Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.2, с. 64–75

УДК 519.816, 519.832
ББК 22.18

ВЫБОР СМЕШАННОЙ СТРАТЕГИИ ПО КРИТЕРИЮ ГУРВИЦА В МАТРИЧНОЙ ИГРЕ С ПРИРОДОЙ

Степан Ю. Пономарёв
Национальный университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
Александр Б. Хуторецкий
Новосибирский национальный исследовательский университет
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
e-mail: ponomarev.sy@yandex.ru, khutoretskij@gmail.com

В работе впервые, насколько нам известно, решена задача выбора смешанной стратегии, оптимальной по критерию Гурвица, для произвольной матричной игры с природой. Задача сведена к решению n задач линейного программирования (n – число сценариев). Этот результат может быть использован для принятия решения в ситуации «природной» неопределенности, если игровая ситуация повторяется многократно или допустима физическая смесь чистых стратегий.

Ключевые слова: неопределённость, принятие решений, игра с природой, критерий Гурвица, смешанная стратегия, линейное программирование..

Поступила в редакцию: 13.11.21 *После доработки*: 22.02.22 *Принята к публикации*: 16.05.22

1. Введение

Мы рассматриваем выбор решения (стратегии) в ситуации, когда результат решения зависит от неизвестного (в момент принятия решения) состояния «природы» (внешней среды) в момент реализации решения. Предполагается, что множество возможных состояний природы (сценариев) известно, но распределение вероятностей на этом множестве либо не установлено, либо не может быть использовано (осреднение не допускается). Описанную ситуацию выбора можно интерпретировать как игру лица, принимающего решения (ЛПР), с природой. В приложениях обычно рассматривают матричную игру с природой (m стратегий, n сценариев).

Для анализа игры с природой используют, как правило, классические критерии Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа, имеющие аксиоматические обоснования. Если игра с природой повторяется многократно или возможна физическая смесь стратегий, то ЛПР может расширить выбор за счет смешанных стратегий.

Для критериев Лапласа, Вальда и Сэвиджа задача определения оптимальной смешанной стратегии легко сводится к задаче линейного программирования (ЛП). Метод построения смешанной стратегии, оптимальной по критерию Гурвица, насколько нам известно, в литературе не описан. Цель нашей работы – сформулировать и обосновать такой метод при конечном числе сценариев. Мы покажем, что при n сценариях задача сводится к решению n задач ЛП.

2. Постановка задачи

Пусть S – множество (чистых) стратегий ЛПР, A – множество возможных сценариев. Далее будем рассматривать матричную игру с природой, то есть предполагать, что множества чистых стратегий и сценариев конечны: $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Выигрыш, который получит ЛПР, если реализует стратегию s_i в условиях сценария a_j, обозначим u_{ij}.

Смешанная стратегия полностью определена вектором вероятностей $(p_i \mid i \in S)$, с которыми ЛПР выбирает соответствующие чистые стратегии s_i. Следовательно, множество всех смешанных стратегий имеет вид:

$$P = \{p \mid p = (p_1, \ldots, p_m), \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \text{ и } p_i \geq 0 \text{ для всех } i\}.$$

Критерий Гурвица с параметром $\lambda \in [0, 1]$ на множестве чистых стратегий максимизирует оценочную функцию

$$h(\lambda, s_i) = (1 - \lambda)m_i + \lambda M_i, \tag{2.1}$$

где $m_i = \min_j u_{ij}$, $M_i = \max_j u_{ij}$. Параметр λ можно интерпретировать как склонность ЛПР к риску. Далее будем считать, что значение λ фиксировано.

Результат (выигрыш) смешанной стратегии p при сценарии a_j – это случайная величина. Её математическое ожидание (ожидаемый выигрыш) имеет вид: $U(p, a_j) = \sum_i p_i u_{ij}$. Заменив в (2.1) выигрыши на ожидаемые выигрыши, получим оценочную функцию критерия Гурвица на множестве смешанных стратегий:

$$H(\lambda, p) = (1 - \lambda) \min_j \sum_i p_i u_{ij} + \lambda \max_j \sum_i p_i u_{ij}.$$

Задача нахождения смешанной стратегии, оптимальной по критерию Гурвица, принимает вид:

$$\max\{H(\lambda, p) \mid p \in P\}. \tag{2.2}$$

3. Обзор литературы

Во многих публикациях применяется критерий Гурвица для выбора из конечного множества стратегий, см., например, [3, 7, 9, 12].

Аксиоматическая характеристика критерия Гурвица (и критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа) для матричной игры с природой дана в работе [11]. Другая система аксиом, однозначно определяющая критерий Гурвица и обосновывающая его применение к оценке инвестиционных проектов, приведена в книгах [2, с. 471–476] и [5].

В [1] критерий Гурвица фигурирует как часть «синтетического» критерия, для численного примера (при двух чистых стратегиях и трёх сценариях) построена оптимальная по синтетическому критерию смешанная стратегия. Попутно построена смешанная стратегия, оптимальная по критерию Гурвица в рассматриваемом примере, схема вычислений не описана.

В [4] доказано (с. 497–498), что для матричной игры с природой существует смешанная стратегия, оптимальная по критерию Гурвица, и формально решена задача нахождения такой стратегии при двух чистых стратегиях и двух сценариях (с. 504–534). Алгоритм выбора оптимальной смешанной стратегии при других размерностях в [4] отсутствует.

Автор работы [8] предлагает выбирать смешанную стратегию, которая максимизирует ожидаемое значение функции $h(\lambda, s_i)$:

$$\max\left\{\sum_i p_i h(\lambda, s_i) \mid p \in P\right\}. \tag{3.1}$$

Базисными допустимыми решениями этой задачи ЛП являются вершины многогранника P, а они соответствуют чистым стратегиям. Следовательно, решением задачи (3.1) (возможно, не единственным) всегда является чистая стратегия, для которой функция (2.1) максимальна. Это значит, что оптимальную по Гурвицу смешанную стратегию можно найти, используя задачу (3.1), только если переход к смешанным стратегиям не даёт дополнительного эффекта,

$$\max\{h(\lambda, s) \mid s \in S\} = \max\{H(\lambda, p) \mid p \in P\}.$$

Некоторые авторы (см., например, [4, с. 559; 8, p. 926]) считают «недостатком» оценочной функции Гурвица то, что из всех выигрышей, возможных при оцениваемой стратегии в разных сценариях, она учитывает лишь максимальный и минимальный. Но из [10] следует, что оценочная функция, удовлетворяющая некоторым естественным условиям, не может зависеть от «промежуточных» выигрышей. Покажем это.

Пусть B – множество всех возможных сценариев, $\mathcal{F}$ – семейство всех непустых конечных подмножеств множества B, $f(s, A)$ – оценочная функция, которая оценивает каждую стратегию s в условиях любого конечного набора сценариев $A \in \mathcal{F}$. В частности, для одноэлементного множества $A = \{a\}$ функция $f(s, A)$ указывает выигрыш, который даёт стратегия s в сценарии a.

Зафиксируем стратегию s и упорядочим конечные наборы сценариев по «благоприятности» для этой стратегии: при $A_1 \in \mathcal{F}$ и $A_2 \in \mathcal{F}$ положим $A_1 \preceq A_2$, если и только если $f(s, A_1) \leq f(s, A_2)$.

В [6] сформулировано желательное свойство отношения предпочтения на $\mathcal{F}$. Авторы статьи [10] называют это свойство «Gärdenfors principle» (GP). В нашем случае условие (GP) переносится на оценочную функцию и принимает следующий вид.

(GP): Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $a_0 \in B \setminus A$. Тогда $f(s, A) < f\big(s, A \cup \{a_0\}\big)$ при $f\big(s, \{a_0\}\big) > \max\big\{f\big(s, \{a\}\big) \mid a \in A\big\}$ и $f(s, A) > f\big(s, A \cup \{a_0\}\big)$ при $f\big(s, \{a_0\}\big) < \min\big\{f\big(s, \{a\}\big) \mid a \in A\big\}$.

Условие (GP) означает, что благоприятность (для стратегии s) набора сценариев A возрастёт, если к нему добавить сценарий, более благоприятный, чем все сценарии этого набора, и уменьшится, если добавить сценарий, менее благоприятный, чем все сценарии из A.

В статье [10] введено условие монотонности (M) отношения предпочтения на $\mathcal{F}$. При нашем определении отношения $\preceq$ условие (M) записывается следующим образом.

(M): Если $A_1 \subset \mathcal{F}$, $A_2 \subset \mathcal{F}$, $f\,(s, A_2) < f\,(s, A_1)$ и $a \in B \setminus (A_1 \cup A_2)$, то $f\big(s, A_2 \cup \{a\}\big) \leq f\big(s, A_1 \cup \{a\}\big)$.

Условие (M) требует, чтобы отношение строгого предпочтения между двумя наборами сценариев сохранялось или превращалось в эквивалентность, если к каждому набору добавить сценарий, не входящий в эти наборы.

Допустим, что условия (GP) и (M) выполнены и $A \in B$. Положим $m(s, A) = \min\big\{f\big(s, \{a\}\big) \mid a \in A\big\}$ и $M(s, A) = \max\big\{f\big(s, \{a\}\big) \mid a \in A\big\}$ – наихудший и, соответственно, наилучший результаты стратегии s для сценариев из A. Из доказанной в [10, p. 174] леммы следует, что

$$f(s, A) = f\big(s, \{m(s, A), M(s, A)\}\big). \tag{3.2}$$

Оценочная функция Гурвица имеет вид (3.2), и легко проверить, что она удовлетворяет условиям (GP) и (M). При этом для любой оценочной функции, которая учитывает «промежуточные» выигрыши (как предложенный в [4, с. 560–565] «обобщенный критерий Гурвица» или «β-decision rule» из работы [8]), нарушается хотя бы одно из указанных естественных условий.

Обобщением оптимальности по Гурвицу является равновесие Нэша–Гурвица, введенное в [13]. Автор рассматривает некооперативную игру $\langle I, \{X_i \mid i \in I\},\ Y,\ \{f_i(x,y) \mid i \in I\}\rangle$. Здесь: I – множество (номеров) участников; $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ – множество стратегий участника i; $x = (x_i \mid i \in I)$, где $x_i \in X_i$ для всех i, – исход игры; Y – множество векторов (некоторого евклидова пространства), описывающих возможные состояния природы; $f_i(x,y)$ – функция выигрыша участника i.

Предполагается, что каждый участник i фиксирует свой показатель «пессимизма-оптимизма» $\lambda_i \in [0,1]$ и оценивает полезность исхода x с помощью функции

$$g_i(x) = (1-\lambda_i)\min\{f_i(x,y) \mid y \in Y\} + \lambda_i \max\{f_i(x,y) \mid y \in Y\}.$$

Исход x^* является (по определению) равновесием Нэша–Гурвица, если $g_i(x^*) \geq g_i\big(x^*_{-i}|x_i\big)$ для всех $i \in I$, $x_i \in X_i$, где $x^*_{-i}|x_i$ – вектор, полученный заменой координаты x_i^* вектора x^* на x_i.

Если в игре только один участник ($n = 1$), то множество равновесий Нэша–Гурвица совпадает с множеством стратегий этого участника, оптимальных по критерию Гурвица. Если неопределенность отсутствует (Y – одноэлементное множество), то равновесия Нэша–Гурвица совпадают с равновесиями по Нэшу.

В [13] доказано существование (для рассматриваемой игры) равновесия Нэша–Гурвица в классе смешанных стратегий при компактных множествах X_i, Y и непрерывных функциях $f_i(x,y)$. При $n = 1$ эта теорема обобщает указанный выше результат работы [4] о существовании смешанной стратегии, оптимальной по критерию Гурвица, для матричной игры с природой. Метод построения равновесия Нэша–Гурвица (и, в частности, выбора оптимальной по критерию Гурвица смешанной стратегии) в статье [13] отсутствует.

4. Решение задачи

Пусть $P_k = \{p \in P \mid U(p,a_k) \geq U(p,a_j)$ для всех $j\}$ – множество всех смешанных стратегий, для которых наилучший ожидаемый результат достигается при сценарии a_k. Для всякого $p \in P$ при некотором $j = j(p)$ достигается $\max_j U(p,a_j)$, тогда $p \in P_{j(p)}$. Следовательно,

$$P = \bigcup_j P_j. \tag{4.1}$$

Пусть $J = \{j \mid P_j \neq \varnothing\}$. Разобьем задачу (2.2) на $|J|$ подзадач:

$$\max\{H(\lambda, p) \mid p \in P_j\},\ j \in J. \tag{2.2j}$$

Множества оптимальных решений задач (2.2) и (2.2j) обозначим P^* и P_j^* соответственно. По теореме Вейерштрасса $P^* \neq \varnothing$ и $P_j^* \neq \varnothing$ для $j \in J$. Из (4.1) следует, что $J \neq \varnothing$. Если $j \in J$, то функция $H(\lambda, p)$ имеет постоянное значение на множестве P_j^*, обозначим это значение v_j. Пусть $K = \{k \mid v_k \geq v_j \text{ для всех } j \in J\}$.

Утверждение 4.1. $P^* = \bigcup_{k \in K} P_k^*$.

Доказательство. Пусть $p^0 \in P_k^*$ для некоторого $k \in K$. Тогда для любого $j \in J$ имеем: $H(\lambda, p^0) = \max\{H(\lambda, p) \mid p \in P_k\} = v_k \geq v_j = \max\{H(\lambda, p) \mid p \in P_j\}$. Учитывая (4.1), $H(\lambda, p^0) \geq H(\lambda, p)$ для всех $p \in \bigcup_{j \in J} P_j = \bigcup_j P_j = P$. Следовательно, $\bigcup_{k \in K} P_k^* \subseteq P^*$.

Пусть теперь $p^0 \in P^*$. Тогда $H(\lambda, p^0) = \max\{H(\lambda, p) \mid p \in P\} = \max_{j \in J} \max\{H(\lambda, p) \mid p \in P_j\} = \max\{v_j \mid j \in J\}$. Следовательно, $p^0 \in P_k^*$ для некоторого $k \in K$. Утверждение доказано. □

Утверждение 4.1 сводит решение задачи (2.2) к решению задач (2.2j) для всех $j \in J$. Покажем, что задача (2.2j) эквивалентна следующей задаче ЛП.

$$g_j(z, p) = (1 - \lambda)z + \lambda \sum_i p_i u_{ij} \to \max_{z,p} \tag{4.2}$$

$$z \leq \sum_i p_i u_{ik} \leq \sum_i p_i u_{ij} \text{ для всех } k, \tag{4.3}$$

$$\sum_i p_i = 1,\ p_i \geq 0 \text{ для всех } i. \tag{4.4}$$

Утверждение 4.2. *Если* (z, p) *– решение задачи* (4.2)–(4.4)*, то* p *– решение задачи* (2.2j)*. Обратно, если* p *– решение задачи* (2.2j)*, то* (z, p) *при* $z = \min_k \sum_i p_i u_{ik}$ *– решение задачи* (4.2)–(4.4)*.*

Доказательство. Пусть (z, p) – решение задачи (4.2)–(4.4). Из (4.3) и (4.2) следует, что $z = \min_k U(p, a_k)$ и $U(p, a_j) = \max_k U(p, a_k)$. Тогда $p \in P_j$ и $g_j(z, p) = H(\lambda, p)$. Допустим, что $H(\lambda, p) < H(\lambda, p')$ для некоторого $p' \in P_j$, и положим $z' = \min_k U(p', a_k)$. Тогда пара (z', p')

удовлетворяет условиям (4.3)–(4.4) и $g_j(z', p') = H(\lambda, p') > H(\lambda, p)$, что противоречит выбору (z, p). Значит, p – решение задачи (2.2j).

Пусть теперь p – решение задачи (2.2j). Тогда $p \in P_j$ и $H(\lambda, p) = \max\{H(\lambda, p') \mid p' \in P_j\}$. При $z = \min_k \sum_i p_i u_{ik}$ пара (z, p) удовлетворяет условиям (4.3)–(4.4) и $g_j(z, p) = H(\lambda, p)$. Если (z', p') – решение задачи (4.2)–(4.4), то, как доказано выше, p' – решение задачи (2.2j) и $g_j(z', p') = H(\lambda, p')$. По выбору p имеем $g_j(z, p) = H(\lambda, p) \geq H(\lambda, p') = g_j(z', p')$. Значит, (z, p) – решение задачи (4.2)–(4.4). □

Утверждения 4.1 и 4.2 обосновывают следующую процедуру решения задачи (2.2).

1. Для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ решаем задачу (4.2)–(4.4); если она совместна, находим решение $\big(z(j), p(j)\big)$, причём $p(j) \in P_j^*$ по утверждению 4.2. Из утверждения 4.1 следует, что множество пар $\big(z(j), p(j)\big)$ непусто.

2. Из пар $\big(z(j), p(j)\big)$ выбираем те, для которых максимально значение $g_j\big(z(j), p(j)\big)$.

3. По утверждению 4.1 все $p(j)$, соответствующие отобранным парам, являются решениями задачи (2.2), т. е. оптимальными по критерию Гурвица смешанными стратегиями. Конец процедуры.

5. Пример

В табл. 1 приведены результаты вычисления оптимальных по критерию Гурвица смешанных стратегий при различных значениях параметра λ (от 0 до 1 с шагом 0.1) для игры с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

(строки соответствуют стратегиям, столбцы – сценариям).

Обозначения в таблице: $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, $p_3(\lambda)$ – координаты смешанной стратегии, оптимальной по Гурвицу при данном значении λ; $u(\lambda)$ и $U(\lambda)$ – наименьший и, соответственно, наибольший (по сценариям) ожидаемый выигрыш при стратегии $p(\lambda) = (p_1(\lambda), p_2(\lambda), p_3(\lambda))$; $H^*(\lambda)$ – значение оценочной функции Гурвица для стратегии $p(\lambda)$.

Таблица 1 (некоторые числа округлены).

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$p_1(\lambda)$	0.28	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$p_2(\lambda)$	0.6	0.25	0.25	0.25	0.25	0	0	0	0	0	0
$p_3(\lambda)$	0.12	0.75	0.75	0.75	0.75	1	1	0	0	0	0
$u(\lambda)$	5.64	5.5	5.5	5.5	5.5	5	5	3	3	3	3
$U(\lambda)$	5.64	7.25	7.25	7.25	7.25	8	8	9	9	9	9
$H^*(\lambda)$	5.64	5.675	5.85	6.025	6.2	6.5	6.8	7.2	7.8	8.4	9

В нашем примере смешанная стратегия $\pi_1 = (0.28, 0.6, 0.12)$ даёт одинаковый результат 5.64 во всех сценариях, она оптимальна при $\lambda = 0$. Но при $\lambda \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ оптимальна другая стратегия, $\pi_2 = (0, 0.25, 0.75)$. Чем больше λ, тем предпочтительней стратегии, которые дают большой результат хотя бы в одном сценарии. По этой причине при $\lambda \in \{0.5, 0.6\}$ оптимальна вырожденная смешанная стратегия $\pi_3 = (0, 0, 1)$ (то есть третья чистая стратегия) с результатом 8 во втором сценарии, а при $\lambda \geq 0.7$ – стратегия $\pi_4 = (1, 0, 0)$ (первая чистая стратегия) с результатом 9 в третьем сценарии.

Правдоподобны (но пока не доказаны) следующие предположения относительно функций $p(\lambda)$, $u(\lambda)$, $U(\lambda)$ и $H^*(\lambda)$ в общем случае.

(а) Вектор-функция $p(\lambda)$ кусочно постоянна.

(б) Функции $u(\lambda)$ и $U(\lambda)$ – ступенчатые, со скачками в точках переключения оптимальной стратегии; $u(\lambda)$ не возрастает, $U(\lambda)$ не убывает.

(в) Функция $H^*(\lambda)$ непрерывна и не убывает.

Если верно предположение (а) то точки переключения стратегий можно с любой заданной точностью найти методом дихотомии. В частности, для приведённого выше примера положим $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_4 = 1$; тогда предположительно существуют числа $\lambda_1 \in [0, 0.1)$, $\lambda_2 \in [0.4, 0.5)$ и $\lambda_3 \in [0.6, 0.7)$ такие, что стратегия π_i оптимальна при $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, где $i \in \{1, \dots, 4\}$.

6. Заключение

В статье решена задача нахождения смешанной стратегии, оптимальной по критерию Гурвица в матричной игре с природой. Задача сведена к решению n задач ЛП, где n число сценариев. Насколько нам известно, это новый результат.

Описанная в разделе 4 процедура всегда находит оптимальную стратегию, точнее, – один из элементов множества P_k^* для каждого $k \in K$. Следовательно, процедура может обнаружить более одной оптимальной стратегии, но, конечно, не даёт, вообще говоря, полное описание множества P^* всех оптимальных смешанных стратегий.

Изложенные выше результаты могут быть использованы для принятия решения в ситуации «природной» неопределенности, если выбор решения повторяется многократно или допустима физическая смесь чистых стратегий.

Направление дальнейшей работы – проверка гипотез, которые сформулированы в разделе 5.

7. Благодарность

Авторы благодарны анонимному рецензенту за полезные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айбазова С.Х. *Оптимизация логистических издержек в бизнесе с использованием синтетического критерия Гурвица для смешанных стратегий* // Экономические науки. 2014. № 113. С. 130–136.

2. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. *Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика.* М: Дело, 2008.

3. Кибалов Е.Б., Кин А.А. *Учет фактора неопределенности при оценке эффективности крупномасштабных регионально-транспортных проектов* // Регион: экономика и социология. 2014. № 2(82). С. 81–94.

4. Лабскер Л.Г. *Теория критериев оптимальности и экономические решения.* М: КНОРУС, 2012.

5. Смоляк С.А. *Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта).* М: Наука, 2002.

6. Gärdenfors P. *Manipulation of social choice functions* // Journal of Economic Theory. 1976. V. 13. P. 217–228.

7. Groenewald M.E., Pretorius P.D. *Comparison of decision-making under uncertainty investment strategies with the money market* // Journal of Financial Studies and Research. V. 2011. 16 p.

8. Gaspars-Wieloch H. *On a decision rule for mixed strategy searching under uncertainty on the basis of the coefficient of optimism* // Procedia – Social and Behavioral Sciences. 2014. V. 110. No 2. P. 223–931.

9. Jaffray J.-Y., Jeleva M. *Information processing under imprecise risk with the Hurwicz criterion* // Proceedings of the Fifth International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications. Prague: Action M Agency, 2007. P. 233–242.

10. Kannai Y., Peleg B. *A note on the extension of an order on set to the power set* // Journal of Economic Theory. 1984. V. 32. P. 172–175.

11. Milnor J.W. *Games against Nature* // Decision Processes. New York: Wiley, 1954. P. 49–60.

12. Rzepecki L., Jaśkowski P. *Application of game theory against nature in supporting bid pricing in construction* // Symmetry. 2021. V. 13. Is. 1.

13. Smirnova L. V. *Nash–Hurwitz equilibrium for non-cooperative games* // Game Theory and Application. V. 4. UK: Nova Science Pub. Inc, 1999. P. 130–141.

CHOICE OF MIXED STRATEGY IN MATRIX GAME WITH NATURE BY HURWITZ CRITERION

Stepan Yu. Ponomarev, National Research University "Higher School of Economics", graduent student (ponomarev.sy@yandex.ru).
Alexandr B. Khutoretskii, Novosibirsk National Research University, Dr.Sc., associate professor (khutoretskij@gmail.com)

Abstract: The article solves the problem of choosing an optimal, by the Hurwitz criterion, mixed strategy for arbitrary matrix game against nature. We reduce the problem to solving n linear programming problems (where n is the number of scenarios). As far as we know, this is a new result. It can be used to make decisions in uncertain environments, if the game situation is repeated many times, or physical mixture of pure strategies is realizable.

Keywords: uncertainty, decision making, game against nature, Hurwitz criterion, mixed strategy, linear programming.