Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.3, с. 3–21

УДК 519.833
ББК 22.18

ДУОПОЛИЯ ХОТЕЛЛИНГА НА ДВУСТОРОННЕМ РЫНКЕ СЕТЕВЫХ ПЛАТФОРМ В МЕТРИКЕ МАНХЕТТЕНА

Елена Н. Коновальчикова
Лаборатория цифровых технологий регионального развития ОКНИ КарНЦ РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: konovalchikova_en@mail.ru

В работе представлено исследование равновесия на двустороннем рынке сетевых платформ с перекрестными внешними эффектами между покупателями и продавцами. Предлагаемая модель является обобщением модели монополии Армстронга (2006) на случай дуополии на двустороннем рынке сетевых платформ, расположенных на плоскости. В работе решена задача оптимального ценообразования и исследован вопрос об оптимальном расположении платформ на рынке при условии, что гетерогенная полезность агентов обеих групп (покупателей и продавцов) формируется с учетом спецификации Хотеллинга с метрикой Манхеттена.

Ключевые слова: двусторонний рынок, равновесие по Нэшу, сетевые экстерналии, задача размещения, спецификация Хотеллинга.

Поступила в редакцию: 10.12.21 *После доработки*: 13.07.22 *Принята к публикации*: 12.09.22

1. Введение

В современной экономике особое внимание уделено исследованию двусторонних рынков с участием платформ. Платформы являются фирмами-посредниками, обеспечивающими взаимодействие агентов двух различных групп. Основным отличием платформы на двустороннем рынке от фирмы состоит в том, что практически все платформы не являются производителями продукции и получают доход от организации взаимодействия двух различных групп, связанных между собой перекрестными сетевыми экстерналиями. Существование сетевых экстерналий означает, что полезность агентов одной группы зависит от количества агентов другой группы, участвующих во взаимодействии на платформе. Примерами платформ на двусторонних рынках являются супермаркеты, приложения по вызову такси или доставки еды, информационные площадки Amazon, Booking или Domofond.ru. Заметим, что некоторые технологические компании также можно рассматривать как платформы, например, Apple, Microsoft и Google.

Фундаментальной проблемой на двусторонних рынках является привлечение на платформы достаточного количества агентов различных групп, которая решается путем установления для агентов стоимости пользования сервисом платформы. Поэтому большинство исследований в этой области направлено на изучение конкуренции и стратегий ценообразования платформ при наличии сетевых экстерналий [2, 3, 4, 5, 11, 12, 13]. Ряд исследований посвящено ценовой дискриминации на двусторонних рынков. Например, в работе [8] осуществлен анализ стратегии ценообразования с дискриминацией и без нее при условии, что конкурирующие платформы могут иметь доступ к информации о местоположении пользователей. Авторы пришли к выводу, что ценовая дискриминации на двусторонних рынках смягчает конкуренцию между платформами в отличие от односторонних рынков. Анализ различных схем ценообразования на двусторонних рынках представлен также в работах [7, 14], в которых показано, что стратегии ценовой дискриминации приводят к увеличению прибыли платформ.

При исследовании двусторонних рынков основным предположением является линейность рынка. В данной работе будет рассмотрена модель дуополии на двустороннем рынке с участием платформ при предположении, что рынок находится на плоскости. В рамках предложенной модели найдены оптимальные стратегии ценообразования при условии ограниченности размера рынка, гетерогенности агентов и эндогенности спроса. Также была решена задача оптимального расположения платформ на плоскости квадрата и показано, что при отсутствии у платформ предпочтений к местоположению оптимальным расположением для обеих платформ является центр квадрата. Заметим, что задача оптимального расположения на двустороннем рынке является новой, хотя исследованию оптимального расположения фирм для одностороннего рынка посвящено много работ, в том числе [6,1, 10]. В отличие от аналогичной задачи, рассмотренной в работе [9], при исследовании была использована метрика Манхеттена.

Статья организована следующим образом: во втором разделе описана основная модель; анализ оптимальных ценовых стратегий представлен в третьем разделе; исследованию задачи оптимального расположения платформ на плоскости посвящен четвертый раздел. В заключении представлены общие выводы по исследованию модели.

2. Постановка модели

Рассмотрим двусторонний рынок, на котором множество агентов разделено на две непересекающихся группы, например, продавцов (группа 1) и покупателей (группа 2). Наличие сетевых экстерналий между группами предполагает, что каждый покупатель имеет одинаковое влияние на продавца и наоборот. Агенты обеих групп не могут взаимодействовать друг с другом напрямую, поэтому им необходимо присоединиться к определенной платформе. Платформа обеспечивает взаимодействие продавцов и покупателей, взимая фиксированную плату с каждого агента для поддержания и развития ее инфраструктуры.

На рынке размеры обеих групп агентов нормализованы до 1. Предполагается, что агенты обеих групп равномерно распределены на единичном квадрате S и агент i-той группы находится в произвольной точке $A_i\,(x_i, y_i)$, где $x_i, y_i \in [0,1]$, $i = 1,2$. Далее будем рассматривать рынок дуополии. Допустим, что платформы **I** и **II** расположены в точках (a_1, b_1) и (a_2, b_2) квадрата S. Без ограничения общности будем считать, что $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$. При наличии двух платформ на двустороннем рынке агенты обеих групп осуществляют выбор среди них, руководствуясь значением полезности от посещения соответствующих платформ. Функции полезности агентов обеих групп определяются с помощью спецификации Хотеллинга и учитывают наличие сетевых экстерналий между группами. При вычислении полезности агентов используется метрика Манхеттена. Таким образом, функции полезности агентов групп **1** и **2** при посещении платформы **I**, расположенной в точке (a_1, b_1), имеют вид

$$u_1^{(I)} = \alpha \cdot n_2^{(I)} - p_1^{(I)} - (|x_1 - a_1| + |y_1 - b_1|) \cdot t_1, \tag{2.1}$$

$$u_2^{(I)} = \beta \cdot n_1^{(I)} - p_2^{(I)} - (|x_2 - a_1| + |y_2 - b_1|) \cdot t_2, \tag{2.2}$$

а при посещении платформы **II**, расположенной в точке (a_2, b_2), –

$$u_1^{(II)} = \alpha \cdot n_2^{(II)} - p_1^{(II)} - (|x_1 - a_2| + |y_1 - b_2|) \cdot t_1, \tag{2.3}$$

$$u_2^{(II)} = \beta \cdot n_1^{(II)} - p_2^{(II)} - (|x_2 - a_2| + |y_2 - b_2|) \cdot t_2. \tag{2.4}$$

В формулах (2.1) – (2.4) используются следующие обозначения: $n_i^{(j)}$ – размер группы i на платформе j, $p_i^{(j)}$ – стоимость посещения агентом i-той группы платформы j $(i = 1, 2,\ j = I, II)$, α и β – степени влияния на выигрыш первой (второй) группы количества агентов второй (первой) группы, находящихся на платформе, t_i – степень влияния транспортных издержек при посещении обеих платформ агентами i-той группы $(i = 1, 2)$. Таким образом, в функциях полезности (2.1) – (2.4) агентов обеих групп первое слагаемое выражает значение сетевого эффекта для одной группы от взаимодействия с представителями другой группы, а второе и третье слагаемые представляют собой общие затраты агентов на посещение платформ. Заметим, что в предложенной модели не рассматривается случай отрицательных сетевых экстерналий между группами различных агентов, поэтому значения α и β неотрицательны. Далее будем предполагать, что обе платформы не имеют проблемы с оттоком пользователей и все агенты присоединяются к одной из платформ. Последнее означает, что агенты обеих групп являются single-homing и $n_i^{(I)} + n_i^{(II)} = 1$ для $i = 1, 2$. Исключая тривиальный случай, когда полезности аген-

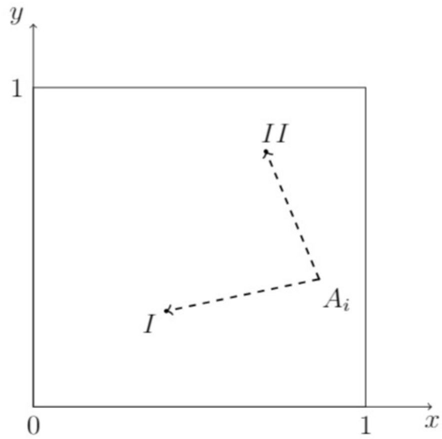

Рисунок 1. Квадрат S с расположением платформ и пользователей групп i $(i = 1, 2)$

тов обеих групп одновременно удовлетворяют условиям $u_i^{(I)} < u_i^{(II)}$ или $u_i^{(I)} > u_i^{(II)}$, поскольку это означает, что одна из платформ уйдет с рынка, границы рынка для обеих групп агентов определяются из уравнения $u_i^{(I)} = u_i^{(II)}$ $(i = 1, 2)$, которое после упрощения для обеих групп имеет вид:

$$s_i = (|x_i - a_1| + |y_i - b_1|) - (|x_i - a_2| + |y_i - b_2|), \tag{2.5}$$

где

$$s_1 = \frac{\alpha\left(2n_2^{(I)} - 1\right) - p_1^{(I)} + p_1^{(II)}}{t_1}, \tag{2.6}$$

и

$$s_2 = \frac{\beta\left(2n_1^{(I)} - 1\right) - p_2^{(I)} + p_2^{(II)}}{2t_2}. \tag{2.7}$$

Таким образом, приходим к игре ценообразования на двустороннем рынке с участием платформ **I** и **II**, обслуживающих соответственно $n_1^{(I)} + n_2^{(I)}$ и $n_1^{(II)} + n_2^{(II)}$ пользователей обеих групп. Платформы устанавливают стоимость посещения, стремясь максимизировать свои функции выигрыша:

$$H^{(I)}\left(p_1^{(I)}, p_2^{(I)}\right) = n_1^{(I)}\left(p_1^{(I)} - g_1\right) + n_2^{(I)}\left(p_2^{(I)} - g_2\right), \tag{2.8}$$

$$H^{(II)}\left(p_1^{(II)}, p_2^{(II)}\right) = n_1^{(II)}\left(p_1^{(II)} - g_1\right) + n_2^{(II)}\left(p_2^{(II)} - g_2\right), \qquad (2.9)$$

где g_1 и g_2 – затраты платформы на обслуживание пользователей соответствующих групп, причем $p_i^{(I,II)} \geqslant g_i$, $(i = 1, 2)$. При анализе равновесия в игре ценообразования будет рассмотрено несколько случаев расположения платформ **I** и **II** на плоскости квадрата, удовлетворяющих условиям: 1) $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$; 2) $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$; 3) $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$. Первые два варианта отнесем к несимметричному случаю расположения платформ, а последний – симметричному случаю.

3. Анализ равновесия в игре ценообразования

3.1. Несимметричный случай

Граница рынка (2.5) зависит от расположения обеих платформ на плоскости квадрата S. В этом разделе рассмотрен случай расположения обеих платформ, удовлетворяющего условию $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$. Заметим, что существует несколько возможных областей расположения агентов обеих групп на плоскости квадрата S и, в силу условия $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$, границы раздела рынка для пользователей обеих групп проходят через области G_4, G_5, G_6, а их уравнения имеют вид:

$$y_i = \begin{cases} s_i + \frac{-a_1+a_2+b_1+b_2}{2}, 0 \le x_i \le a_1, \\ -x_i + s_i + \frac{a_1+a_2+b_1+b_2}{2}, a_1 \le x_i \le a_2, \\ s_i + \frac{a_1-a_2+b_1+b_2}{2}, a_2 \le x_i \le 1, \end{cases} \qquad (3.1)$$

где $b_1 \le y_i \le b_2$ и s_i определяются по формулам (2.6) – (2.7) для $i = 1, 2$. Пример расположения границы рынка для первого группа агентов изображен на Рис. 2.

Учитывая условие $n_1^{(I)} + n_1^{(II)} = 1$ и формулу (3.1), численность покупателей и продавцов, посещающих обе платформы **I** и **II**, вычисляется по формулам

$$n_i^{(I)} = \frac{1}{2}\left(a_1 - a_2 - a_1^2 + a_2^2 + b_1 + b_2\right) + s_i, \qquad (3.2)$$

и

$$n_i^{(II)} = 1 - n_i^{(I)}, \qquad (3.3)$$

где $i = 1, 2$.

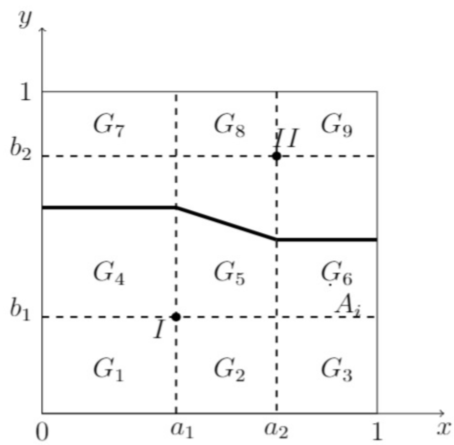

Рисунок 2. Граница рынка для агентов группы **1**, $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$

Для нахождения равновесных цен в игре ценообразования платформ на квадрате S достаточно рассмотреть условия первого рода для функций выигрыша платформ **I** и **II**. Так, для функции выигрыша платформы **I** эти условия имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = \dfrac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} \left(p_1^{(I)} - g_1\right) + n_1^{(I)} + \dfrac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} \left(p_2^{(I)} - g_2\right) = 0, \\ \dfrac{\partial H^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} = \dfrac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} \left(p_1^{(I)} - g_1\right) + \dfrac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} \left(p_2^{(I)} - g_2\right) + n_2^{(I)} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

При нахождении производных $\dfrac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}}$ и $\dfrac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}}$ получаем следующие равенства

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = \frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial p_1^{(I)}} = \frac{\alpha}{t_1} \cdot \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} - \frac{1}{2t_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial p_1^{(I)}} = \frac{\beta}{t_2} \cdot \frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}},$$

откуда формулы для вычисления соответствующих производных имеют вид

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = -\frac{1}{2t_1} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = -\frac{\beta}{2t_1 t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1}. \tag{3.6}$$

Аналогично находятся формулы для вычисления производных $\dfrac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}}$ и $\dfrac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}}$, которые имеют вид

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} = -\frac{\alpha}{2t_1t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1t_2}\right)^{-1}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} = -\frac{1}{2t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1t_2}\right)^{-1}. \tag{3.8}$$

Учитывая формулы (3.5) – (3.8), система уравнений (3.4) может быть приведена к системе вида

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2t_1} \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha\beta}{t_1t_2}\right)^{-1} \left(p_1^{(I)} - g_1\right) + n_1^{(I)} - \dfrac{\beta}{2t_1t_2} \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha\beta}{t_1t_2}\right)^{-1} \left(p_2^{(I)} - g_2\right) = 0, \\ -\dfrac{\alpha}{2t_1t_2} \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha\beta}{t_1t_2}\right)^{-1} \left(p_1^{(I)} - g_1\right) - \dfrac{1}{2t_2} \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha\beta}{t_1t_2}\right)^{-1} \left(p_2^{(I)} - g_2\right) + n_2^{(I)} = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем формулы для вычисления оптимальной стоимости посещения платформы **I** для обеих групп пользователей:

$$\begin{cases} p_1^{(I)} = g_1 - 2\left(\beta n_2^{(I)} - t_1 n_1^{(I)}\right), \\ p_2^{(I)} = g_2 - 2\left(\alpha n_1^{(I)} - t_2 n_2^{(I)}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Аналогичные рассуждения применяются для поиска оптимальных цен $p_1^{(II)}$ и $p_2^{(II)}$, устанавливаемых платформой **II** для агентов обеих групп. Учитывая условие $n_i^{(I)} + n_i^{(II)} = 1$ $(i = 1, 2)$, функция выигрыша (2.9) платформы **II** может быть записана в следующем виде:

$$H^{(II)}\left(p_1^{(II)}, p_2^{(II)}\right) = \left(1 - n_1^{(I)}\right)\left(p_1^{(II)} - g_1\right) + \left(1 - n_2^{(I)}\right)\left(p_2^{(II)} - g_2\right),$$

а условия первого рода для $H^{(II)}$ –

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(II)}}\left(p_1^{(II)} - g_1\right) + \left(1 - n_1^{(I)}\right) - \dfrac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(II)}}\left(p_2^{(II)} - g_2\right) = 0, \\ -\dfrac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(II)}}\left(p_1^{(II)} - g_1\right) - \dfrac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(II)}}\left(p_2^{(II)} - g_2\right) + \left(1 - n_2^{(I)}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

где соответствующие производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(II)}} = \frac{1}{2t_1} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(II)}} = \frac{\beta}{2t_1 t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(II)}} = \frac{\alpha}{2t_1 t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(II)}} = \frac{1}{2t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1}.$$

Из условий (3.10) получаем формулы для вычисления оптимальной стоимости, устанавливаемой на платформах **II** для агентов обеих групп, имеющие вид

$$\begin{cases} p_1^{(II)} = g_1 - 2\left(\beta\left(1 - n_2^{(I)}\right) - t_1\left(1 - n_1^{(I)}\right)\right), \\ p_2^{(II)} = g_2 - 2\left(\alpha\left(1 - n_1^{(I)}\right) - t_2\left(1 - n_2^{(I)}\right)\right). \end{cases} \tag{3.11}$$

или

$$\begin{cases} p_1^{(II)} = g_1 - 2\left(\beta n_2^{(II)} - t_1 n_1^{(II)}\right), \\ p_2^{(II)} = g_2 - 2\left(\alpha n_1^{(II)} - t_2 n_2^{(II)}\right). \end{cases}$$

Проверим достаточные условия существования максимума функции $H^{(I)}\left(p_1^{(I)}, p_2^{(II)}\right)$. Для этого вычислим следующие выражения:

$$A = \frac{\partial^2 H^{(I)}}{\partial^2 p_1^{(I)}} = \frac{\partial^2 n_1^{(I)}}{\partial^2 p_1^{(I)}}(p_1 - g) + \frac{\partial^2 n_2^{(I)}}{\partial^2 p_1^{(I)}}(p_2 - g) + 2\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}},$$

$$B = \frac{\partial^2 H^{(I)}}{\partial p_1^{(I)} \partial p_2^{(I)}} = \frac{\partial^2 n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)} \partial p_2^{(I)}}(p_1 - g) + \frac{\partial^2 n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)} \partial p_2^{(I)}}(p_2 - g) + \frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} + \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}},$$

$$C = \frac{\partial^2 H^{(I)}}{\partial^2 p_2^{(I)}} = \frac{\partial^2 n_1^{(I)}}{\partial^2 p_2^{(I)}}(p_1 - g) + \frac{\partial^2 n_2^{(I)}}{\partial^2 p_2^{(I)}}(p_2 - g) + 2\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}}.$$

Поскольку $\frac{\partial^2 n_1^{(I)}}{\partial^2 p_1^{(I)}} = 0$, $\frac{\partial^2 H^{(I)}}{\partial^2 p_2^{(I)}} = 0$ и $\frac{\partial^2 n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)} \partial p_2^{(I)}} = \frac{\partial^2 n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)} \partial p_2^{(I)}} = 0$, получаем

$$A = 2 \cdot \frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = -\frac{1}{t_1}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1},$$

$$B = \frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} + \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = -\frac{\alpha + \beta}{t_1 t_2}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1},$$

$$C = 2 \cdot \frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} = -\frac{1}{t_2}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-1}$$

и

$$AC - B^2 = \frac{1}{t_1 t_2}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{t_1 t_2}\right)^{-2}\left(1 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{t_1 t_2}\right).$$

Заметим, что для существования экстремума функции необходимо, чтобы $1 - \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{t_1 t_2} > 0$ или $(\alpha+\beta)^2 < t_1 t_2$, а максимум функции возможен при условии $A < 0$ или $1 - \dfrac{\alpha\beta}{t_1 t_2} > 0$, откуда $\dfrac{\alpha\beta}{t_1 t_2} < 1$. Для функции $H^{(II)}$ рассуждения аналогичны.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *В модели Хотеллинга с несимметричным расположением платформ на двустороннем дуополистическом рынке с параметрами горизонтальной дифференциации t_1, t_2 и параметрами межсетевых экстерналий α, β цены на обслуживание в равновесии удовлетворяют уравнениям (3.9) и (3.11).*

Анализ полученных формул для вычисления равновесных цен показывает, что цены, устанавливаемые платформами зависят от численности, посещающих их агентов обеих групп. В свою очередь, численность агентов групп зависит от параметров s_1 и s_2. Заметим, что из формул (2.6) – (2.7) и (3.9) – (3.11) можно получить следующие равенства

$$-p_1^{(I)} + p_1^{(II)} = 2t_1 s_1 - \alpha\left(2n_2^{(I)} - 1\right),$$

$$-p_2^{(I)} + p_2^{(II)} = 2t_2 s_2 - \beta\left(2n_1^{(I)} - 1\right),$$

$$-p_1^{(I)} + p_1^{(II)} = 2\beta\left(2n_2^{(I)} - 1\right) + 2t_1\left(1 - 2n_1^{(I)}\right),$$

$$-p_2^{(I)} + p_2^{(II)} = 2\alpha\left(2n_1^{(I)} - 1\right) + 2t_2\left(1 - 2n_2^{(I)}\right),$$

связывающие стоимость посещения платформ с численность агентов, обслуживающихся на платформах, и параметрами s_1 и s_2. Приравнивая соответствующие равенства, получаем систему двух уравнений для переменных s_1 и s_2:

$$\begin{cases} 2t_1 s_1 - \alpha\left(2n_2^{(I)} - 1\right) = 2\beta\left(2n_2^{(I)} - 1\right) + 2t_1\left(1 - 2n_1^{(I)}\right), \\ 2t_2 s_2 - \beta\left(2n_1^{(I)} - 1\right) = 2\alpha\left(2n_1^{(I)} - 1\right) + 2t_2\left(1 - 2n_2^{(I)}\right), \end{cases}$$

которая после упрощения и подстановки формул (3.2) – (3.3) имеет вид:

$$\begin{cases} 6t_1s_1 = 2\left(2\beta+\alpha\right)s_2 + \left(\left(a_1-a_2-a_1^2+a_2^2+b_1+b_2\right)-1\right)\left(2\beta+\alpha-2t_1\right), \\ 6t_2s_2 = 2\left(2\alpha+\beta\right)s_1 + \left(\left(a_1-a_2-a_1^2+a_2^2+b_1+b_2\right)-1\right)\left(2\alpha+\beta-2t_2\right). \end{cases} \tag{3.12}$$

Таким образом, из системы уравнений (3.12) находятся значения параметров s_1 и s_2, затем по формулам (3.2) –(3.3) находятся численность первой и второй групп на платформах, а по формулам (3.9) и (3.11) определяются значения оптимальных цен, устанавливаемых платформами для различных групп.

Пример 3.1. Рассмотрим выигрыши платформ при различном их расположении с учетом, что затрат на обслуживания агентов обеих групп равны и транспортные расходы агентов обеих групп также совпадают, т. е. $g_1 = g_2 = 0$, $t_1 = t_2 = 1$. Рассмотрим два случая расположения платформ. В первом случае предположим, что платформа **I** находится в точке $(0, 0)$, а платформа **II** перемещается по прямой $y = 1$ влево. Во втором случае платформы меняются ролями, т. е. платформа **I** перемещается вправо по прямой $y = 0$, а платформа **II** остается в точке $(1, 1)$. Результаты численного моделирования приведены в таблицах 1 и 2 для $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.5$.

Таблица 1. Случай, когда платформа **I** расположена в точке $(0, 0)$, а платформа – **II** в точке $(a_2, 1)$, $a_2 \in [0, 1]$

a_2	$n_1^{(I)}$	$n_2^{(I)}$	$p_1^{(I)}$	$p_2^{(I)}$	$p_1^{(II)}$	$p_2^{(II)}$	$H^{(I)}$	$H^{(II)}$
1	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.1	0.3	0.3
0.9	0.452	0.448	0.46	0.08	0.54	0.12	0.24	0.36
0.8	0.415	0.408	0.42	0.07	0.58	0.13	0.20	0.42
0.7	0.389	0.380	0.40	0.06	0.60	0.14	0.18	0.46

Таким образом, при перемещении платформы **II** влево по прямой $y = 1$ численность обеих групп, посещающих платформу **I** уменьшается, как и размер оплаты за посещение, что приводит к уменьшению прибыли платформы **I**. В тоже время наблюдается рост прибыли платформы **II** за счет увеличения численности агентов обеих групп, посещающих данную платформу.

Таблица 2. Случай, когда платформа **II** расположена в точке $(1,1)$, а платформа **I** – в точке $(a_1,0)$, $a_1 \in [0,1]$

a_1	$n_1^{(I)}$	$n_2^{(I)}$	$p_1^{(I)}$	$p_2^{(I)}$	$p_1^{(II)}$	$p_2^{(II)}$	$H^{(I)}$	$H^{(II)}$
0	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.1	0.3	0.3
0.1	0.548	0.552	0.54	0.18	0.46	0.08	0.36	0.24
0.2	0.585	0.592	0.58	0.13	0.42	0.07	0.42	0.20
0.3	0.611	0.620	0.60	0.14	0.40	0.06	0.46	0.18

Во втором случае наблюдается противоположная картина – рост прибыли на платформе **I** за счет увеличения численности пользователей с одновременным уменьшением прибыли платформы **II**.

Пример 3.2. При тех же условиях, рассмотрим наилучшие ответы платформы **II** на перемещение платформы **I** по прямой $y = 0$. Предположим, что платформа **II** перемещается по прямой $y = 1$. Начальной положение платформ **I** и **II** в точках $(0,0)$ и $(1,1)$, соответственно.

Таблица 3. Наилучшие ответы платформы **II** на перемещение платформы **I**

(a_1, b_1)	(a_2, b_2)	$n_1^{(I)}$	$n_2^{(I)}$	$p_1^{(I)}$	$p_2^{(I)}$	$p_1^{(II)}$	$p_2^{(II)}$	$H^{(I)}$	$H^{(II)}$
$(0,0)$	$(1,1)$	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.1	0.3	0.3
$(0.1,0)$	$(1,1)$	0.548	0.548	0.548	0.110	0.452	0.090	0.359	0.246
$(0.1,0)$	$(0.9,1)$	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.1	0.3	0.3
$(0.2,0)$	$(0.9,1)$	0.537	0.540	0.534	0.113	0.466	0.087	0.348	0.256
$(0.2,0)$	$(0.8,1)$	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.1	0.3	0.3
$(0.3,0)$	$(0.9,1)$	0.526	0.528	0.524	0.110	0.476	0.090	0.334	0.268
$(0.3,0)$	$(0.7,1)$	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.1	0.3	0.3

Таким образом, обе платформы **I** и **II** могут увеличить свою прибыль, сместив положение платформы в одностороннем порядке. При этом прибыль второй платформы уменьшается, поэтому для ее увеличения платформе необходимо изменить свое местоположение ближе к центру квадрата. Результаты численного моделирования показывают, что равновесие в игре ценообразования достигается, когда платформы расположены в точках с координатами (a_1, b_1) и $(1 - a_1, 1 - b_1)$. Поэтому справедливо следующее замечание.

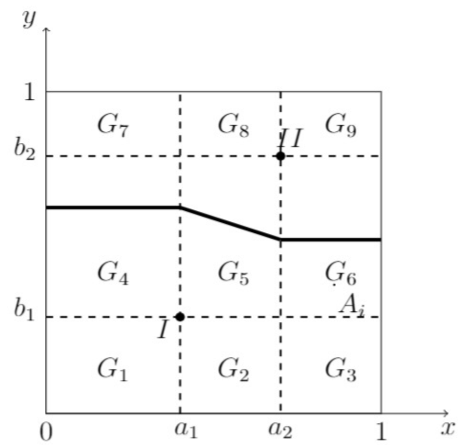

Рисунок 3. Граница рынка для агентов группы **1**, $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$

Замечание 3.1. В случае, когда платформы находятся в точках (a_1, b_1) и $(1-a_1, 1-b_1)$, равновесные цены на обеих платформах имеют одинаковый вид:

$$\begin{cases} p_1^{(I,II)} = g_1 + t_1 - \beta, \\ p_2^{(I,II)} = g_2 + t_2 - \alpha, \end{cases}$$

что совпадает с утверждением 1 в работе Амстронга [2].

Вторым вариантом несимметричного расположения платформ является случай, когда размещение обеих платформ удовлетворяют условию $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$. В этом случае анализ уравнения (2.5) показывает, что границы рынка для обеих групп агентов расположены в областях G_2, G_5, G_8 и имеют вид

$$x_i = \begin{cases} s_i + \frac{a_1+a_2-b_1+b_2}{2}, 0 \le y_i \le b_1, \\ -y_i + s_i + \frac{a_1+a_2+b_1+b_2}{2}, b_1 \le y_i \le b_2, \\ s_i + \frac{a_1+a_2+b_1-b_2}{2}, b_2 \le y_i \le 1, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

где $a_1 \le x_i \le a_2$ $(i = 1, 2,)$ и s_i вычисляется по формулам (2.6) –(2.7). Пример расположения границы рынка изображен на рисунке 3. При поиске равновесия в игре ценообразования платформ используются аналогичные рассуждения, представленные выше, поэтому подробный анализ этого случая опущен.

3.2. Симметричный случай

Наконец, рассмотрим последний случай расположения платформ, удовлетворяющих условию $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$. Заметим, что данный случай наиболее простой и границы раздела рынка между обеими платформами для агентов групп **1** и **2** имеют вид

$$y_i = -x_i + s_i + \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}, \quad 0 \le x_i \le 1, i = 1, 2.$$

В связи с этим, численность агентов, посещающих обе платформы, вычисляются по формулам:

$$n_i^{(I)} = \frac{1}{2} \cdot \left(s_i + \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2} \right)^2, \tag{3.13}$$

$$n_i^{(II)} = 1 - n_i^{(I)}, \quad i = 1, 2. \tag{3.14}$$

Для удобства вычислений обозначим $r_i = s_i + \dfrac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}$.

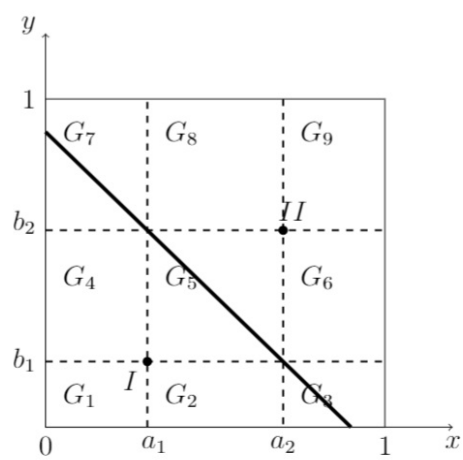

Рисунок 4. Граница рынка для агентов группы **1**, $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$

Для нахождения равновесных цен в игре ценообразования исследуются условия первого рода (3.4) и (3.10) для функций выигрыша платформ, в которых соответствующие производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = -\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_1^{(II)}} = -\frac{r_1}{2t_1} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta r_1 r_2}{t_1 t_2} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(I)}} = -\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_1^{(II)}} = -\frac{r_1 r_2 \beta}{2t_1 t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta r_1 r_2}{t_1 t_2}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} = -\frac{\partial n_1^{(I)}}{\partial p_2^{(II)}} = -\frac{r_1 r_2 \alpha}{2t_1 t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta r_1 r_2}{t_1 t_2}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(I)}} = -\frac{\partial n_2^{(I)}}{\partial p_2^{(II)}} = -\frac{r_2}{2t_2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha\beta r_1 r_2}{t_1 t_2}\right)^{-1}.$$

Результатом решения систем уравнений (3.4) и (3.10) являются формулы нахождения равновесных цен, устанавливаемых платформами **I** и **II** для агентов обеих групп:

$$\begin{cases} p_1^{(I)} = g_1 - \dfrac{2\left(\beta r_1 n_2^{(I)} - t_1 n_1^{(I)}\right)}{r_1}, \\ p_2^{(I)} = g_2 - \dfrac{2\left(\alpha r_2 n_1^{(I)} - t_2 n_2^{(I)}\right)}{r_2}. \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} p_1^{(II)} = g_1 - \dfrac{2\left(\beta r_1 \left(1 - n_2^{(I)}\right) - t_1\left(1 - n_1^{(I)}\right)\right)}{r_1}, \\ p_2^{(II)} = g_2 - \dfrac{2\left(\alpha r_2 \left(1 - n_1^{(I)}\right) - t_2\left(1 - n_2^{(I)}\right)\right)}{r_2}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Таким образом, в случае симметричного расположения платформ справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *В модели Хотеллинга с симметричным расположением платформ на двустороннем дуополистическом рынке с параметрами горизонтальной дифференциации t_1, t_2 и параметрами межсетевых экстерналий α, β цены на обслуживание в равновесии удовлетворяют уравнениям (3.15) и (3.16).*

Заметим, что оптимальные цены, как и численность агентов обеих групп, посещающие платформы **I** и **II**, зависят от параметров s_1 и s_2, которые в симметричном случае можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2t_1 s_1 r_1 = (2\beta + \alpha r_1)\left(2n_2^{(I)} - 1\right) + 2t_1\left(1 - 2n_1^{(I)}\right), \\ 2t_2 s_2 r_2 = (2\alpha + \beta r_2)\left(2n_1^{(I)} - 1\right) + 2t_2\left(1 - 2n_2^{(I)}\right). \end{cases}$$

Результаты численного моделирования для симметричного случая представлены в таблице 3 для различного расположения платформ.

Таблица 4. Симметричный случай, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.5$, $g_1 = g_2 = 0$, $t_1 = t_2 = 1$.

(a_1, b_1)	(a_2, b_2)	$n_1^{(I)}$	$n_2^{(I)}$	$p_1^{(I)}$	$p_2^{(I)}$	$p_1^{(II)}$	$p_2^{(II)}$	$H^{(I)}$	$H^{(II)}$
$(0.1, 0.6)$	$(0.3, 0.8)$	0.394	0.375	0.512	0.158	0.742	0.350	0.26	0.67
$(0.3, 0.3)$	$(0.5, 0.5)$	0.315	0.280	0.513	0.183	1.008	0.688	0.54	2.32
$(0.6, 0.1)$	$(0.8, 0.3)$	0.394	0.375	0.512	0.158	0.742	0.350	0.26	0.67

4. Задача оптимального размещения платформ

Из приведенных выше формул и результатов численного моделирования следует, что функции выигрыша обеих платформ зависят от их расположения на единичном квадрате S, поэтому функции выигрыша можно представить как $H^{(j)}(a_1, b_1; a_2, b_2)$, $j = I, II$. При рациональном поведении агентов обеих групп существуют равновесные цены, устанавливаемые платформами **I** и **II**, зависящие от расположения платформ на квадрате S. Поэтому и возникает задача оптимального расположения платформ, в которой стратегиями являются выбор координат, а не установление цен как в игре ценообразования.

Предположим, что платформам **I** и **II** важно размещаться на прямых $y = b_1$ и $y = b_2$, соответственно. Без потери общности, рассмотрим случай $b_1 = 0$ и $b_2 = 1$. Заметим, что оптимальное расположение платформ будет зависеть от значений a_1 и a_2, при изменении которых каждый раз находятся равновесные цены $p_i^{(I)}$ и $p_i^{(II)}$ $(i = 1, 2)$, удовлетворяющие условиям (3.4) и (3.10). Равновесное положение платформ (a_1^*, a_2^*) находится из условия, что

$$H^{(I)}\left(a_1, a_2^*\right) \leq H^{(I)}\left(a_1^*, a_2^*\right), \quad H^{(II)}\left(a_1^*, a_2\right) \leq H^{(II)}\left(a_1^*, a_2^*\right).$$

В силу симметрии задачи для нахождения равновесного положения платформ достаточно зафиксировать положение одной из платформ, например, платформы **I** в точке a_1, и менять положении второй платформы с нахождением равновесных цен $p_i^{(I)}$ и $p_i^{(II)}$ $(i = 1, 2)$, которые будут зависеть только от значения a_2. Поэтому функции выигрыша обеих платформ будут иметь вид: $H^{(I)}\left(a_2, p_1^{(I)}(a_2), p_2^{(I)}(a_2)\right)$ и $H^{(II)}\left(a_2, p_1^{(II)}(a_2), p_2^{(II)}(a_2)\right)$. Если максимальный выигрыш платформы **II** будет достигать в некоторой точке a_2, то этого будет достаточно для того, чтобы точка (a_1, a_2) являлась равновесие по Нэшу в задаче размещения.

Максимальный выигрыш платформы **II** достигается в точке, в которой выполняется условие, что $\dfrac{\partial H^{(II)}}{\partial a_2} = 0$, т.е

$$\frac{\partial n_1^{(II)}}{\partial a_2} \cdot \left(p_1^{(II)} - g_1\right) + n_1^{(II)} \cdot \frac{\partial p_1^{(II)}}{\partial a_2} + \frac{\partial n_2^{(II)}}{\partial a_2} \cdot \left(p_2^{(II)} - g_1\right) + n_2^{(II)} \cdot \frac{\partial p_2^{(II)}}{\partial a_2} = 0.$$

Учитывая решение задачи ценообразования для случая $a_2 - a_1 < b_2 - b_1$, имеем

$$\frac{\partial n_1^{(II)}}{\partial a_2} = \frac{\partial n_2^{(II)}}{\partial a_2} = \frac{1}{2} \cdot (2a_2 - 1)\,,$$

$$\frac{\partial p_1^{(II)}}{\partial a_2} = (2a_2 - 1) \cdot (t_1 - \alpha)\,, \quad \frac{\partial p_2^{(II)}}{\partial a_2} = (2a_2 - 1) \cdot (t_2 - \beta)\,,$$

поэтому условие максимума функции $H^{(II)}$ примет вид:

$$(2a_2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\left(p_1^{(II)} - g_1\right) + n_1^{(II)} \cdot (t_1 - \alpha) + \frac{1}{2}\left(p_2^{(II)} - g_2\right) + n_2^{(II)} \cdot (t_2 - \beta)\right) = 0.$$

Таким образом, равновесное положение платформы **II** находится в точке $a_2^* = 0.5$. Аналогично находится равновесное положение платформы **I** при условии, что платформа **II** размещается в точке $(0.5, 1)$. Таким образом, платформы **I** и **II** стремятся расположиться в точках $(0.5, 0)$ и $(0.5, 1)$ соответственно. Заметим, что при отсутствии предпочтений к определенному местоположению на квадрате S обе платформы стремятся расположиться в центре квадрата, т.е. $a_1^* = a_2^* = b_1^* = b_2^* = 0.5$.

5. Заключение

В статье исследованы оптимальные стратегии ценообразования на двустороннем рынке сетевых платформ с перекрестными внешними эффектами между агентами различных групп. Исследование проводилось при предположении, что рынок находится на плоскости. При построении модели предполагалось, что агенты обеих групп обладают свойством single-homing, т. е. агенты обеих групп имеют возможность присоединиться только к одной из платформы. При решении теоретико-игровой игры ценообразования на двустороннем рынке с участием платформ были найдены оптимальные стратегии ценообразования при симметричном и несимметричном расположении платформ на плоскости. Также была рассмотрена задача оптимального расположения платформ на плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалова А. *Дуополия Хотеллинга на плоскости в метрике Манхеттена* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2012. Вып. 2. С. 33–43.

2. Armstrong M. *Competition in two-sided markets.* // RAND Journal of Economics. 2006. V. 37. P. 668–691.

3. Armstrong M., Wright J. *Two-Sided Markets, Competitive Bottlenecks and Exclusive Contracts* // Economic Theory. 2007. V. 32. P. 353–380.

4. de Corniere A. *Search Advertising* // American Economic Journal: Microeconomics. 2016. V. 8. N3. P. 156–188.

5. Glen Weyl E. *A Price Theory of Multi-sided Platforms* // American Economic Review. 2010. V. 100. N 4. P. 1642–1672.

6. Hotelling H. *Stability in competition* // Economic Journal. 1929. V. 39. P. 41–57.

7. Kodera T.*Discriminatory Pricing and Spatial Competition in Two-Sided Media Markets* // The B.E. Journal of Economic Analysis and Policy. 2015. V. 15. N 2. P. 891-926.

8. Liu, Q., Serfes, K.. *Price discrimination in two-sided markets* // Journal of Economics and Management Strategy. 2013. V. 22. N 4. P. 768–786.

9. Mazalov V., Konovalchikova E. *Hotelling's Duopoly in a Two-Sided Platform Market on the Plane* // Mathematics. 2020. V. 8. N 8. P. 865.

10. Mallozzi L. *Noncooperative facility location games* // Operations Research Letters. 2007. V. 35. P. 151–154.

11. Rochet J. C., Tirole J. *Cooperation among Competitors: The Economics of Payment Card Associations* // RAND Journal of Economics. 2002. V. 33. P. 1–22.

12. Rochet J. C., Tirole J.*Platform Competition in Two-Sided Markets.* // Journal of the European Economic Association. 2003. V. 1. P. 990–1029.

13. Rochet J. C., Tirole J. *Two-Sided Markets: A Progress Report* // RAND Journal of Economics. 2006. V. 37. P. 645–667.

14. Zhang K., Weiqi L. *Price discrimination in two-sided markets* // South African Journal of Economic and Management Sciences. 2016. V. 19. N 1. P. 1–17.

OPTIMUM POSITIONING OF NETWORK PLATFORMS ON A PLANE

Elena N. Konovalchikova, Laboratory of Digital Technologies in Regional Development of KarRC RAS, Cand.Sc. (konovalchikova_en@mail.ru).

Abstract: The paper presents a study of equilibrium in a two-sided market for network platforms with cross externalities between buyers and sellers. The proposed model is a generalization of Armstrong's (2006) monopoly model for the case of a duopoly in a two-sided market for network platforms located on a plane. The paper solves the problem of optimal pricing and investigates the question of the optimal location of platforms in the market, provided that the heterogeneous utility of agents of both groups (buyers and sellers) is formed taking into account the Hotelling specification with the Manhattan metric.

Keywords: two-sided market, Nash equilibrium, network externalities, location problem, Hotelling specification.