

УДК 517.7+330.46

ББК 65.050.2

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ РЕСУРСОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕГЛАМЕНТАХ

ГЕННАДИЙ А. УГОЛЬНИЦКИЙ

АНАТОЛИЙ Б. УСОВ

Южный федеральный университет

344007, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/41

e-mail: gaugolnickiy@sfedu.ru, abusov@sfedu.ru

В настоящей статье дано краткое описание авторской концепции управления устойчивым развитием. Согласно предложенной концепции, устойчивое развитие активной системы означает одновременное выполнение условий живучести и согласования интересов обеспечивающих её активных агентов. Основной акцент сделан на двух математических примерах. Во-первых, с помощью модели Ферхюльста-Пирла изучается соотношение между эгоистическими и альтруистическими эволюционными стратегиями популяции. Во-вторых, на основе дифференциально-игровой модели сравнивается независимое и кооперативное поведение пользователей возобновляемого ресурса. Условия живучести формализуются как фазовые ограничения. Их выполнение может быть результатом либо добровольной кооперации усилий агентов, либо их принудительной координации ведущим агентом (Центром). Основной вклад статьи заключается в сравнительном анализе этих способов управления устойчивым развитием

Ключевые слова: активные системы, дифференциальные игры, живучесть, устойчивое развитие .

Поступила в редакцию: 21.12.20 *После доработки:* 21.02.21 *Принята к публикации:* 10.09.21

1. Введение

Понятие устойчивого развития весьма интенсивно обсуждается и анализируется в течение более чем сорока лет в рамках соответствующей теории [6]. Ключевую роль в ней играет понятие живучести системы [2,3]. Живучесть означает, что некоторая эколого-экономическая система удовлетворяет определённым требованиям: формально, её вектор состояния принадлежит заданной области пространства состояний.

Однако, на практике условия живучести могут быть обеспечены только мотивированными активными агентами, чьи интересы совместимы с этими условиями. Детальный анализ понятия интереса представлен в монографии [9]. Математические модели согласования интересов изучаются в теории контрактов [8], дизайне механизмов [10-12], теории активных систем [10,13], информационной теории иерархических систем [5]. Наиболее адекватный математический аппарат разработан в теории дифференциальных игр в нормальной форме [4] и в форме характеристической функции (кооперативных игр) [16,18]. Альтруистическое поведение в несколько ином контексте рассматривается в статье [1].

В настоящей статье дано краткое описание авторской концепции управления устойчивым развитием. Согласно предложенной концепции, устойчивое развитие активной системы означает одновременное выполнение условий живучести и согласования интересов обеспечивающих её активных агентов [14]. Основной акцент сделан на двух математических примерах. Во-первых, с помощью модели Ферхюльста-Пирла изучается соотношение между эгоистическими и альтруистическими эволюционными стратегиями популяции. Во-вторых, на основе дифференциально-игровой модели сравнивается независимое и кооперативное поведение пользователей возобновляемого ресурса. Условия живучести формализуются как фазовые ограничения. Их выполнение может быть результатом либо добровольной кооперации усилий агентов, либо их принудительной координации Центром. Ос-

новой вклад статьи заключается в сравнительном анализе этих способов управления устойчивым развитием.

2. Управление устойчивым развитием активных систем

Необходимым следствием независимого поведения взаимосвязанных эгоистичных агентов является некий компромисс, который до определённой степени приемлем для всех этих агентов. В предельном случае, агенты могут сотрудничать: в некотором смысле, это есть переход от эгоизма к кооперации, когда агенты координируют свои усилия и ресурсы для достижения общей цели.

Наиболее адекватное описание компромиссов и сотрудничества даёт теория игр. Теоретико-игровые принципы оптимальности математически выражают различные точки зрения на справедливость в человеческих отношениях. Что касается компромисса, то возможны два случая. Если агенты равноправны и действуют независимо, то наиболее распространённый принцип оптимальности - это равновесие Нэша. Оно означает, что никому из агентов невыгодно отклоняться от коллективного соглашения, если все остальные также его выполняют. Если агенты иерархически упорядочены (ведущий и ведомые), то используется понятие равновесия по Штакельбергу. В этом случае ведущий выбирает и сообщает ведомым свою стратегию таким образом, чтобы максимизировать свой выигрыш на множестве наилучших ответов ведомых.

Что касается сотрудничества, то оно возникает, когда все агенты вступают в коалицию, максимизирующую их суммарный выигрыш. Соответствующее кооперативное решение оптимально по Парето. Затем различные принципы оптимальности для кооперативных игр (ядро, нуклеолус, устойчивые множества, вектор Шепли) определяют справедливое распределение выигрыша максимальной коалиции между всеми игроками.

В теории устойчивого развития данное понятие обычно сводится к некоторым требованиям живучести. Однако, эти требования могут быть выполнены только заинтересованными агентами. Поэтому наше определение управления устойчивым развитием активных систем утверждает, что условия живучести удовлетворяются мотивированными агентами. Мотивы агентов описываются их функциями выигрыша, и вновь возникает теоретико-игровая модель. Наиболее важно

здесь то, что изначально условия живучести не связаны с функциями выигрыша агентов.

Есть два пути решения этой проблемы. Если агенты игнорируют условия живучести, то они приходят к равновесию Нэша, которое в общем случае несовместимо с устойчивым развитием. Тогда для обеспечения условий живучести вводится специальный агент (Центр). Центр может влиять на остальных агентов путём принуждения (введения дополнительных ограничений на их множества стратегий) или побуждения (воздействия на их функции выигрыша). Таким образом, возникают иерархические игры с различной информационной структурой и фазовыми ограничениями. Решение такой игры есть равновесие Штакельберга, в котором наилучший ответ ведомых на стратегию Центра - это управляемое равновесие Нэша в игре ведомых в нормальной форме.

Второй путь намного более перспективен: если агенты добровольно и осознанно принимают условия живучести, то они сотрудничают и совместно максимизируют суммарную функцию выигрыша с учётом фазовых ограничений живучести. Соответствующее кооперативное решение оптимально по Парето. Остаётся разделить этот выигрыш между агентами и обеспечить его динамическую устойчивость посредством процедуры распределения дележа Л.А. Петросяна [16,18].

Таким образом, динамическая теоретико-игровая формализация понятий компромисса и сотрудничества создаёт основу для решения задачи управления устойчивым развитием активных систем на различных уровнях организации общества.

Для определённости рассмотрим следующую теоретико-игровую модель:

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} g(y(t)) dt + e^{-\rho T} G(x(T)) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

$$p(t) \in P; \quad q(t) \in Q; \quad (2.2)$$

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} g_i(y(t)) dt + e^{-\rho T} G_i(x(T)) \rightarrow \max \quad (2.3)$$

$$u_i(t) \in U_i(q_i(t)), \quad i \in N; \quad (2.4)$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0; \quad (2.5)$$

$$x(t) \in X^*, 0 \leq t \leq T. \quad (2.6)$$

Здесь J и J_i , g и g_i – интегральные и мгновенные функционалы выигрыша Центра и агентов соответственно; T – длина игры (если она бесконечна, то терминальный выигрыш G опускается); ρ – коэффициент дисконтирования; $y(t) = (q(t), p(t), u(t), x(t))$; $q(t)$ – вектор переменных принуждения; $p(t)$ – вектор переменных побуждения; $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ – вектор управлений агентов; $N = \{1, \dots, n\}$ – множество агентов; $x(t)$ – вектор состояния управляемой динамической системы; X^* – множество состояний, удовлетворяющих условиям живучести; соотношения (2.5) описывают динамику управляемой системы. Предполагается, что Q, P, U – компактные подмножества соответствующих метрических пространств; J и J_i непрерывны по своим аргументам; вектор-функция из (2.5) удовлетворяет условиям Каратеодори. Итак, (2.1)–(2.6) есть дифференциальная иерархическая игра (игра Штакельберга) с фазовыми ограничениями (2.6).

В случае принуждения Центр выбирает вектор стратегий q ($p - \text{const}$) в игре Штакельберга (ST) или обратной игре Штакельберга (GER). Центр может использовать программные (OL) или позиционные (CL) стратегии. Аналогично, в случае побуждения Центр выбирает вектор стратегий p ($q - \text{const}$) для тех же информационных структур.

В свою очередь, агенты могут выбрать один из трёх способов поведения:

а) изоляцию, когда агенты действуют независимо и приходят к множеству равновесий Нэша (NE) в своей игре в нормальной форме;

б) кооперацию, когда агенты объединяют ресурсы в составе максимальной коалиции и совместными действиями максимизируют суммарный функционал выигрыша (C);

в) сотрудничество, когда агенты добровольно максимизируют функционал выигрыша Центра.

Теперь можно определить гарантированный выигрыш Центра в описанных информационных структурах.

В случае принуждения в игре Штакельберга получаем

$$J_{NE}^{ST} = \sup_{q \in Q} \inf_{u \in NE(q)} J(q, u), \quad (2.7)$$

$$J_C^{ST} = \sup_{q \in Q} \inf_{u \in C(q)} J(q, u), \quad (2.8)$$

$$J_{\max}^{ST} = \sup_{q \in Q} \sup_{u \in U(q)} J(q, u), \quad (2.9)$$

для изоляции, кооперации и сотрудничества соответственно, а в обратной игре Штакельберга

$$J_{NE}^{GER} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \inf_{u \in NE(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \quad (2.10)$$

$$J_C^{GER} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \inf_{u \in C(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \quad (2.11)$$

$$J_{\max}^{GER} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \sup_{u \in U(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \quad (2.12)$$

$$\tilde{Q} = \{\tilde{q} : U \rightarrow Q\}, \quad \pi : \tilde{Q} \times U \rightarrow Q \times U$$

для тех же информационных структур. Решения для побуждения строятся аналогично.

3. Примеры из математической экологии

3.1. Модель Ферхюльста-Пирла

Американский социобиолог Эдвард Уилсон утверждает, что внутри некоторой популяции животных эгоисты побеждают альтруистов, но популяции альтруистов одерживают верх над популяциями эгоистов [17]. Иллюстрируем эту идею с помощью хорошо известной модели Ферхюльста-Пирла из математической экологии [7]. Эта модель имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K} \right], \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

где $x(t)$ – численность (биомасса) популяции в момент времени t ; r – темп воспроизводства популяции; K – ёмкость среды; x_0 – начальное значение x .

Очевидно, что в этой модели существуют два равновесия: $x_1^* = 0, x_2^* = K$. Для сообщества из $n \geq 2$ популяций на одном ареале естественно обобщить модель (3.1) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i(t) \left(1 - \frac{1}{K} \sum_{j=1}^n x_j(t) \right), \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Предположим, что каждая популяция делит свой эволюционный ресурс a_i между адаптацией (эгоистический интерес) и увеличением ёмкости среды (общий, или альтруистический интерес). Эту гипотезу можно записать как

$$r_i(t) = r_i + p_i(a_i - u_i(t)), \quad K(t) = K + c(u_1(t), \dots, u_n(t)). \quad (3.3)$$

Здесь $r_i(t), K(t)$ – новые динамические переменные для темпа воспроизводства и ёмкости среды; $u_i(t)$ – альтруистическое усилие i -й популяции в момент t ,

$$0 \leq u_i(t) \leq a_i; \quad (3.4)$$

p_i, c – монотонно возрастающие функции эгоистических и альтруистических усилий соответственно, $p_i(0) = c(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Назовём стратегию $u_i(t) \equiv 0$ эгоистической, а $u_i(t) \equiv a_i$ альтруистической. Тогда для сообщества эгоистов модель (3.2) принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = [r_i + p_i(a_i)]x_i(t) \left(1 - \frac{1}{K} \sum_{j=1}^n x_j(t)\right), \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

а для сообщества альтруистов – вид

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i(t) \left(1 - \frac{1}{K + c(a_1, \dots, a_n)} \sum_{j=1}^n x_j(t)\right), \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

В модели (3.6) множество нетривиальных равновесий определяется условием

$$\sum_{i=1}^n x_i = K + c(a_1, \dots, a_n) > K. \quad (3.7)$$

Таким образом, численность сообщества альтруистов стабилизируется на более высоком уровне, чем сообщества эгоистов. Этот факт подтверждает вторую часть тезиса Уилсона.

Теперь рассмотрим следующую задачу оптимального управления для i -й популяции:

$$J_i = \int_0^\infty e^{-\rho t} r_i(t) dt \rightarrow \max \quad (3.8)$$

с учётом (3.2) и (3.4).

В этой задаче i -я популяция максимизирует свой темп воспроизводства на бесконечном периоде времени. Вновь предположим, что $r_i(t), K(t)$ определяются соотношениями (3.3), и добавим для определённости, что

$$p_i(a_i - u_i(t)) = \sqrt{a_i - u_i(t)}, \quad c(u_1(t), \dots, u_n(t)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i(t)}. \quad (3.9)$$

Вновь рассмотрим два предельных случая эгоизма и альтруизма i -й популяции. В случае альтруизма ($u_i(t) \equiv a_i$) имеем

$$J_i^a = r_i \int_0^\infty e^{-\rho t} dt = \frac{r_i}{\rho},$$

а в случае эгоизма ($u_i(t) \equiv 0$)

$$J_i^e = (r_i + \sqrt{a_i}) \int_0^\infty e^{-\rho t} dt = \frac{r_i + \sqrt{a_i}}{\rho} > J_i^a. \quad (3.10)$$

Итак, первая часть тезиса Уилсона также подтверждена.

3.2. Оптимальная эксплуатация возобновляемых ресурсов

Рассмотрим здесь три теоретико-игровые информационные структуры: независимых эгоистичных агентов, их кооперацию и иерархическое взаимодействие (игру Штакельберга) безразличного Центра с агентами.

3.2.1 Независимые эгоистичные агенты

Пусть несколько агентов $N = \{1, \dots, n\}$ эксплуатируют один возобновляемый биологический ресурс (например, ловят рыбу). Этот процесс можно описать следующей дифференциально-игровой моделью:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} [a_i u_i(t) - b_i u_i^2(t)] dt + x(T) \rightarrow \max \quad (3.11)$$

$$0 \leq u_i(t) \leq q_i(t) \leq x(t), \quad i \in N; \quad (3.12)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - \sum_{j \in N} u_j(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.13)$$

Здесь $x(t)$ – запас биомассы рыбы в момент t ; $u_i(t)$ – рыболовное усилие агента i в момент t ; J_i – общий выигрыш агента i ; T – период рассмотрения; a_i – коэффициент дохода; b_i – коэффициент затрат для агента i ; r – темп воспроизводства; x_0 – начальный запас биомассы.

Условие живучести для рыбной популяции можно записать в виде

$$\forall t \in [0, T] \quad x(t) \geq \bar{x}, \quad (3.14)$$

где $\bar{x}$ – пороговое значение запаса, требуемое с экологической точки зрения для выживания популяции. Заметим, что условие (3.14) внешнее для модели (3.11)–(3.13), и агенты не заинтересованы в его выполнении. Для обеспечения этого условия вводится безразличный Центр, который использует принуждение с помощью переменных $q_i(t), i \in N$ [14]. Переменные принуждения интерпретируются как квоты (административные или законодательные ограничения).

Сначала фиксируем управления Центра и найдём равновесие Нэша в программных стратегиях в дифференциальной игре (3.11)–(3.13). Функция Гамильтона i -го агента имеет вид

$$H_i(x, u_i, \lambda_i) = a_i u_i - 2b_i u_i^2 + \lambda_i \left(rx - \sum_{j \in N} u_j \right), \quad i \in N, \quad (3.15)$$

где $\lambda_i(t)$ – сопряжённая переменная. Для линейно-квадратичной модели из условия первого порядка

$$\frac{\partial H_i(x, u_i, \lambda_i)}{\partial u_i} = a_i - 2b_i u_i - \lambda_i = 0$$

получаем оптимальные управления

$$u_i^*(t) = \frac{1}{2b_i} [a_i - \lambda_i(t)], \quad i \in N. \quad (3.16)$$

Тогда

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \rho \lambda_i(t) - \frac{\partial H_i(x, u_i, \lambda_i)}{\partial x} = (\rho - r) \lambda_i(t), \quad \lambda_i(T) = 1. \quad (3.17)$$

Таким образом,

$$\lambda_i^*(t) = e^{(\rho+r)(T-t)}, \quad i \in N. \quad (3.18)$$

Тогда

$$u_i^*(t) = \frac{1}{2b_i} [a_i - e^{(\rho+r)(T-t)}], \quad i \in N. \quad (3.19)$$

Уравнение динамики (3.13) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \frac{a_i}{b_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \frac{e^{(\rho+r)(T-t)}}{b_i}, \quad x(0) = x_0. \quad (3.20)$$

Его решение методом вариации произвольной постоянной даёт

$$x^*(t) = x_0 e^{rt} + \frac{1 - e^{rt}}{2r} \sum_{i \in N} \frac{a_i}{b_i} + \frac{e^{(\rho+r)(t-T)} - e^{-(\rho+r)T+rt}}{2\rho} \sum_{i \in N} \frac{1}{b_i}. \quad (3.21)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 H_i(x, u_i, \lambda_i)}{\partial u_i^2} = -2b_i u_i < 0.$$

Следовательно, функция (3.19) есть точка максимума функции Гамильтона, а функции (3.19), (3.21) являются решением задачи оптимального управления (3.11)–(3.13), если удовлетворяют условиям (3.12). В противном случае, если функция (3.19) выходит за левую или правую границу области допустимых управлений (3.12), то оптимальным становится решение, совпадающее с соответствующей границей ($u_i^*(t) = 0$ или $u_i^*(t) = q_i(t)$), а переменная состояния в момент времени t принимает вид

$$x^*(t) = x_0 e^{rt} + \frac{1 - e^{rt}}{2r} \sum_{i \in N_1} \frac{a_i}{b_i} + \frac{e^{(\rho+r)(t-T)} - e^{-(\rho+r)T+rt}}{2\rho} \sum_{i \in N_1} \frac{1}{b_i} + \sum_{i \in N_2} \int_0^T q_i(\tau) d\tau.$$

Здесь $N_1 = \{i \in N : u_i^*(t) \neq 0, q_i\}$; $N_2 = \{i \in N : u_i^*(t) = q_i\}$.

Если траектория (3.21) не удовлетворяет условию живучести (3.14), то есть два варианта решения задачи управления устойчивым развитием. Во-первых, агенты могут объединить усилия, создать максимальную коалицию и совместно максимизировать суммарный функционал выигрыша

$$J = \sum_{i \in N} J_i = \int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i \in N} [a_i u_i(t) - b_i u_i^2(t)] dt + nx(T) \quad (3.22)$$

в силу (3.12)–(3.13) с явным учётом условия (3.14).

Это путь кооперации, который формализуется как задача оптимального управления (3.22), (3.12)–(3.13) с фазовыми ограничениями (3.14).

Во-вторых, если агенты не кооперируются, то для обеспечения условия (3.14) путём принудительной координации агентов вводится Центр. Центр принуждает агентов к выполнению условий живучести с учётом некоторых бюджетных ограничений. Введём функцию $C_q(q)$, характеризующую административные расходы Центра. Естественно предположить, что $C_q(q) = C_q(\sum_{i \in N} q_i)$, $\lim_{q \rightarrow 0} C_q(q) = \infty$, $C_q(nx) = 0$, $C_q(q)$ монотонно убывает на отрезке $[0, nx]$. Тогда бюджетные ограничения Центра имеют вид

$$C_q(q) \leq R, \quad (3.23)$$

где R – бюджет Центра.

3.2.2 Кооперация агентов и совместное выполнение условия живучести системы

Аналитическое исследование задачи оптимального управления (3.22), (3.12)–(3.14) с использованием принципа максимума Понтрягина или функции Беллмана затруднено наличием фазовых ограничений (3.14). Поэтому в этом случае для исследования модели используется метод качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования (КРС ИМ) [15].

Методом КРС ИМ исследуется задача оптимального управления для n агентов (3.22) с условиями (3.12), (3.14) и уравнением динамики (3.13). Получаем задачу оптимального управления при наличии фазовых ограничений, в которой управлением является вектор-функция.

Пусть $U = U_1 \times \dots \times U_n$ – множество возможных управлений в задаче (3.22), (3.12)–(3.14) при n агентах. Здесь $U_i, i = 1, 2, \dots, n$ – множества допустимых управлений каждого из агентов. В нашем случае

$$U_i = \{u_i(t) : 0 \leq u_i(t) \leq q_i(t) \leq x(t)\},$$

$$U = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i(t) \in U_i; \ x(t) = x(u(t)) \geq \bar{x}\}.$$

Функции q_i $i = 1, 2, \dots, n$ заданы, а условие $x(t) \geq \bar{x}$ выполняется при любом наборе управлений $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ из U .

Метод КРС ИМ эмпирический и основан на предположении, что $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $U_i = U_i^{QRS}$, а $U = U^{QRS}$, где множества U_i^{QRS} содержат качественно репрезентативные стратегии i -го агента, а во множество U^{QRS} входят только те качественно репрезентативные стратегии агентов, при которых выполнено условие (3.14). При этом предполагается, что мощность множеств U_i^{QRS} $i = 1, 2, \dots, n$ невелика: $|U_i^{QRS}| = K$, где число K невелико. Тогда $U^{QRS} = U_1^{QRS} \times \dots \times U_n^{QRS}$ есть множество качественно репрезентативных стратегий (QRS) задачи, мощность которого равна $m = |U^{QRS}| = \prod_{i=1}^n |U_i^{QRS}| = K^n$.

Определение 3.1. . Множество $U^{QRS} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}\}$ называется множеством QRS с точностью Δ , если [15]:

(а) для любых двух элементов $u^{(i)}, u^{(j)} \in U^{QRS}$ справедливо $|J^{(i)} - J^{(j)}|/J_{\max} > \Delta$;

(б) для любого элемента $u^{(l)} \notin U^{QRS}$ найдётся элемент $u^{(j)} \in QRS$ такой, что $|J^{(l)} - J^{(j)}|/J_{\max} \leq \Delta$.

Здесь $J^{(i)}, J^{(j)}, J^{(l)}$ – выигрыши коалиции агентов при соответствующих сценариях управления; $J^{(s)} = J(u_1^{(s)}, \dots, u_n^{(s)})$, $s = i, j, l$; $\Delta > 0$; $J_{\max}$ – максимальный выигрыш коалиции агентов. Значение константы точности Δ определяется спецификой конкретной системы управления и целями, стоящими перед лицом, принимающим решение. Точное обоснование порядка величины Δ пока отсутствует, из технических соображений она должна быть не больше, чем 10% от характерных значений выигрышей.

Смысл введения множества QRS состоит в том, что стратегии из QRS ведут к существенному различию в выигрышах коалиции агентов, а различие между одним из репрезентативных и любым сценарием, не входящим во множество QRS, несущественно. Поэтому вместо полного перебора или перебора слишком большого числа сценариев достаточно рассмотреть сценарии из множества QRS.

При использовании метода КРС ИМ на первый план выходит планирование вычислительных экспериментов. Представляется целесообразным выбрать следующие сценарии для построения начального множества QRS. Усилия агента по ловле рыбы могут быть суще-

ственными, в этом случае $u_i = q_i$, умеренными ($u_i = q_i/2$), и минимальными ($u_i = q_i/10$). Кроме того, для простоты предположим, что стратегии агентов не меняются с течением времени и $u_i(t) \equiv u_i \in \{q_i/10, q_i/2, q_i\} = U_i^{QRS}, i \in N; |U^{QRS}| \leq 3^n$.

В последнем соотношении используется неравенство, потому что в начальное множество QRS войдут только те стратегии агентов, которые позволяют выполнить условие живучести (3.14). При небольших значениях n ($n < 15$) проведение имитационных экспериментов по методу QRS не представляет значительных вычислительных трудностей.

При сделанных предположениях решение уравнения динамики (3.13) принимает вид

$$x(t) = x(0)e^{rt} + (1 - e^{rt}) \sum_{i=1}^n u_i/r. \quad (3.24)$$

Алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления (3.22), (3.12)–(3.14) на множестве QRS состоит в следующем:

1. Задаются вид и значения всех входных функций и параметров модели (3.22), (3.12)–(3.14).

2. Строится начальное множество QRS вида $U_i^{QRS} = \{q_i/10, q_i/2, q_i\}; i = 1, 2, \dots, n$. Выбирается значение постоянной Δ так, чтобы она была равна одной десятой от выигрыша коалиции агентов (3.22) при $u_i = q_i/2; i = 1, 2, \dots, n$. Проверяется выполнение обоих условий в определении множества QRS. При необходимости начальное множество QRS сужается или расширяется. При расширении множества QRS в него добавляются новые стратегии, качественно различные с точки зрения выигрыша коалиции агентов. Они получают добавление в QRS сценариев, расположенных между ранее выбранными качественно репрезентативными стратегиями агентов.

3. Путем полного перебора всех стратегий агентов из QRS находится максимальное значение функционала (3.22) с учетом условий (3.12), (3.14) и (3.24).

Имитационные эксперименты проводились на компьютере с микропроцессором A10 серии Intel Pentium G4620 с оперативной памятью 4 Гб на объектно-ориентированном языке программирования C# согласно приведённому алгоритму. Среднее время одного имитацион-

ного эксперимента после построения множества QRS игры составило менее секунды.

В работе использовались в основном оценочные данные, поэтому числовая идентификация модели носит тестовый характер и обеспечивает разумное соотношение размерностей величин для приемлемых качественных выводов по сравнительному анализу результатов численного моделирования.

На основе анализа фактических данных [19,20] можно сделать вывод о том, что себестоимость одного килограмма рыбы-сырца составляет 60-120 руб., а цена продажи – 150-200 руб. за килограмм. Биомасса популяции рыбы-сырца составляет 8000-12000 килограммов.

Значение коэффициента дисконтирования выбирается равным $\rho = 0.04$, что примерно соответствует годовой инфляции. Моделирование проводилось на интервале в 4 года, т.е. $T = 4$. Рассматривался случай трёх агентов. Для определения значений остальных параметров применяется экспертная оценка. Тестовые значения параметров модели для i -го агента приведены в таблице 1. Здесь приняты сокращения: т – тысяч, руб. – рублей, кг – килограмм.

Таблица 1. Тестовые значения параметров модели

Параметр	a_i	b_i	x_0	$\bar{x}$	ρ	r
Значение	100	7	10	7	0.04	0.5
Размерность	т.руб/год	т.руб/год	тонны	тонны	-	1/год

Кроме того, предполагалось, что $n = 3$; $T = 4$; $q_i(t) = x(t)$; $i = 1, 2, 3$. Было проведено порядка 80 численных экспериментов, при этом варьировались величины ($i = 1, 2, 3$): a_i от 30 до 500 т.руб/год; b_i от 1 до 50 т.руб/год; x и $\bar{x}$ от 1 до 50 т.кг; r от 0.05 до 1.5 1/год.

При построении начального множества QRS величина Δ , характеризующая допустимую относительную ошибку при определении оптимального выигрыша коалиции агентов методом КРС ИМ, варьировалась от 0.05 до 0.9.

В таблице 2 приведены результаты построения начального множества QRS для симметричных агентов при разных значениях величины Δ в случае $n = 3$; $T = 4$; $q_i(t) = x(t)$; $i = 1, 2, 3$ для входных

данных из таблицы 1. Предполагается, что стратегии агентов не меняются за рассматриваемый интервал времени.

Таблица 2. Мощность множества QRS для входных данных примера 1 в случае коалиции агентов

$\Delta \text{т.руб}$	0.05	0.1	0.25	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$ U^{QRS} $	735	665	604	523	313	206	116	38	15

Для наглядности ниже приведены результаты имитационных экспериментов для нескольких наборов входных данных. Пусть имеется три агента, которые образуют коалицию, и моделирование проводится на интервале времени в 4 года, т.е. $T = 4$ года, $\rho = 0.04$. Предполагается, что стратегии агентов остаются постоянными в течение моделируемого интервала времени. Если в какой-то момент времени управление одного из агентов из множества QRS оказывается больше $x(t)$ (попытка вылова несуществующей рыбы), то оно полагается равным $x(t)$. Такая ситуация возможна в силу постоянства во времени состава множества QRS стратегий агентов и возможного убывания численности рыбы с течением времени.

Пример 1. В таблице 3 в первом столбце указан номер примера, в следующих столбцах – входные данные примеров и результаты счета. Здесь J и J_- – выигрыш коалиции агентов (3.22) в т.руб., а x и x_- – количество рыбы в тоннах в конечный момент времени при учёте условия живучести (3.14) и без учёта этого условия соответственно; r выражена в 1/год; a_i и b_i ($i = 1, 2, 3$) – в т.руб/год.

3.2.3 Бескорыстный принципал и выполнение условия живучести системы

Если агенты не кооперируются, то для обеспечения условия живучести (3.14) вводится Центр, который может принуждать агентов путём квотирования при учёте бюджетных ограничений (3.23).

В случае однородных агентов имеем $q_i(t) = q_i = \text{const}$. Тогда

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - nq(t); \quad x(0) = x_0.$$

Условие живучести принимает вид

$$x(t) = x_0 e^{rt} - nqt \geq \bar{x}.$$

Таблица 3. Результаты счёта для входных данных примера 1

№	г	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	$\bar{x}$	x_0	x/x_-	J/J_-
1	0.5	100	100	100	10	10	10	5	10	36/0	646/1500
2	0.9	100	100	100	10	10	10	5	10	247/247	1281/1281
3	0.9	100	100	100	16	16	16	5	10	35/35	610/610
4	0.5	100	100	100	10	10	10	5	16	57/57	977/977
5	0.2	100	100	100	10	10	10	1	10	3.9/0	552/1500
6	0.5	100	50	20	10	10	10	5	10	36/0	387/600
7	0.4	100	50	20	10	10	10	5	10	16/0	310/600
8	0.8	100	50	20	10	10	10	5	10	157/157	751/751
9	0.2	100	50	20	10	10	10	5	10	3.9/0	291/600
10	0.5	50	20	10	10	10	10	5	10	36/36	206/206
11	0.5	200	150	300	10	10	10	5	10	36/0	1346/7000
12	0.5	200	150	300	10	10	10	0.5	1	3.6/0	140/1240
13	0.5	200	150	300	10	10	10	0.1	0.2	3.6/0	140/1240
14	0.5	200	150	300	10	10	10	0.1	0.5	3.6/0	140/1240
15	0.8	200	150	300	10	10	10	0.1	0.5	2/0	337/1240
16	0.8	200	150	300	10	20	30	0.1	0.5	2/0	187/620
17	0.8	200	150	300	20	40	50	0.1	0.5	2/0	184/595
18	0.8	200	150	300	5	10	1	0.1	0.5	2/0	191/642
19	0.2	200	150	300	10	10	10	0.1	0.5	0.2/0	65/635

Для выполнения условия живучести необходимо, чтобы

$$q^0(t) \leq \frac{x_0 e^{rt} - \bar{x}}{nt}.$$

Если $q^0(t) : C_q(q^0) \leq R$, то принципалу удастся обеспечить выполнение условия живучести.

В случае неоднородных агентов задача определения величин $q_i(t)$, удовлетворяющих условию живучести (3.14) при минимально возможных административных расходах, решается методом КРС ИМ. Дадим математическую постановку задачи в этом случае. Целевой функционал Центра имеет вид

$$J_0 = \int_0^T C_q(q(t)) dt \rightarrow \min. \quad (3.25)$$

Ограничения на его управления

$$0 \leq q_i(t) \leq x(t), \quad i \in N. \quad (3.26)$$

Кроме того, должно быть выполнено условие (3.23). С учетом иерархии в отношениях между агентами решается задача (3.11)–(3.14), (3.23), (3.25), (3.26).

Алгоритм построения равновесия Штакельберга в модели (3.11)–(3.14), (3.23), (3.25), (3.26) методом КРС ИМ состоит в следующем.

1. Задаются вид и значения всех входных функций и параметров модели (3.11)–(3.14), (3.23), (3.25), (3.26).

2. Строится начальное множество QRS вида

$$\Omega^{QRS} = U^{QRS} \times Q^{QRS}; \quad U^{QRS} = \prod_{i=1}^n U_i^{QRS}; \quad Q^{QRS} = \prod_{i=1}^n Q_i^{QRS};$$

$$Q_i^{QRS} = \left\{ \frac{x_0}{10}, \frac{x_0}{2}, x_0 \right\}; \quad U_i^{QRS} = \left\{ \frac{q_i}{10}, \frac{q_i}{2}, q_i \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Выбирается значение постоянной Δ так, чтобы она была равна одной десятой от выигрыша Центра (3.25) при $q_i = x_0/2$; $u_i = q_i/2$; $i = 1, 2, \dots, n$. Проверяется выполнение обоих условий устойчивости в определении множества QRS. При необходимости начальное множество QRS сужается или расширяется. При расширении множества QRS в него добавляются новые стратегии, качественно различные с точки зрения выигрыша Центра. Они получаются, как и ранее, добавлением в QRS точек, расположенных между ранее выбранными качественно репрезентативными стратегиями агентов и Центра.

3. Выбирается текущая стратегия Центра из множества QRS.

4. Путем полного перебора всех стратегий агентов из их множеств QRS находятся равновесия Нэша в игре агентов (3.11)–(3.13). Если равновесий Нэша несколько, то из них выбирается то, которое приносит Центру наименьший выигрыш.

5. Сравнивается текущая стратегия Центра и найденный в пункте 4 оптимальный ответ агентов на неё с оптимальным на данный момент для Центра в смысле. Приносящие Центру больший выигрыш стратегии сохраняются.

6. Если просмотрены не все стратегии Центра из его множества QRS, то переход на пункт 3 алгоритма. В противном случае равновесие Штакельберга в игре (3.11) – (3.14), (3.23), (3.25), (3.26) найдено.

Были проведены имитационные эксперименты в соответствии с приведённым алгоритмом. Как и ранее, предполагается, что стратегии агентов остаются постоянными в течение моделируемого интервала времени.

В таблице 4 приведена мощность начального множества QRS для Центра и однородных агентов при разных значениях величины Δ в т.руб. в случае $n = 3$; $C_q(q) = C_1(nx - q)/q^2$; $C_1 = 1$ т.руб.; $T = 4$ года; $R = 10$ т.руб и входных данных таблицы 1.

Таблица 4. Мощность множества QRS для входных данных примера 1 при безразличном Центре

Δ	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.65	0.8	0.9
$ \Omega^{QRS} $	23545	19165	9404	5143	3321	2112	851	223	98

Таким образом, выбор величины Δ сильно влияет на мощность множества QRS. Уменьшение Δ значительно увеличивает мощность множества QRS, делая проведение имитационных экспериментов при $\Delta < 0.1$ затруднительными.

Пример 2. Результаты имитационных экспериментов в случае безразличного Центра помещены в таблицу 5. Здесь J - суммарный выигрыш всех агентов в т.руб, когда сами они не учитывают условия живучести, но вынуждены следовать установленным Центром квотам вылова. В таблице 5 сохранены принятые ранее сокращения; $C_q(q) = C_1(nx - q)/q^2$; $C_1 = 1$ т.руб.т.кг; $T = 4$ года; $R = 10$ т.руб; $n = 3$; $\rho = 0.04$; q_i^0 ($i = 1, 2, 3$) – квоты вылова рыбы, при которых выполнено условие живучести (3.14) и затраты Центра при этом минимальны. В первом столбце таблицы указан номер примера из таблицы 3, для которого проведены расчеты. Во втором-четвёртом столбцах указаны найденные квоты вылова, позволяющие выполнить условие живучести с минимальными для Центра расходами. В пятом столбце указано, удаётся ли выполнить условие живучести при имеющихся ограничениях на административный ресурс Центра - ставится знак '+', если условие живучести (3.14) Центру при выбранном значении R выполнить удаётся, и минус в противном случае. В столбце 6 указаны административные расходы Центра в т.руб. на выполнение условия (3.14). В столбце 7 приведён суммарный выигрыш агентов в т.руб (фактически максимальной коалиции агентов) в

равновесии Штакельберга, в столбце 8 для сравнения приведены результаты из таблицы 3 выигрыша максимальной коалиции агентов при отсутствии ограничений на вылов и самостоятельного выполнения ими условия живучести системы.

Таблица 5. Результаты расчётов по определению максимально возможных квот вылова для входных данных из таблицы 3

№	q_1^0	q_2^0	q_3^0	УЖ	R_{min}	J_+	J
1	0	0.3	10	+	2.3	576	646
2	10	10	10	+	0	1281	1281
3	10	10	10	+	0	610	610
4	16	16	16	+	0	977	977
5	0	0	7	+	2.7	455	552
6	6.8	10	10	+	0.15	378	387
7	2.6	10	10	+	0.18	295	310
8	10	10	10	+	0	751	751
9	0.8	10	10	+	0.1	262	291
10	10	10	10	+	0	206	206
11	0	10	0.4	+	2.3	1248	1346
12	-	-	-	-	-	-	140
13	-	-	-	-	-	-	140
14	-	-	-	-	-	-	140
15	-	-	-	-	-	-	337
16	-	-	-	-	-	-	187
17	-	-	-	-	-	-	184
18	-	-	-	-	-	-	191
19	-	-	-	-	-	-	65

4. Анализ результатов

Анализ результатов проведённых имитационных экспериментов, часть из которых представлена в таблицах 3,5, позволил сделать следующие выводы.

1. При выполнении условия живучести (3.14) в равновесии системы в зависимости от значения коэффициента воспроизводства рыбы r запас биомассы рыбы с течением времени может как расти, так и убывать, но не до нуля. Так, при значениях $r \leq 0.3$ (1/год) для

рассмотренных выше входных данных запас рыбы уменьшается с течением времени, хотя и не падает до нуля. При значениях коэффициента воспроизводства $r > 0.3$ (1/год) запас рыбы с течением времени растёт, причём тем быстрее, чем больше коэффициент воспроизводства.

В силу вида функций дохода (линейная) и затрат (квадратичная) на обработку рыбы при большом начальном запасе рыбы ($x_0 > 15000$ кг и $r = 0.5$ (1/год); $a_i = 100$ руб/год; $b_i = 10$ руб/год; $i = 1, 2, 3$) агентам становится невыгодно вылавливать всю рыбу, даже при отсутствии условия (3.14). При $x_0 \leq 15000$ кг для указанных выше входных данных при отсутствии условия (3.14) агентам выгодно выловить весь запас рыбы.

Таким образом, при больших значениях коэффициента воспроизводства или начального запаса рыбы этот запас растёт с течением времени. Необходимости в учёте условия живучести нет, оно выполняется автоматически. В противном случае для агентов невыгодно выполнение условия (3.14). При его отсутствии они вылавливают весь запас рыбы, получая максимальный доход за 4 года и не думая о своём будущем.

Увеличение коэффициента воспроизводства рыбы приводит к росту выигрыша агентов. Если их возможности по вылову рыбы уже полностью использованы, то увеличение их выигрыша в этом случае происходит за счёт терминального слагаемого в функции выигрыша.

2. С ростом коэффициента дохода и/или уменьшением затрат на вылов выигрыш агентов ожидаемо растёт. С увеличением затрат агентов на вылов рыбы b_i или уменьшении коэффициента дохода a_i ($i = 1, 2, 3$), помимо уменьшения их выигрыша, агентам после некоторых пороговых значений a_i и b_i становится невыгодно вылавливать всю рыбу даже при отсутствии условия (3.14). Так, для указанных выше входных данных при росте коэффициентов b_i доход агентов падает, а при $b_i > 15$ руб/год ($i = 1, 2, 3$) они уже не вылавливают всю рыбу и условие (3.14) выполняется автоматически.

3. При кооперации агентам всегда удаётся выполнить условие живучести системы (3.14). В случае бескорыстного Центра всё зависит от административных возможностей Центра, а также скорости воспроизводства рыбы, её начального запаса и коэффициента дохода

агентов. Так, в случае небольшой скорости воспроизводства рыбы $r \leq 0.25$ (1/год) или малого начального запаса рыбы $x_0 \leq 2$ кг и имеющихся административных возможностях Центра $R = 10$ тыс. руб. для рассмотренных выше входных данных обеспечить выполнение условия (3.14) Центру не удаётся. При малой скорости воспроизводства или малом начальном запасе рыбы для выполнения условия (3.14) Центр должен обладать достаточными административными возможностями. При этом его расходы будут значительными. Для выполнения условия (3.14) в примере 12 необходимо, чтобы $R \geq 98$ тыс. руб., в примере 13 – $R \geq 526$ тыс. руб., в примере 14 – $R \geq 184$ тыс. руб., в примерах 15-18 – $R \geq 155$ тыс. руб., в примере 19 – $R \geq 288$ тыс. руб.

4. Суммарный выигрыш всех агентов в случае бескорыстного Центра во всех примерах не превосходит их выигрыш при кооперации и совместном выполнении условия живучести (3.14).

5. Заключение

Согласно предложенной концепции, устойчивое развитие активной системы означает одновременное выполнение условий живучести и согласованности интересов активных агентов. Для описания управления устойчивым развитием используются дифференциально-игровые модели с фазовыми ограничениями.

В настоящей работе проанализированы два варианта управления устойчивым развитием. В первом все агенты образуют коалицию, которая добровольно обеспечивает выполнение условия живучести системы. Во втором имеется безразличный Центр, единственной целью которого является выполнение условия живучести системы. Для этого Центр определяет максимально возможные квоты вылова рыбы, при которых это условие выполняется. Как показали проведённые имитационные эксперименты, кооперация агентов предпочтительнее и с точки зрения суммарной прибыли всех агентов, и с точки зрения выполнения условия живучести. Кроме того, в этом случае отсутствуют административные издержки, связанные с контролем установленных квот вылова рыбы для обеспечения живучести.

В дальнейшем планируется рассмотрение трехуровневой системы управления Центр – супервайзер – агенты при учёте возможного оппортунистического поведения супервайзера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клеймёнов А.Ф. *Альтруистический и агрессивный типы поведения в неантагонистической позиционной игре трёх лиц* // Труды ИММ УРО РАН. 2019. № 25(3). С. 108–117.
2. Aubin J.-P. *Viability Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
3. Cairns R.D., Martinet V. *An environmental-economic measure of sustainable development* // European Economic Review. 2014. V. 69. P. 4–17.
4. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge: Cambridge University Press., 2000.
5. Gorelov M.A., Kononenko A.F. *Dynamic models of conflicts. III. Hierarchical games* // Automation and Remote Control. 2015. V. 76. N 2. P. 264–277.
6. Kates R.W., Clark W.S., Corell R., Hall J.M. et al. *Sustainability Science* // Science. 2001. V. 292. P. 641–642.
7. Kot M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge: Cambridge University Press., 2001.
8. Laffont J.-J., Martimort D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. Princeton: Princeton University Press., 2002.
9. Laval Ch. *L'homme économique: Essai sur les racines du néolibéralisme*. Paris: Editions Gallimard., 2007.
10. Ed. by Novikov D. *Mechanism design and management: Mathematical methods for smart organizations*. New York: Nova Science Publishers., 2013.
11. Myerson R. *Optimal coordination mechanisms in generalized principal-agent models* // J. Math. Econ. 1982. V. 10. P. 67–81.
12. Myerson R. *Mechanism design by an informed principal* // Econometrica. 1983. V. 51. P. 1767–1798.

13. Novikov D. *Theory of control in organizations*. New York: Nova Science Publishers., 2013.
14. Ougolnitsky G. *Sustainable Management*. New York: Nova Science Publishers., 2011.
15. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. *Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games*. Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. New York: Nova Science Publishers., 2018. P. 63–106.
16. Petrosyan L. A. Yeung D. W. K. *Subgame-consistent Economic Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 2012.
17. Wilson E. *The Meaning of Human Existence*. New York-London: Liveright Publishing Corporation., 2014.
18. Yeung D. W. K., Petrosyan L. A., Lee M. C. C. *Dynamic Cooperation: A Paradigm on the Cutting Edge of Game Theory*. China: China Market Press., 2007.
19. <http://don-agro.ru/old/index.php?id=2236>.
20. <https://надальнийвосток.рф/storage/bp/bp-17.pdf>.

A COMPARATIVE ANALYSIS OF SUSTAINABLE EXPLOITATION OF RENEWABLE RESOURCES FOR DIFFERENT INFORMATION STRUCTURES

Gennady A. Ougolnitsky, Southern Federal University, Dr.Sc., professor (gaugolnickiy@sfedu.ru),

Anatoly B. Usov, Southern Federal University, Dr.Sc., associate professor (abusov@sfedu.ru)

Abstract: In this paper, a brief description of the authors' concept of sustainable management is given. According to the proposed concept, the sustainable development of an active system means that in the same time some requirements of viability of the system are satisfied, and the interests of the active agents are considered and coordinated. The main emphasis is made on two mathematical examples. First, a relation between egoistic and altruistic evolutionary strategies is studied by means of the Verhulst-Pearl model. Second, selfish and cooperative behavior of the users of a renewable resource is compared on the base of a differential game model. The conditions of viability are formalized as phase constraints. Their satisfaction may be a result of the voluntary coordination of the agents or their enforced coordination provided by a specially introduced principal. The main contribution of the paper consists in the comparative analysis of these ways of sustainable management.

Keywords: active systems, differential games, sustainable management, viability.