Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.2, с. 99–122

УДК 517.988+517.977.8
ББК 22.18

О РАВНОВЕСИИ ПО ШТАКЕЛЬБЕРГУ В ПРОГРАММНЫХ СТРАТЕГИЯХ В ВОЛЬТЕРРОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ИГРАХ

Андрей В. Чернов
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Для нелинейного вольтеррова функционально-операторного уравнения, управляемого двумя игроками с помощью конечномерных программных управлений по интегральным критериям качества, доказывается существование равновесия по Штакельбергу (в стиле М.С. Никольского). При этом используются результаты о непрерывной зависимости состояния и функционалов от конечномерных управлений, доказанные автором ранее, в совокупности с классической теоремой Вейерштрасса. Одноточечность множества минимизаторов первого игрока при заданном управлении второго игрока доказывается по схеме М.С. Никольского, применявшейся ранее для линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

©2022 А.В. Чернов

Ключевые слова: нелинейное вольтеррово функционально-операторное уравнение, существование равновесия по Штакельбергу.

Поступила в редакцию: 20.10.21 *После доработки*: 07.02.22 *Принята к публикации*: 16.05.22

1. Введение

На данный момент уже достаточно хорошо развита теория дифференциальных игр, связанных с сосредоточенными управляемыми системами, как линейными, так и нелинейными. Для распределенных управляемых систем соответствующие игровые задачи (даже в линейном случае) изучены, на наш взгляд, пока еще недостаточно. При этом значительное число исследований было посвящено играм сближения-уклонения (преследования-убегания) с динамикой, описываемой линейными эволюционными уравнениями – см., например, [5, 6, 9, 30]. Среди известных результатов, касающихся дифференциальных игр, связанных с теми или иными уравнениями в частных производных, укажем также работы [32, 28, 4, 31, 10]. В [33] производилось построение седловой точки в форме обратной связи для антагонистической игры, связанной с нелинейным автономным эволюционным уравнением в гильбертовом пространстве. В [16] получены достаточные условия существования ε-равновесия в антагонистической игре, связанной с нелинейным неавтономным эволюционным уравнением в банаховом пространстве.

Отметим, наконец, что в ряде работ автора были установлены достаточные условия существования ε-равновесия по Нэшу в дифференциальных играх, связанных с эллиптическими уравнениями в частных производных, а также в вольтерровых функционально-операторных играх. Вольтерровы функционально-операторные игры интересны тем, что к ним естественным образом сводятся дифференциальные игры, связанные с широким классом уравнений в частных производных, см., например, [17, 18, 19]. Под функционально-операторной игрой мы понимаем игры, динамика в которых описывается управляемым функционально-операторным уравнением типа Гаммерштейна, см. (2.1) далее. Такое уравнение называется вольтерровым, если оператор правой части вольтерров; соответствующую игру тоже естественно называть вольтерровой. Многочисленные содержательные примеры представления различных управляемых распределенных систем управляемым вольтерровым функцио-

нально-операторным уравнением вида (2.1) можно найти в [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], см. также пример в разделе 8. Такая широта охвата мотивирует нас на изучение игр с динамикой (2.1). Для удобства читателя приведем простейший классический пример — представление уравнением вида (2.1) управляемой задачи Гурса-Дарбу:

$$\begin{cases} x''_{t_1t_2}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), & t = (t_1, t_2) \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2]; \\ x(t_1, 0) = \omega_1(t_1), & t_1 \in [0, T_1]; \\ x(0, t_2) = \omega_2(t_2), & t_2 \in [0, T_2]; \\ \omega_1(0) = \omega_2(0). \end{cases} \tag{1.1}$$

Считаем, что функции ω_1 и ω_2 абсолютно-непрерывны, а суперпозиция $f\big(t, x(t), u(t)\big)$ суммируема со степенью $p \geq 1$ для всех $x \in L_q(\Pi)$, $u \in L_r(\Pi)$, при $p < q$, $r \in [1, \infty]$. Решение задачи (1.1), трактуемое в смысле п.в., естественно искать среди функций из $L_q(\Pi)$, имеющих смешанную производную в классе $L_p(\Pi)$ и понимать его как решение уравнения

$$x(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0) + \int\limits_0^{t_1} d\xi_1 \int\limits_0^{t_2} f\Big(\xi, x(\xi), u(\xi)\Big)\, d\xi_2.$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f(., x, u)\Big](t), \quad t = (t_1, t_2) \in \Pi, \quad x \in L_q(\Pi),$$

где $\theta(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0)$, $\theta \in L_q(\Pi)$, $A : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$ – оператор, определяемый формулой:

$$A[z](t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} ds_1 \int\limits_0^{t_2} z(s_1, s_2)\, ds_2.$$

Заметим, что для всякого прямоугольника $\Pi_\tau = [0; \tau_1] \times [0; \tau_2] \subset \Pi$ значения $A[z](t)$ при $t \in \Pi_\tau$ зависят лишь от значений $z(s)$ при $s \in \Pi_\tau$ и не зависят от значений $z(s)$ при $s \in \Pi \setminus \Pi_\tau$. Этот факт означает, что множество Π_τ является так называемым вольтерровым множеством для оператора A. Всякое объединение вольтерровых множеств тоже является вольтерровым. В частности, множество $\{t \in \Pi : t_1 + t_2 \leq \sigma\}$ при любом $\sigma \in [0; T_1 + T_2]$ тоже является вольтерровым множеством

оператора A. Стало быть, оператор A обладает достаточно богатой системой вольтерровых множеств и, соответственно, тоже называется вольтерровым. Как в этом примере, так и далее мы понимаем Π как множество независимых переменных, а $t \in \Pi$ как набор независимых переменных.

Разумеется, и задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big),\ t \in [0;T]; \quad x(0) = a,$$

тоже можно переписать в функционально-операторной форме:

$$x(t) = \theta + A\Big[f(., x, u)\Big](t), \quad t \in \Pi = [0;T], \quad x \in L_q(\Pi),$$

при $\theta = a$, $A[z](t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds$, $A : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$, при условии, что суперпозиция $f\big(t, x(t), u(t)\big)$ суммируема со степенью $p \geq 1$ для всех $x \in L_q(\Pi)$, $u \in L_r(\Pi)$, при $p < q$, $r \in [1, \infty]$. В этом примере вольтерровыми множествами оператора A являются всевозможные отрезки $[0;\tau]$, $\tau \in [0;T]$.

Данная статья написана под впечатлением от работы [8], где были получены условия равновесия по Штакельбергу в смысле программных измеримых управлений в бескоалиционной игре, связанной с линейным обыкновенным автономным дифференциальным уравнением (в пространстве $\mathbb{R}^n$) и функционалами проигрышей, линейными по управлению второго игрока.

Здесь мы для нелинейного вольтеррова функционально-операторного уравнения, управляемого двумя игроками с помощью конечномерных программных управлений по интегральным критериям качества, доказываем существование равновесия по Штакельбергу в стиле [8]. При этом используются результаты о непрерывной зависимости состояния и функционалов от конечномерных управлений, доказанные нами ранее, в совокупности с классической теоремой Вейерштрасса. Одноточечность множества минимизаторов первого игрока при заданном управлении второго игрока доказывается по схеме [8].

2. Предварительные построения и соглашения

Пусть $n, m, \ell, \xi, \eta \in \mathbb{N}$ – заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое (здесь и везде далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$ – некоторое лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1; +\infty]$, а $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$ – лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1; +\infty)$. Пусть, кроме того, $U \subset \mathcal{U}^\xi$, $V \subset \mathcal{U}^\eta$ — заданные ограниченные множества допустимых управлений первого и второго игроков, соответственно; $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Далее для вектор-функции $x \in \mathcal{X}^\ell$, являющейся образом вектор-функции $z \in \mathcal{Z}^m$ при отображении, осуществляемом оператором A, будем в зависимости от ситуации использовать равносильные обозначения: $x = A[z]$; $x(t) = A[z](t)$, $t \in \Pi$; $x(.) = A[z](.)$; $x = A\,[z(.)]$. Рассмотрим управляемое (игроками 1 и 2) функционально-операторное уравнение

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(., x(.), u(.), v(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{2.1}$$

где $u \in U$ – управление игрока 1, $v \in V$ – управление игрока 2, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $f(t, x, u, v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\xi \times \mathbb{R}^\eta \to \mathbb{R}^m$ – заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\{x, u, v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\xi \times \mathbb{R}^\eta$ и такая, что:

$\mathbf{F}_1$) для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^\xi$, $v \in \mathcal{U}^\eta$ имеем: $f\big(., x(.), u(.), v(.)\big) \in \mathcal{Z}^m$.

$\mathbf{F}_2$) Существует неубывающая функция $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\Big\| f\big(., y(.), u(.), v(.)\big) - f\big(., z(.), u(.), v(.)\big) \Big\|_{\mathcal{Z}^m} \le \mathcal{N}(M) \Big\{ \|y - z\|_{\mathcal{X}^\ell} \Big\}$$

для всех $y, z \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^\xi$, $v \in \mathcal{U}^\eta$, $\|y\|, \|z\| \le M$.

Измеримое подмножество $H \subset \Pi$ будем, следуя [11, 12], называть *вольтерровым множеством* оператора A, если $P_H A P_H = P_H A$, где P_H – это оператор умножения на характеристическую функцию множества H. Заметим, что система $\mathcal{B}(A)$ всех вольтерровых множеств оператора A непуста, так как во всяком случае содержит $\varnothing$ и Π. Если $\mathcal{B}(A)$ состоит только из этих двух множеств, будем называть ее *тривиальной*. Далее мы считаем, что система $\mathcal{B}(A)$ нетривиальна.

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{B}(A)$ - система вольтерровых множеств оператора $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$; $\delta > 0$ — заданное число. Тогда подсистему

$\mathcal{T} = \Big\{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\}$ системы $\mathcal{B}(A)$ будем, следуя [13, 14], называть *вольтерровой δ-цепочкой* оператора A, если для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$, выполняется неравенство $\Big\|P_h A P_h\Big\| < \delta$.

В дополнение к сформулированным выше будем считать выполненным следующее предположение.

$\mathbf{A}_1$) ЛОО A обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой.

Замечание 2.1. Условие $\mathbf{A}_1$) часто выполняется в приложениях. Примеры его успешной проверки см. в [20, 21, 22, 23, 24, 25, 15, 26].

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия $\boldsymbol{F}_1$), $\boldsymbol{F}_2$), $\boldsymbol{A}_1$). Тогда, каковы бы ни были управления $u \in \mathcal{U}^\xi$, $v \in \mathcal{U}^\eta$, уравнение* (2.1) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство вытекает непосредственно из [23, теорема 2].

Сформулируем признак тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения глобальной разрешимости уравнения (2.1). Потребуем дополнительно выполнения следующих условий.

$\mathbf{F}_3$) Для всех $u \in \mathbb{R}^\xi$, $v \in \mathbb{R}^\eta$ и п.в. $t \in \Pi$ имеем: $f(t,x,u,v) \le f(t,y,u,v)$ при $x, y \in \mathbb{R}^\ell$, $x \le y$ (векторные неравенства понимаются покомпонентно).

$\mathbf{F}_4$) Для всех $u \in U$, $v \in V$, $x \in \mathbb{R}^\ell$ и п.в. $t \in \Pi$ имеем:

$$0 \le f\big(t, x, u(t), v(t)\big) \le g(t,x),$$

где функция $g(t,x)$ удовлетворяет условиям вида $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), причем мажорантное уравнение

$$x = \theta + A\big[g(.,x)\big]$$

имеет решение $x = \widehat{x} \in \mathcal{X}^\ell$, $\widehat{x} \ge \theta$.

$\mathbf{A}_2$) ЛОО A является изотонным, то есть $A[y] \le A[z]$ для всех $y, z \in \mathcal{Z}^m$, $y \le z$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия $\boldsymbol{F}_1$), $\boldsymbol{F}_3$), $\boldsymbol{F}_4$), $\boldsymbol{A}_2$). Тогда, каковы бы ни были управления $u \in U$, $v \in V$, уравнение* (2.1) *заведомо имеет решение $x \in \mathcal{X}^\ell$, удовлетворяющее оценке: $\theta \le x \le \widehat{x}$.*

Доказательство см. в разделе 5.

Замечание 2.2. Вообще говоря, мы могли бы просто потребовать существования единственного решения уравнения (2.1) для всех допустимых управлений. Однако при исследовании игровой задачи нам все равно потребуется обеспечивать выпуклый характер зависимости решения этого уравнения от управления игрока 1, а на этом пути приходится использовать условия $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_3$), $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$). В свою очередь, мажорантное условие $\mathbf{F}_4$) – аналог мажорантного условия классической теоремы Уинтнера, которая часто используется при обосновании глобальной разрешимости задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее будем считать, что выполнены условия $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$). Тогда, в силу теорем 2.1, 2.2, уравнение (2.1) имеет единственное решение $x = x[u, v] \in \mathcal{X}^\ell$ для каждой пары $u \in U$, $v \in V$. Тем самым, однозначно определены функционалы проигрышей игроков 1 и 2:

$$I[u, v] = \int\limits_{\Pi} F\big(t, x[u, v](t), u(t), v(t)\big)\, dt,$$

$$J[u, v] = \int\limits_{\Pi} G\big(t, x[u, v](t), u(t), v(t)\big)\, dt, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Здесь мы предполагаем, что интегранты функционалов удовлетворяют следующему естественному условию:

Φ_1) для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^\xi$, $v \in \mathcal{U}^\eta$ имеем: $F\big(., x(.), u(.), v(.)\big)$, $G\big(., x(.), u(.), v(.)\big) \in L_1(\Pi)$.

Игрок 1 стремится к минимизации функционала $I[u, v]$ с помощью выбора своего допустимого управления $u \in U$, а игрок 2 — к минимизации функционала $J[u, v]$ с помощью выбора своего допустимого управления $v \in V$. Существуют различные определения оптимальности пары допустимых программных управлений u, v. Здесь мы, следуя [8], будем использовать следующую модификацию понятия равновесия по Штакельбергу (по поводу понятия равновесия по Штакельбергу и сходных понятий см. соответствующую библиографию в [8]). Так же, как и в [8], ведущим будем предполагать игрока 2:

он сообщает о своем выборе управления $v \in V$ игроку 1. Зная v, игрок 1 минимизирует свой функционал $I[u,v]$ по допустимым управлениям $u \in U$. Множество соответствующих минимизаторов обозначим через $U^*[v]$. Предположим, что $U^*[v] \neq \varnothing$ и состоит из одного элемента для каждого $v \in V$. Рассмотрим далее задачу на минимум

$$J\big[U^*[v], v\big] \to \min_{v \in V}.$$

Допустим, что множество минимизаторов в этой задаче не пусто и содержит элемент $\overline{v}$. Тогда пару $\big(\overline{v}, U^*[\overline{v}]\big)$ будем называть равновесием по Штакельбергу в исследуемой игре. Наша цель — получить достаточные условия, гарантирующие существование хотя бы одного равновесия по Штакельбергу в классе кусочно постоянных управлений (при фиксированном разбиении множества Π).

3. Достаточные условия существования равновесия по Штакельбергу в случае кусочно постоянных управлений

Далее будем считать, что $\nu = \varkappa\xi$, где $\varkappa \in \mathbb{N}$. Соответственно, будем предполагать, что множество Π представлено в виде дизъюнктного объединения $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\varkappa} \Pi_j$ и на каждом j-м элементе данного разбиения i-я компонента управления u должна принимать некоторое постоянное значение из заданного отрезка $[r_{ij}; R_{ij}]$. Иными словами, множество допустимых управлений имеет специальный вид

$$U = \Big\{u \in L^{\xi}_{\infty}(\Pi) : \ u_i(t) \equiv \alpha_{ij} \in [r_{ij}; R_{ij}], \ t \in \Pi_j, \ i = \overline{1,\xi}, \ j = \overline{1,\varkappa}\Big\}$$

и тем самым взаимно однозначным образом отождествляется с конечномерным множеством $U_0 \subset \mathbb{R}^{\nu}$, где

$$U_0 = \Big\{\alpha = \big\{\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{\xi\varkappa}\big\} : \alpha_{ij} \in [r_{ij}; R_{ij}], i = \overline{1,\xi}, j = \overline{1,\varkappa}\Big\}.$$

В этом смысле будем обозначать $u\{\alpha\}$ – управление $u \in U$, отвечающее вектору $\alpha \in U_0$. В аналогичном смысле понимаем обозначения $v\{\beta\}$, где $v \in V$, $\beta \in V_0$. И соответственно, $x = x\{\alpha,\beta\} = x\big[u\{\alpha\}, v\{\beta\}\big]$, $I\{\alpha,\beta\} = I\big[u\{\alpha\}, v\{\beta\}\big]$, $J\{\alpha,\beta\} = J\big[u\{\alpha\}, v\{\beta\}\big]$. Как показано в [22, теоремы 2.1, 3.1], при выполнении предположений $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$), Φ_1) отображения $x = x\{\alpha,\beta\}$, $I = I\{\alpha,\beta\}$,

$J = J\{\alpha, \beta\}$ непрерывны по совокупности переменных $\alpha \in U_0$, $\beta \in V_0$. Тем самым, при заданном $\beta \in V_0$ существование минимума

$$\min_{\alpha \in U_0} I\{\alpha, \beta\} = \min_{u \in U} I[u, v = v\{\beta\}]$$

следует непосредственно из классической теоремы Вейерштрасса. Таким образом, для всех $v \in V$ множество минимизаторов $U^*[v] \neq \varnothing$. Для того, чтобы обеспечить одноточечность этого множества, потребуем дополнительно выполнения следующих условий.

$\mathbf{F}_5$) Для всех $v \in \mathbb{R}^\xi$ и п.в. $t \in \Pi$ функция $f(t, x, u, v)$ выпукла по совокупности $(x, u) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\xi$, причем $f(t, x, u(t), v(t)) \geq 0$ при всех $x \geq \theta(t)$, $u \in U$, $v \in V$ и п.в. $t \in \Pi$.

Φ_2) Для всех $v \in \mathbb{R}^\xi$ и п.в. $t \in \Pi$ функция $F(t, x, u, v)$ не убывает по $x \in \mathbb{R}^\ell$ и выпукла по $(x, u) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\xi$, причем при $u' \neq u''$, u', $u'' \in \mathbb{R}^\xi$, x', $x'' \in \mathbb{R}^\ell$ выполняется строгое неравенство:

$$F\left(t, \frac{1}{2}(x' + x''), \frac{1}{2}(u' + u''), v\right) < \frac{1}{2}\big(F(t, x', u', v) + F(t, x'', u'', v)\big).$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения* $\boldsymbol{F}_1$) – $\boldsymbol{F}_5$), $\boldsymbol{A}_1$), $\boldsymbol{A}_2$), Φ_1), Φ_2). *Тогда для каждого* $v \in V$ *множество минимизаторов* $U^*[v]$ *состоит в точности из одного элемента.*

Доказательство см. в разделе 7.

В соответствии с теоремой 3.1, для каждого $\beta \in V_0$ множество

$$\operatorname{Arg} \min_{\alpha \in U_0} I\{\alpha, \beta\} = \arg \min_{\alpha \in U_0} I\{\alpha, \beta\}$$

также состоит в точности из одного элемента. Тогда по теореме Данскина-Демьянова функции

$$\Phi(\beta) = \min_{\alpha \in U_0} I\{\alpha, \beta\}, \quad \varphi(\beta) = \arg \min_{\alpha \in U_0} I\{\alpha, \beta\}$$

непрерывны по $\beta \in V_0$. Стало быть, функция

$$\psi(\beta) = J\big\{\varphi(\beta), \beta\big\} = J\big[U^*[v\{\beta\}], v\{\beta\}\big]$$

тоже непрерывна по $\beta \in V_0$ как суперпозиция непрерывных функций. По теореме Вейерштрасса, отсюда следует существование точки минимума $\overline{\beta} \in V_0$. Полагая $\overline{v} = v\{\overline{\beta}\}$, получаем, что существует равновесие по Штакельбергу $\big(\overline{v}, U^*[\overline{v}]\big)$. Тем самым, справедлива

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения* $\boldsymbol{F}_1$) – $\boldsymbol{F}_5$), $\boldsymbol{A}_1$), $\boldsymbol{A}_2$), Φ_1), Φ_2). *Тогда в исследуемой игре существует равновесие по Штакельбергу.*

Примеры сведения управляемых распределенных систем к уравнению вида (2.1) с оператором A, удовлетворяющим условиям $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$), см. в [20, 21, 22, 24, 25], а включая соответствующие игровые постановки — в работах [17, 18, 19]; см. также пример в разделе 8. Как уже было отмечено во Введении, задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе, разумеется, и линейная система, рассмотренная в [8], тоже может быть сведена к уравнению вида (2.1).

Замечание 3.1. Из анализа доказательств видно, что в случае $\theta \geq 0$, $f \geq 0$ в условиях $\mathbf{F}_3$) – $\mathbf{F}_5$), Φ_2) пространство $\mathbb{R}^\ell$ можно заменить на $\mathbb{R}^\ell_+ = \big\{x \in \mathbb{R}^\ell : \ x \geq 0\big\}$.

4. Обобщение на случай отказа от условий $\mathbf{F}_5$), Φ_2)

Отказ от условий $\mathbf{F}_5$), Φ_2) приводит к тому, что справедливость утверждения теоремы 3.1 уже будет не гарантирована. Таким образом, утрачивается гарантия одноточечности множества минимизаторов $U^*[v]$. Этот факт требует переопределения понятия равновесия по Штакельбергу, которое было дано в разделе 2. Действительно, в этом случае функционал $J\big[U^*[v], v\big]$ перестает быть однозначным, следовательно, задача его минимизации теряет смысл. Поэтому вместо нее нужно ставить задачу минимизации как-то иначе, но притом так, чтобы можно было доказать ее разрешимость, откуда уже и будет вытекать понятие равновесия. Итак, вместо функционала $J\big[U^*[v], v\big]$ (который перестает теперь быть однозначным) определим однозначный функционал

$$\Psi[v] = \min_{u \in U^*[v]} J[u, v]$$

(предполагая, что этот минимум существует). Соответственно, если задача минимизации

$$\Psi[v] \to \min_{v \in V}$$

имеет решение $\overline{v} \in V$, то для всякого

$$\overline{u} \in \operatorname{Arg} \min_{u \in U^*[\overline{v}]} J[u, \overline{v}]$$

пару $(\overline{u}, \overline{v})$ будем называть *равновесием по Штакельбергу в обобщенном смысле* в исследуемой задаче.

Замечание 4.1. В практическом плане, такое определение понятия равновесия имеет смысл, только если первый игрок относится максимально благожелательно ко второму игроку. Действительно, предполагается, что при любом фиксированном $v \in V$ он выбирает не произвольную стратегию, обеспечивающую минимум его проигрыша, а лишь такую среди них, которая наносит по возможности наименьший урон второму игроку. В случае одноточечности множества минимизаторов $U^*[v]$ никакой подобной благосклонности первого игрока ко второму не требовалось.

Далее будем считать выполненными предположения предыдущего раздела о структуре множеств U и V. Стало быть, вновь имеет место непрерывность функций

$$I\{\alpha, \beta\} = I\big[u\{\alpha\}, v\{\beta\}\big], \quad J\{\alpha, \beta\} = J\big[u\{\alpha\}, v\{\beta\}\big]$$

на компакте $U_0 \times V_0$. Это позволит нам установить корректность введенного понятия равновесия и доказать его существование без требований $\mathbf{F}_5$), Φ_2).

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть X, Y - топологические пространства, $K(Y)$ — совокупность всех непустых, компактных подмножеств пространства Y; $\Phi : X \to K(Y)$ — непрерывное мультиотображение, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \max\limits_{y \in \Phi(x)} f(x, y)$ непрерывна, а мультиотображение*

$$F(x) = \{y \in \Phi(x) : f(x, y) = \varphi(x)\}$$

имеет компактные значения и полунепрерывно сверху.

Доказательство — см. [2, п.1.3.3, теорема 1.3.29] (это так называемая теорема максимума).

Замечание 4.2. Ясно, что утверждение леммы 4.1 останется справедливым и в том случае, если в определении функции φ заменить max на min (сводится к предыдущей ситуации, если f заменить на $-f$).

Лемма 4.2. *Пусть мультиотображение $\Phi : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная сверху (в однозначном смысле) функция. Тогда функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \max\limits_{y \in \Phi(x)} f(x, y)$ полунепрерывна сверху.*

Доказательство — см. [2, п.1.3.3, лемма 1.3.32].

Как видно из [3, §1.3, определение 2], если однозначная функция $J(u)$ полунепрерывна сверху, то функция $-J(u)$ полунепрерывна снизу, и наоборот.

Лемма 4.3. *Пусть U — компактное множество из метрического пространства M, а функция $J(u)$ определена, конечна и полунепрерывна снизу на U. Тогда $J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u) > -\infty$, множество $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ сходится к множеству U_*.*

Доказательство — см. [3, §1.3, теорема 1] (это обобщенная теорема Вейерштрасса).

В силу леммы 4.1 и замечания 4.2 множество

$$\operatorname{Arg} \min_{\alpha \in U_0} I\{\alpha, \beta\} \equiv U_0^*\{\beta\}$$

(с учетом компактности множества U_0 и непрерывности функции $I\{\alpha, \beta\}$) имеет компактные значения и, понимаемое как мультиотображение, непрерывно сверху. Определим функцию

$$\psi(\beta) = \min_{\alpha \in U_0^*\{\beta\}} J\{\alpha, \beta\}, \quad \beta \in V_0.$$

Ясно, что

$$-\psi(\beta) = \max_{\alpha \in U_0^*\{\beta\}} \big(-J\{\alpha, \beta\}\big), \quad \beta \in V_0.$$

Согласно лемме 4.2, функция $-\psi(\beta)$ полунепрерывна сверху. Следовательно, функция $\psi(\beta)$ полунепрерывна снизу. Наконец, по лемме 4.3, получаем: $\psi_* = \inf\limits_{\beta \in V_0} \psi(\beta) > -\infty$, множество $V_0^* = \{\beta \in V_0 :$

$\psi(\beta) = \psi_*\}$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{\beta_k\}$ сходится к множеству V_0^*. Остается заметить, что

$$\min_{\alpha \in U_0^*\{\beta\}} J\{\alpha, \beta\} = \min_{u \in U^*[v\{\beta\}]} J\big[u, v\{\beta\}\big],$$

так как

$$U_0^*\{\beta\} = \Big\{\alpha \in U_0 : \ u\{\alpha\} \in U^*\big[v\{\beta\}\big]\Big\},$$

$$\min_{\alpha \in U_0} J\big[u\{\alpha\}, v\{\beta\}\big] = \min_{u \in U} J\big[u, v\{\beta\}\big].$$

Соответственно,

$$\psi_* = \inf_{v \in V} \min_{u \in U^*[v]} J[u, v].$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения* $\boldsymbol{F}_1$) – $\boldsymbol{F}_4$), $\boldsymbol{A}_1$), $\boldsymbol{A}_2$), Φ_1). *Тогда в исследуемой игре существует равновесие по Штакельбергу в обобщенном смысле.*

5. Доказательство тотального сохранения глобальной разрешимости

Здесь мы адаптируем схему рассуждений из [27].

Для доказательства теоремы 2.2 воспользуемся некоторыми сведениями из теории решеток (см., например, [1]). Напомним [1], что *решеткой* называется частично упорядоченное множество L такое, что $\forall x, y \in L$ существуют $\inf\{x, y\}$ и $\sup\{x, y\}$ в L. Решетка L называется *полной*, если для любого ее подмножества X существуют $\inf X$, $\sup X$ в L. Если P, Q – некоторые упорядоченные множества, то оператор $g : P \to Q$ называется *изотонным*, если из $x \le y$ следует $g[x] \le g[y]$.

Следующее утверждение известно как теорема А.Тарского (см., например, [1, теорема V.3.11]).

Лемма 5.1. *Пусть L – полная решетка, а $g : L \to L$ – изотонный оператор. Тогда существует $x_* \in L$: $x_* = g[x_*]$.*

Лемма 5.2. *Пусть N – непустое и ограниченное (сверху и снизу) подмножество в множестве $S(\Pi)$ всех измеримых на Π функций. Тогда существуют $x_0 = \inf N$, $x_1 = \sup N \in S(\Pi)$.*

Доказательство — см. [7, теорема I.6.17].

Доказательство теоремы 2.2. Параметры $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in U$, $v \in V$ считаем произвольно фиксированными. Рассмотрим пространство $\mathcal{X}^\ell$ и его непустое подмножество $N = \big\{x \in \mathcal{X}^\ell : \ \theta \le x \le \widehat{x}\big\} = N_1 \times \ldots \times N_\ell$, где $N_k = \big\{x \in \mathcal{X} : \ \theta_k \le x \le \widehat{x}_k\big\}$, $k = \overline{1,\ell}$. Согласно [1, §V.1] прямое произведение полных решеток снова является полной решеткой. При этом непосредственно из леммы 5.2 получаем, что каждое из множеств N_k, $k = \overline{1,\ell}$, а следовательно, и множество N является полной решеткой. Пользуясь условиями $\mathbf{A}_2$) и $\mathbf{F}_3$), находим, что оператор $\mathcal{F} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$, определяемый формулой

$$\mathcal{F}[y] = \theta + A\big[f(.,y,u,v)\big], \quad y \in \mathcal{X}^\ell,$$

является изотонным. Покажем, что $\mathcal{F} : N \to N$. Возьмем любое $x \in N$ и, пользуясь условиями $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{F}_3$), $\mathbf{F}_4$) оценим

$$\mathcal{F}[x] \le \theta + A\big[f(.,\widehat{x},u,v)\big] \le \theta + A\big[g(.,\widehat{x})\big] = \widehat{x}.$$

И очевидно, что

$$\mathcal{F}[x] \ge \theta + A[0] = \theta.$$

Стало быть, $\mathcal{F}[x] \in N$. Остается воспользоваться теоремой А. Тарского. Теорема 2.2 доказана.

6. Доказательство выпуклости состояния по управлению первого игрока

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* $\boldsymbol{F}_1$) – $\boldsymbol{F}_3$), $\boldsymbol{F}_5$) $\boldsymbol{A}_1$), $\boldsymbol{A}_2$). *Предположим, что управлениям* u', $u'' \in U$, $v \in V$ *отвечают решения* x', $x'' \ge \theta$ *уравнения* (2.1); $\widetilde{u} = \lambda u' + (1-\lambda)u''$, *при произвольно заданном* $\lambda \in (0;1)$. *Тогда управлениям* $\widetilde{u}$, v *отвечает решение* $\widetilde{x}$ *уравнения* (2.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\theta \le \widetilde{x} \le \lambda x' + (1-\lambda)x''.$$

Доказательство теоремы 6.1. Рассмотрим пространство $\mathcal{X}^\ell$ и его непустое подмножество

$$N = \big\{x \in \mathcal{X}^\ell : \ \theta \le x \le \lambda x' + (1-\lambda)x''\big\} = N_1 \times \ldots \times N_\ell,$$

где $N_k = \{x \in \mathcal{X} : \ \theta_k \le x \le \lambda x'_k + (1-\lambda)x''_k\}$, $k = \overline{1,\ell}$. Согласно [1, §V.1] прямое произведение полных решеток снова является полной решеткой. При этом непосредственно из леммы 5.2 получаем, что каждое из множеств N_k, $k = \overline{1,\ell}$, а следовательно, и множество N является полной решеткой. Пользуясь условиями $\mathbf{A}_2$) и $\mathbf{F}_3$), находим, что оператор $\mathcal{F} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$, определяемый формулой

$$\mathcal{F}[y] = \theta + A\big[f(.,y,\widetilde{u},v)\big], \quad y \in \mathcal{X}^\ell,$$

является изотонным. Покажем, что $\mathcal{F} : N \to N$. Возьмем любое $x \in N$ и, пользуясь условиями $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{F}_3$), $\mathbf{F}_5$) оценим

$$\mathcal{F}[x] \le \theta + A\big[f(.,\lambda x' + (1-\lambda)x'', \lambda u' + (1-\lambda)u'', v)\big] \le$$

$$\le \theta + \lambda A\big[f(.,x',u',v)\big] + (1-\lambda)A\big[f(.,x'',u'',v)\big] = \lambda x' + (1-\lambda)x''.$$

И очевидно, что

$$\mathcal{F}[x] \ge \theta + A[0] = \theta.$$

Стало быть, $\mathcal{F}[x] \in N$. С учетом теоремы 2.1, остается воспользоваться теоремой А. Тарского. Теорема доказана.

7. Доказательство одноточечности множества минимизаторов первого игрока

Доказательство теоремы 3.1. Допустим, что нашлись два управления u', $u'' \in U^*[v]$ такие, что множество

$$E = \{t \in \Pi : \ u'(t) \ne u''(t)\}$$

имеет положительную меру. Обозначим $x' = x[u',v]$, $x'' = x[u'',v]$. Рассмотрим при $t \in \Pi$ допустимое управление

$$\widetilde{u}(t) = \frac{1}{2}\big(u'(t) + u''(t)\big),$$

и обозначим $\widetilde{x} = x[\widetilde{u},v]$. В силу теоремы 6.1,

$$\widetilde{x} \le \frac{1}{2}(x' + x'').$$

Согласно условию Φ_2),

$$F(t,\widetilde{x},\widetilde{u},v) \le F\left(t, \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x'', \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u'', v\right) \le$$

$$\leq \frac{1}{2}F(t,x',u',v)+\frac{1}{2}F(t,x'',u'',v),$$

где для краткости принято $x'=x'(t)$ и т.д., причем при $t\in E$ неравенство является строгим. Так как по предположению, $\operatorname{mes} E>0$, то

$$I[\widetilde{u},v]=\int\limits_{\Pi} F\big(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{u}(t),v(t)\big)\,dt<\frac{1}{2}\big(I[u',v]+I[u'',v]\big).$$

Отсюда получаем противоречие, так как на u', u'' достигается минимум $\min\limits_{u\in U} I[u,v]$. Теорема 3.1 доказана.

8. Пример игровой задачи

Пусть $D\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с кусочно гладкой и липшицевой в целом границей ∂D; $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — единичная сфера с центром в нуле; $g(\omega\cdot\omega',\alpha)=\alpha/\big[1+\alpha(\omega\cdot\omega'-1)\big]$; запись $\omega\cdot\omega'$ означает скалярное произведение векторов ω, $\omega'\in\mathbb{R}^3$. Следуя [29], рассмотрим уравнение переноса излучения с комптоновской индикатрисой рассеяния:

$$\omega\cdot\nabla_r x(r,\omega,\alpha)+\mu(r,\alpha)\,x(r,\omega,\alpha)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} K(r,\omega\cdot\omega',\alpha)\,x\big(r,\omega',g(\omega\cdot\omega')\big)\,d\omega'+z(r,\omega,\alpha). \qquad (8.1)$$

Здесь $x(r,\omega,\alpha)$ — плотность потока излучения в точке $r\in D$, распространяющегося в направлении $\omega\in\Omega$ и имеющего энергию $\alpha\in[\underline{\alpha};\overline{\alpha}]$; $\mu(r,\alpha)$ — коэффициент полного взаимодействия излучения со средой в точке $r\in D$ при энергии $\alpha\in[\underline{\alpha};\overline{\alpha}]$; $z(r,\omega,\alpha)$ — плотность внутренних источников излучения;

$$\Omega_{\omega,\alpha}=\Big\{\omega'\in\Omega:\ \omega\cdot\omega'\geq 1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\overline{\alpha}}\Big\};\quad \alpha\leq g(\omega\cdot\omega',\alpha)\leq\overline{\alpha}.$$

Ядро $K(r,\omega\cdot\omega',\alpha)$ называется *индикатрисой рассеяния.* Для $r\in D$, $\omega\in\Omega$ обозначим $L_{r,\omega}=\big\{r+\zeta\omega:\ \zeta\in[0;+\infty)\big\}$ — луч, исходящий из точки r в направлении ω; $d(r,-\omega)=\operatorname{mes}_1\big(L_{r,-\omega}\cap\overline{D}\big)$ (индекс 1 указывает на то, что это мера одномерного множества); $\gamma_{-\omega}$ — подмножество границы ∂D, состоящее из точек $\xi\in\partial D$ таких, что $\Big\{\xi+\zeta\omega:\ 0<\zeta<d(\xi,\omega)\Big\}\subset D$; Γ^- — множество троек (ξ,ω,α),

где $\omega \in \Omega$, $(\xi, \alpha) \in \gamma_{-\omega} \times [\underline{\alpha}; \overline{\alpha}]$. К уравнению (8.1) присоединяется граничное условие вида

$$x(\xi, \omega, \alpha) = y(\xi, \omega, \alpha), \quad (\xi, \omega, \alpha) \in \Gamma^-. \tag{8.2}$$

Функция $y(\xi, \omega, \alpha)$ интерпретируется как плотность потока частиц от внешних источников, проникающих в среду (в область D) через граничную точку ξ в направлении ω и имеющих энергию α.

Пусть $\Pi = D \times \Omega \times [\underline{\alpha}; \overline{\alpha}]$, $t = (r, \omega, \alpha) \in \Pi$; $\mathbf{C}^{0,1}(\overline{\Pi})$ — множество функций $\varphi(r, \omega, \alpha)$, непрерывно дифференцируемых по $r \in \overline{D}$ для всех $(\omega, \alpha) \in \Omega \times [\underline{\alpha}; \overline{\alpha}]$ и имеющих непрерывную на $\overline{\Pi}$ производную по направлению $\omega \cdot \nabla_r \varphi = \left.\dfrac{\partial \varphi(r + \zeta\omega, \omega, \alpha)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0}$.

Следуя [29], обозначим $H_2^1(\Pi)$ — класс всех $x \in L_2(\Pi)$, имеющих обобщенную производную $\omega \cdot \nabla_r x \in L_2(\Pi)$, понимаемую в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\Pi} x(t) \left[\omega \cdot \nabla_r \varphi\right](t)\, dt = -\int\limits_{\Pi} \left[\omega \cdot \nabla_r x\right](t)\, \varphi(t)\, dt$$

для всех $\varphi \in \mathbf{C}^{0,1}(\overline{\Pi})$, финитных в области D для всех $(\omega, \alpha) \in \Omega \times [\underline{\alpha}; \overline{\alpha}]$.

Дифференциальное выражение в левой части уравнения (8.1) понимается в указанном выше обобщенном смысле. Граничное условие (8.2) понимается в смысле следов — подробнее см. в [29]. Соответственно, решение задачи (8.1), (8.2) ищется в классе $H_2^1(\Pi)$.

При этом предполагается, что входные параметры задачи удовлетворяют следующим условиям: $K, z, y \geq 0$, $\mu \in L_\infty\big(D \times [\underline{\alpha}; \overline{\alpha}]\big)$, $\mu \geq \mu_0 > 0$, $K \in L_\infty\big(D \times [-1; 1] \times [\underline{\alpha}; \overline{\alpha}]\big)$, $z \in L_2(\Pi)$, $y \in L_2(\Gamma^-)$.

В [29] доказана разрешимость задачи (8.1), (8.2). При этом основой доказательства является сведение этой задачи к линейному операторному уравнению Вольтерра второго рода. Поскольку далее мы будем существенным образом опираться на указанное вольтерро-во уравнение, поясним кратко, как это было сделано. Итак, примем обозначения:

$$e_1(r, \omega, \alpha, \zeta) = \int\limits_0^{\zeta} \mu(r - \zeta'\omega, \alpha)\, d\zeta', \quad e_2(r, \omega, \alpha) = \int\limits_0^{d(r, -\omega)} \mu(r - \zeta'\omega, \alpha)\, d\zeta';$$

$$B[x](r,\omega,\alpha) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\bigl\{-e_1(r,\omega,\alpha,\zeta)\bigr\}\, x(r-\zeta\omega,\omega,\alpha)\, d\zeta,$$

$$S[x](r,\omega,\alpha) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} K(r,\omega\cdot\omega',\alpha)\, x\bigl(r,\omega',g(\omega\cdot\omega',\alpha)\bigr)\, d\omega'.$$

В [29] доказано, что $B : L_2(\Pi) \to H_2^1(\Pi)$, $S : L_2(\Pi) \to L_2(\Pi)$ как линейные ограниченные операторы, причем задача (8.1), (8.2) равносильна операторному уравнению:

$$x = w + (BS)[x] + B[z], \quad x \in H_2^1(\Pi), \tag{8.3}$$

где принято обозначение $w = y\bigl(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha\bigr)\ \exp\bigl\{-e_2(r,\omega,\alpha)\bigr\}$, причем $w \in H_2^1(\Pi)$.

Рассмотрим теперь управляемый полулинейный аналог уравнения (8.1):

$$\omega\cdot\nabla_r x(r,\omega,\alpha) + \mu(r,\alpha)\, x(r,\omega,\alpha) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} K(r,\omega\cdot\omega',\alpha)\, x\bigl(r,\omega',g(\omega\cdot\omega')\bigr)\, d\omega' + f(r,\omega,\alpha,x,u,v), \tag{8.4}$$

где функция $f(t,x,u,v)$ неотрицательна и удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_2$) при $\ell = m = 1$, $n = 3+3+1 = 7$, $\mathcal{X} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$. С физической точки зрения, здесь имеется в виду, что плотность внутренних источников излучения f зависит от плотности потока излучения и от некоторых управляющих воздействий u, v. Поскольку $H_2^1(\Pi) \subset L_2(\Pi)$, ясно, что задача (8.2) для уравнения (8.4) равносильна расширенному функционально-операторному уравнению типа Гаммерштейна

$$x = w + T[x] + B\bigl[f(.,x,u)\bigr], \quad x \in L_2(\Pi), \tag{8.5}$$

где $T = BS$. Здесь мы учитываем, что операторы T и B действуют из $L_2(\Pi)$ в $H_2^1(\Pi)$, $w \in H_2^1(\Pi)$. Поэтому всякое решение $x \in L_2(\Pi)$ уравнения (8.5) является одновременно и решением в пространстве $H_2^1(\Pi)$.

В [26, доказательство теоремы 1, а также §3] уже было показано, что уравнение (8.5) сводится к уравнению (2.1) при $\theta = R[w]$, $A = RB$, с линейным ограниченным оператором $R = (I-T)^{-1}$:

$\mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$, а также то, что оператор A удовлетворяет условиям $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$). Для применимости результатов данной статьи будем считать дополнительно, что функция f удовлетворяет также условиям $\mathbf{F}_3$) – $\mathbf{F}_5$).

Перейдем теперь непосредственно к описанию игровой задачи. Можно считать, что v характеризует влияние некоторых нежелательных (паразитных) источников излучения, которые требуется нейтрализовать. Предположим, из наблюдений известно, что при слабом противодействии паразитные источники излучения «стремятся» привести плотность потока излучения к известному шаблону $\overline{x}(t)$. Естественно считать, что $\overline{x} \in L_2(\Pi)$. Абстрагируясь, будем рассматривать влияние паразитных источников излучения как действия игрока 2, стремящегося минимизировать интеграл

$$J[u,v] = \int\limits_{\Pi} \big(x[u,v](t) - \overline{x}(t)\big)^2\, dt.$$

Будем предполагать, что игрок 1 стремится минимизировать полный поток, распределенный по заданному профилю в виде:

$$I[u,v] = \int\limits_{\Pi} F\big(t, x[u,v](t), u(t), v(t)\big)\, dt,$$

где функция $F(t,x,u,v)$ удовлетворяет условиям Φ_1), Φ_2). И очевидно, что функция $G(t,x) = (x - \overline{x}(t))^2$ удовлетворяет условию Φ_1). Из физических соображений ясно, что $w \geq 0$ (следовательно, $\theta \geq 0$), $f \geq 0$, $x(t) \geq 0$, $\Phi(t) \geq 0$. При этом $x \in H_2^1(\Pi) \subset L_2(\Pi)$. Поэтому можно использовать замечание 3.1. Простейший пример выбора функции F (с очевидной физической подоплекой):

$$F = \Phi(t)x + \gamma u^2, \quad \Phi(t) \geq 0, \quad \Phi \in L_2(\Pi), \quad \gamma > 0.$$

Покажем, что функция F удовлетворяет условиям Φ_1), Φ_2) (напомним, что в данном примере $\ell = 1$). Условие Φ_1) выполняется тривиально, поскольку $\Phi \in L_2(\Pi)$, $\mathcal{X} = L_2(\Pi)$. Очевидно, что функция F не убывает по $x \in \mathbb{R}$ и выпукла по $(x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ как сумма линейной и выпуклой функции. При $u' \neq u''$, u', $u'' \in \mathbb{R}$, x', $x'' \in \mathbb{R}$ оценим

$$F\left(t, \frac{1}{2}(x'+x''), \frac{1}{2}(u'+u'')\right) = \frac{1}{2}\Phi(t)(x'+x'') + \gamma q\left(\frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u''\right) <$$

$$< \Phi(t)\frac{x'+x''}{2}+\gamma\left(\frac{1}{2}q(u')+\frac{1}{2}q(u'')\right)=\frac{1}{2}\big(F(t,x',u',v)+F(t,x'',u'',v)\big),$$

где мы использовали строгую выпуклость функции $q(u)=u^2$. Таким образом, условие Φ_2) выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. *Теория решеток.* М.: Наука, 1984. 568 с.

2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* М.: КД «Либроком», 2011. 224 с.

3. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1981. 400 с.

4. Васильев Ф.П. *О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1893–1900.

5. Власенко А.А., Чикрий А.А. *Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами* // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 71–80.

6. Власенко А.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А. *О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе* // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 26–40.

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984. 752 с.

8. Никольский М.С. *О равновесии по Штакельбергу в программных стратегиях в линейных дифференциальных играх* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1657–1662.

9. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. *Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем* // Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 749–760.

10. Соколов С.В. *О решении задачи дифференциальной игры для распределенных динамических систем* // Проблемы управления и информатики. 2004. Т. 157, № 1. С. 71–77.

11. Сумин В.И., Чернов А.В. *Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений* / ННГУ. Нижний Новгород, 2000. 75 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.2000. № 1198-В00.

12. Сумин В.И., Чернов А.В. *О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1(26). С. 39–49.

13. Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 3–21.

14. Сумин В.И. *Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2(19). С. 138–151.

15. Сумин В.И., Чернов А.В. *Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1402–1411.

16. Чернов А.В. *О дифференциальных играх в банаховом пространстве на фиксированной цепочке* // Матем. теория игр и ее приложения. 2020. Т. 12, вып. 3. С. 89–118.

17. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве* // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, вып. 1. С. 91–117.

18. Чернов А.В. *О существовании ε-равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации* // Матем. теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 1. С. 74–92.

19. Чернов А.В. *Об одном подходе к построению ε-равновесия в бескоалиционных играх, связанных с уравнениями математической физики, управляемых многими игроками* // Матем. теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 1. С. 104–123.

20. Чернов А.В. *Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.

21. Чернов А.В. *О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.

22. Чернов А.В. *О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем* // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 8. С. 1400–1414.

23. Чернов А.В. *Об управляемости нелинейных распределенных систем на множестве конечномерных аппроксимаций управления* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып.1. С. 83–98.

24. Чернов А.В. *О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 2. С. 230–243.

25. Чернов А.В. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости задачи Гурса для управляемого полулинейного псевдопараболического уравнения* // Владикавказский матем. журнал. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 55–63.

26. Чернов А.В. *Об одном мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем* // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 112–122.

27. Чернов А.В. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.

28. Черноусько Ф.Л. *Граничные управления в системах с распределенными параметрами* // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 5. С. 810–826.

29. Яровенко И.П. *О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния* // Дальневост. матем. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 109–121.

30. Ibragimov G., Alias I.A., Waziri U., Ja'afaru A.B. *Differential game of optimal pursuit for an infinite system of differential equations* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2019. V. 2(42), no. 1. P. 391–403.

31. Il'in V.A., Tikhomirov V.V. *The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem* // Differ. Equations. 1999. V. 35, no 5. P. 697–708.

32. Lions J.-L. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems* // SIAM Rev. 1988. V. 30, no. 1. P. 1–68.

33. Ramaswamy M., Shaiju A.J.. *Construction of approximate saddle-point strategies for differential games in a Hilbert space* // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 141. P. 349–370.

ON STACKELBERG EQUILIBRIUM IN THE SENSE OF PROGRAM STRATEGIES IN VOLTERRA FUNCTIONAL OPERATOR GAMES

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: For a nonlinear Volterra functional operator equation controlled by two players with the help of finite dimensional program controls with integral objective functionals we prove existence of Stackelberg equilibrium (in the style of M.S.Nikol'skiy). On this way we use our formerly proved results on continuous dependence of the state and functionals on finite dimensional controls and also classical Weierstrass theorem. The property of being singleton for the minimizer set of the first player is proved by the scheme of M.S. Nikol'skiy applied earlier for a linear ordinary differential equation.

Keywords: nonlinear Volterra functional operator equation, existence of Stackelberg equilibrium.