айверсона»: $[P]$ вычисляется в 1, если предикат P истинен, и в 0, если ложен.

$p_i^1 > p_i^2$. В силу элементарных свойств вероятностей, найдётся также и компьютер j, где $p_j^1 < p_j^2$. Выпишем математическое ожидание выигрышей тех же игроков при выборе ими i-го компьютера (для j-го всё совпадает с точностью до индекса, очевидно):

$$\begin{aligned} u^1(s|_i^1) &= (1-p_i^2)(1-p_i^3)u^1_{HAST} + (p_i^2+p_i^3-2p_i^2p_i^3)u^1_{GOOD} + p_i^2p_i^3u^1_{LATE} \\ &= 3p_i^2 + 3p_i^3 - 4p_i^2p_i^3; \\ u^2(s|_i^2) &= 3p_i^1 + 3p_i^3 - 4p_i^1p_i^3; \\ u^3(s|_i^3) &= 3p_i^1 + 3p_i^2 - 4p_i^1p_i^2. \end{aligned}$$

Про функцию $f(x,y) = 3x + 3y - 4xy$ на области определения $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ можно заметить следующее – если $f(x_0,y_0) < 2$, то для любых $x_1 > x_0, y_1 \ge y_0$ или $x_1 \ge x_0, y_1 > y_0$ выполняется $f(x_0,y_0) < f(x_1,y_1)$. Предположим, что $p_i^3 \le p_j^3$ (если $p_i^3 \ge p_j^3$, рассуждения аналогичны с точностью до индексов). Рассмотрим следующие случаи:

- $p_i^2 < p_j^2$. В силу элементарных свойств вероятностей мы можем быть уверены, что $p_i^2 < \frac{1}{2}$ и $p_i^3 \le \frac{1}{2}$, откуда $u^1(s|_i^1) < 2$, а значит $u^1(s|_i^1) < u^1(s|_j^1)$. Поскольку $p_i^1 > p_i^2 \ge 0$, первый игрок выбирает неоптимальную стратегию с ненулевой вероятностью. $\perp$

- $p_i^2 \ge p_j^2$, из чего следует $p_i^1 > p_j^1$, а значит аналогично предыдущему пункту $u^3(s|_j^3) < u^3(s|_i^3)$. Если $p_j^3 > 0$, то третий игрок выбирает неоптимальную стратегию с ненулевой вероятностью. $\perp$

- $p_i^2 \ge p_j^2$, как и в предыдущем случае, но теперь $p_i^3 = p_j^3 = 0$. Из $p_j^1 < p_i^1$ аналогичным образом следует $u^2(s|_j^2) < u^2(s|_i^2)$, и поэтому $p_j^2 > p_j^1 \ge 0$ влечёт выбор неоптимальной стратегии с ненулевой вероятностью уже вторым игроком. $\perp$

Таким образом предположение о существовании компьютера, для которого вероятность выбора его одним игроком отличается от вероятности выбора другим, в любом случае противоречит необходимому условию равновесия Нэша. $\square$

Лемма 3.3. *В игре Γ_n^3 набор одинаковых смешанных стратегий может быть равновесием по Нэшу только в том случае, когда все* *компьютеры, выбираемые с ненулевой вероятностью, выбираются с равными вероятностями.*

Доказательство. Возьмём любой набор, состоящий из одинаковых стратегий $(p_1, \ldots, p_n)$, где $0 < p_i < p_j$. Пользуясь формулой выплат из предыдущей леммы, $u^a(\,s|_i^a) = 2p_i(3-2p_i)$. Опять же, из $p_i < \frac{1}{2}$ следует $u^a(\,s|_i^a) < u^a(\,s|_j^a)$, а значит все игроки выбрали неоптимальную стратегию с ненулевой вероятностью, что противоречит необходимому условию равновесия по Нэшу. $\square$

Доказав, что предложенные точки равновесия исчерпывают пространство решений в смешанных стратегиях, мы можем сконструировать выпуклую оболочку множества достижимых векторов выплат. Поскольку множество целиком лежит на прямой (u, u, u), достаточно найти минимум и максимум ожидаемых выигрышей:

$$\min_{\emptyset \subset T \subseteq \{1,\ldots,n\}} \frac{6\,|T| - 4}{|T|^2} = \frac{6n-4}{n^2};$$
$$\max_{\emptyset \subset T \subseteq \{1,\ldots,n\}} \frac{6\,|T| - 4}{|T|^2} = 2.$$

Таким образом искомая выпуклая оболочка представляет собой отрезок, соединяющий точки $(2, 2, 2)$ и $(\frac{6n-4}{n^2}, \frac{6n-4}{n^2}, \frac{6n-4}{n^2})$. Если бы рассматриваемая игра не была чувствительна к дополнительной информационной асимметрии, на этом её анализ можно было бы закончить – все игроки находятся в равном положении и, действуя оптимально, могут ожидать равных выигрышей из указанного промежутка. В данном же случае присутствие несложного асимметричного корреляционного механизма может радикально повлиять на симметрию выплат.

4. Влияние корреляционных механизмов

Представим, что перед выбором своих стратегий первый и второй игроки наблюдают один и тот же бросок жребия из $k \leq n$ равновероятных альтернатив, тогда как третий игрок остаётся в неведении об исходе этого случайного эксперимента. Попробуем предположить, как могли бы действовать игроки, желая воспользоваться этим неочевидным на первый взгляд преимуществом. Для этого выберем любое подмножество компьютеров $T = \{i_1, \dots, i_k\}$, по одному на каждый возможный исход. Построим коррелированное равновесие таким же образом, как выше строились смешанные равновесия – все игроки равновероятно выбирают только между компьютерами из T. Однако, в этот раз выбор первого и второго игроков всегда совпадает, поскольку они делают его при помощи одной и той же функции, отображающей исходы броска жребия на элементы T. Опишем это более формально, используя пространство корреляции

$$\Phi = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$$

В данном случае множество состояний природы $\Omega = \{1, \dots, k\}$, σ-алгебры информированности игроков $\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{I}^2 = 2^\Omega, \mathfrak{I}^3 = \{\emptyset, \Omega\}$ и мера $\mathbb{P}(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$. Вышеописанные стратегии в игре $\Gamma_n^3|\Phi$ можно представить в виде функций, отображающих множество состояний природы в пространство смешанных стратегий:

$$\mathbf{s}^1(\omega) = \mathbf{s}^2(\omega) = ([i_\omega = 1], \dots, [i_\omega = n]);$$
$$\mathbf{s}^3(\omega) = \left(\frac{[1 \in T]}{|T|}, \dots, \frac{[n \in T]}{|T|}\right).$$

Выплаты в этом наборе уже не симметричны:

$$u^1(\mathbf{s}) = u^2(\mathbf{s}) = \frac{|T| - 1}{|T|} u^a_{GOOD} + \frac{1}{|T|} u^a_{LATE} = \frac{3k - 1}{k};$$
$$u^3(\mathbf{s}) = \frac{|T| - 1}{|T|} u^a_{HAST} + \frac{1}{|T|} u^a_{LATE} = \frac{2}{k}.$$

При этом ситуация действительно является равновесием по Нэшу, поскольку первый и второй игроки могут в качестве стратегий использовать любые функции, отображающие Ω в пространство вероятностных мер на $\{1, \dots, n\}$, а вот третий игрок вынужден довольствоваться только константными в виду того, что механизм корреляции не информирует его о состоянии природы. Заметив, что $\frac{3k-1}{k} > 2$ при $k \geq 2$, мы подтверждаем чувствительность игры Γ_n^3 к дополнительной информационной асимметрии – в новых решениях игроки, наблюдающие не связанный напрямую с выплатами случайный эксперимент, увеличивают свой выигрыш по сравнению с наилучшим результатом, достижимым в классическом смешанном случае.

5. Коллективная рациональность решений

При рассмотрении множества решений игры Γ_n^3 в обычных смешанных стратегиях, следует обратить внимание на то, что при $|T| > 2$ получающиеся точки равновесия по Нэшу лишены оптимальности не только в смысле Парето, но и по Слейтеру. В самом деле, выплаты всем игрокам в точках, где $|T| = 1$ или $|T| = 2$, равны 2, а вот при больших размерах множества $\frac{6|T|-4}{|T|^2} < 2$. Такие обстоятельствах наделяют решения с использованием одного или двух компьютеров особым статусом – можно ожидать, что агенты, знакомые с принципом коллективной рациональности, всё же сумеют договориться о том, чтобы не оказаться в ситуации, которую другое решение доминирует по всем платежам. Естественно сразу задаться вопросом, а нельзя ли и решения с учётом дополнительной информационной асимметрии отфильтровать похожим образом, выделив из них удовлетворяющие принципам коллективной рациональности хоть в каком-то смысле.

При добавлении в игру броска жребия, наблюдаемого только первым и вторым игроками, сразу бросается в глаза то, что классические принципы коллективной рациональности становится бесполезны. В новых точках равновесия выигрыши первых двух игроков теперь $u^1(\mathbf{s}) = u^2(\mathbf{s}) > 2$ и растут с ростом k, а третьего – $u^3(\mathbf{s}) < 2$ и падают, что говорит о прямом антагонизме интересов. Если, например, бросается несколько костей с разным числом граней, то не получится сделать коллективно рациональный выбор в обычном смысле между смешанным равновесием с $|T|$ равным 1 или 2 и коррелированными решениями с различными k. Тем не менее, можно попытаться применить более тонкий критерий оптимальности, опирающийся на слегка расширенную интерпретацию происходящего в игре. Для этого обратимся к относительно новой модели под названием «теория заговоров» [1].

Игры с заговорами представляют собой особую разновидность коррелированного расширения игр в нормальной форме. Вместо произвольных пространств корреляции модель параметризуются пространствами заговоров – специальным сужением концепции, обладающем рядом полезных свойств. Фактически, любое пространство заговоров состоит из конечного набора независимых универсальных механизмов корреляции (вещественных рулеток, например), каждым из которых владеет группа заговорщиков – подмножество игроков. Структурой заговоров называется семейство всех таких подмножеств, причём доказывается, что пространства заговоров одной структуры полностью эквивалентны с точки зрения порождаемых решений в любых играх с теми же участниками.

Применительно к рассматриваемой ситуации анализ игры с позиций теории заговоров может выглядеть следующим образом. Обозначим как $\Gamma_n^3|\{\{1,2\}\}$ коррелированное расширение $\Gamma_n^3|\Phi^{\{\{1,2\}\}}$, где $\Phi^{\{\{1,2\}\}}$ – произвольное пространство заговоров структуры $\{\{1,2\}\}$. Это дополняет игру Γ_n^3 одной вещественной рулеткой, результат вращения которой перед выбором стратегии узнают игроки 1 и 2, но не 3. Поскольку разбиением вещественной рулетки на сектора можно сымитировать любой случайный эксперимент со счётным числом исходов, для каждого из коррелированных равновесий по Нэшу, построенных в аналогичных обстоятельствах с использованием жребия, найдётся эквивалентное и в модели заговоров. Объединив таким образом все новые решения в одной игре, попробуем выделить среди них оптимальные с использованием концепции структурно согласованного равновесия.

Идея структурной согласованности равновесий в играх с заговорами довольно проста – если допустить, что входящие в семейство заговоров группы игроков объединяет не только общий механизм корреляции, но и в целом большие возможности для согласования действий, то среди обычных равновесий по Нэшу в коррелированных стратегиях можно особо выделить обладающие устойчивостью не только к индивидуальным отклонениям, но и к групповым, имея в виду исключительно входящие в семейство заговоров группы. В случае игры $\Gamma_n^3|\{\{1,2\}\}$ это означает, что мы можем назвать структурно несогласованными те равновесия, для которых найдётся отклонение, в котором участвуют первый и второй игроки, обоюдно увеличивая при этом свои выигрыши.

Если бы мы говорили только о равновесиях Нэша в чистых и смешанных стратегиях, такой критерий оптимальности оказался бы слишком сильным – действительно, одновременный выбор первым и вторым игроками компьютера i, выбираемого третьим с вероятностью $p_i^3 < 1$, даёт обоим выигрыш $(1-p_i^3)u^a_{GOOD}+p_i^3 u^a_{LATE} = 3-p_i^3 > 2$, что отсеивает вообще все решения в игре Γ_n^3. Однако, в случае игры с заговором $\Gamma_n^3|\{\{1,2\}\}$ ситуация радикально меняется – в точках коррелированного равновесия с $|T| = k$ заговорщики всегда выбирают общую стратегию, натыкаясь на третьего игрока с вероятностью $\frac{1}{k}$. При этом они могут улучшить свой результат, только отклонившись в пользу компьютера, который третий игрок выбирает с меньшей вероятностью. Если $|T| < n$, то всегда найдётся машина, не принадлежащая множеству T, которую третий игрок не выбирает никогда, что обеспечивает первому и второму при коллективном отклонении максимально возможные выигрыши $u^a_{GOOD} = 3$. Таким образом, почти все коррелированные равновесия тоже не являются структурно согласованными, за единственным исключением – при $k = n$ и соответственно $T = \{1, \ldots, n\}$ вообще все компьютеры выбираются игроками с равными вероятностями и продуктивного отклонения для заговорщиков нет.

Для единственного обнаруженного структурно согласованного равновесия несложно подобрать вполне естественную интерпретацию. Если представить, что два сотрудника могут координировать свои действия втайне от третьего, то нет ничего неожиданного в их стремлении выбрать один компьютер на двоих, чтобы избежать штрафа за недозагруз, минимизируя при этом шанс для третьего игрока наткнуться на них по воле случая, лишив их премии за срочность. Достигается это логичным образом тогда, когда наибольшая вероятность выбора каждой из машин минимальна, т.е. при равновероятном выборе из всех. Аналогичным образом, для третьего игрока целью становится максимизация наименьшей вероятности выбора каждого из компьютеров, поскольку он понимает, что заговорщики действуют заодно и пытаются избежать встречи с ним, и это тоже достигается в ситуации равновероятного выбора из всего парка машин.

6. Выводы

Продемонстрированный здесь феномен не так часто оказывается в фокусе внимания специалистов теории игр. Как правило, рассуждая о влиянии информационной асимметрии на конфликты, мы имеем в виду те или иные разновидности байесовских игр, где сам процесс розыгрыша зависит от скрытых параметров, значения которых известны одним игрокам достоверно, а другим лишь в виде случайного распределения. По этой причине, моделируя конфликты без такого вот априорного несовершенства знаний участников, мы зачастую автоматически видим в них игры с полной информацией. Но часто ли мы действительно имеем право на использование этого допущения? Задумываемся ли мы о том, насколько сильным по существу требованием является полнота информации в контексте моделирования экономических или политических процессов, протекающих в реальной жизни и имеющих социально значимые последствия? Если попытаться неформально описать обыденное представление о том, какой же именно должна быть многосторонняя транзакция, чтобы модели с полной информацией могли успешно предсказать её исход, то получится что-то вроде этих двух правил:

1. каждый участник транзакции должен обладать всей полнотой информации о предпочтениях и возможностях своих контрагентов;

2. если исход транзакции зависит от событий, происходящих не по воле её участников, то априорные вероятности реализации этих событий должны быть их общим знанием.

Казалось бы, ну чего ещё-то – мы ведь и так регулярно натыкаемся на конфликты, не укладывающиеся в описанные рамки. Увы, феномен чувствительности игр к дополнительной информационной асимметрии демонстрирует, что хотя эти два требования очевидно необходимы для применимости классических моделей, достаточными они не являются. Факты вынуждают нас признать, что для произвольных транзакций с тремя и более участниками требование 2 необходимо усилить:

2a. транзакция не должна сопровождаться никакими событиями, априорные вероятности реализации которых не являлись бы общим знанием её участников.

И вот это уточнение радикально обостряет проблему. Мы вполне можем сконструировать изолированный эксперимент, в ходе которого обеспечивается выполнение требования 2a – формат экзамена, например, можно считать более или менее надёжным. Если собрать в одной комнате незнакомых (чтобы у них не было возможности заранее договориться о тайных сигналах) подопытных, объяснить им правила игры, предложить листки бумаги для фиксации стратегий и строго пресекать попытки коммуникации, то резонно ожидать, что игра пройдёт без влияния дополнительной информационной асимметрии. Проблема в том, что реалии политических и экономических механизмов по большей части настолько далеки от подобного лабораторного уровня информационной изоляции участников, что для биржи, скажем, мы вряд ли сможем построить даже мысленную модель, обеспечивающую выполнение требования 2а.

Усугубляет положение честного исследователя то, что привнесение в некоторые игры дополнительной информационной асимметрии не просто количественно расширяет пространство решений. Как было продемонстрировано выше, исходы игры $\Gamma_n^3|\{\{1,2\}\}$ качественно разнятся с исходами Γ_n^3 – Парето-оптимальные решения без заговоров в новой модели оказываются структурно несогласованными, тогда как среди новоприобретённых решений есть по меньшей мере одно структурно согласованное. Это приводит к тому, что игры проявляют различное асимптотическое поведение с ростом количества компьютеров. Без заговоров можно ожидать, что независимо от размера вычислительного центра сотрудники будут получать константный средний доход, пользуясь одними и теми же 1 или 2 машинами. В коррелированном же случае каждый доступный компьютер может быть выбран как заговорщиками, так и аутсайдером с равной вероятностью, следовательно чем их больше, тем меньше вероятность случайной встречи, так что асимптотически доход заговорщиков будет стремиться к максимально возможному, а доход аутсайдера – к нулю.

К счастью, чувствительность к дополнительной информационной асимметрии не является для игр трёх и более игроков обязательным свойством. В этой работе для получения подходящего примера автору пришлось существенно обобщить модель планирования заданий, отказавшись от монотонности вознаграждения за срочность. Не исключено, что для классического монотонного случая можно в целом доказать отсутствие чувствительности к дополнительной информационной асимметрии, хотя пока и не очень понятно как. Вполне вероятно и для других игр многих игроков рано или поздно будут обозначены границы применимости моделей с полной информацией, и возможно даже, что эти границы очерчивают класс достаточно большой для построения полезных экономических механизмов без выхода за его пределы. Однако, в тех случаях, когда такой уверенности нет, более невозможно закрывать глаза на вопрос о возможном влияния на исход конфликта любых асимметрий в знаниях участвующих сторон, даже, казалось бы, несвязанных с его сутью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савченко М.А. *Нормативная теория заговоров* // МТИП. 2020. Т. 12, вып. 1. С. 33–59.
2. Agussurja L., Lau H.C. *The Price of Stability in Selfish Scheduling Games* // Web Intelligence and Agent Systems. 2009. V. 7. N. 4. P. 321–332.
3. Aumann R.J. *Subjectivity and correlation in randomized strategies* // Journal of Mathematical Economics. 1974. V. 1. N. 1. P. 67–96.
4. Koutsoupias E., Papadimitriou C. H. *Worst-case equilibria* // In STACS. 1999. P. 404–413.

NONMONOTONICALLY REWARDED JOB SCHEDULING

Maxim A. Savchenko, MSU Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Cand.Sc. (pdunan@gmail.com).

Abstract: This paper describes new model of job scheduling problem generalized for nonmonotonical reward functions. Importance of informational asymmetry is shown for conflict in consideration, leading to connection with «theory of conspiracies». Structurally consistent equilibria is demostrated to be acceptable as solution concept.

Keywords: job scheduling, informational asymmetry, nonbinding agreements
.