

УДК 519.83

ББК 22.18

ДВУХСТАДИЙНАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ИНСПЕКЦИИ ХИЩЕНИЙ В ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

СУРИЯ Ш. КУМАЧЕВА

ИВАН М. ОРЛОВ

Санкт-Петербургский Государственный Университет

198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

e-mail: s.kumacheva@spbu.ru, orlov.ivan.m@gmail.com

Предложена субиерархическая двухстадийная теоретико-игровая модель хищения и взяточничества. Изучен частный пример, основанный на схеме из шести чиновников на трех уровнях. Составлены теоретические условия и численные установки для минимизации коррупции. Представлено кооперативное расширение модели, проведено имитационное моделирование для двух разных подходов к изолированным компонентам, результаты проанализированы на предмет стабильности.

Ключевые слова: коррупция, хищение, иерархическая игра, инспекция, взяточничество, кооперативная игра, дележ, С-ядро, вектор Майерсона.

Поступила в редакцию: 18.02.22 *После доработки:* 29.06.22 *Принята к публикации:* 12.09.22

1. Введение

Моделированию проблем, связанных с различными случаями проявления коррупции, отводится достаточно большая роль в математической литературе. Среди подходов, направленных на решение проблем из указанного класса, широко распространен теоретико-игровой подход, позволяющий изучить рациональное поведение участников процесса.

Так, в [19] основательно (анализ, два расширения, три типа игроков, лабораторные эксперименты) изучена игра в развернутой форме между клиентом, чиновником и инспектором и модифицированы предыдущие модели за счет того, что вероятности действия рассматриваются как эндогенные. Автор предложил в качестве решения данной игры равновесие Нэша в смешанных стратегиях и асимметричные штрафы с упором на чиновников как антикоррупционную меру. На основании описанной модели была построена стадия инспекции в текущем исследовании.

Психологический аспект хищения был изучен в [10] с помощью эксперимента – игры между жертвователем, посредником и получателем, в которой игроки принимали монетарно иррациональные решения, чтобы избежать чувства вины. Результаты показали, что воруемый посредник испытывает вину по отношению и к получателю, на чьи выигрыши он влияет, и к жертвователю, на чьи выигрыши он не влияет. Исходя из этого, исследователи предполагают, что высокие общественные ожидания относительно моральных качеств посредников снизят хищения.

На основе модели коррупции в зимбабвийском государственном секторе в [17] изучена игра между двумя агентами, один из которых дает взятку, а другой ее принимает. Предложено решение в виде равновесия Нэша в смешанных стратегиях, основанное на значениях цены сокрытия и выгоды от коррупции. Среди главных выводов данного исследования стоит отметить рекомендацию влиять на это равновесие сверху вниз, в качестве возможных способов предложено изменение законов и информирование чиновников. К тем же выводам пришли авторы исследования коррупции в Китае [18], которые изучали отношения между комитетом и департаментом в сценарии растраты. В [21] рассматривалась коррупция в мультинациональных

корпорациях и были указаны четыре условия, необходимые для ее процветания: 1) существование возможности для коррупционной деятельности; 2) малый риск негативных последствий; 3) желание участвовать в коррупционной деятельности; 4) умение.

В [15] изучаемая проблема была сформулирована в форме уклонения от налогов и подкупа инспектора посредством многостадийной иерархической игры. Иерархия состоит из трех уровней: администратора, инспектора и налогоплательщиков. В предложенном решении администратор должен выбрать вероятности, основываясь на ставках налога, наказания и штрафа, а налогоплательщики должны называть свой истинный уровень дохода. Также рассмотрено расширение игры для инспекций с ошибками.

В [3] сделан акцент на коррупции в иерархических системах управления, в частности, связанных с проектами инвестиций, строительства и воровстве электроэнергии. Иерархия состоит из тройки «принципал-супервайзер-агент». В качестве результатов приводятся условия для того, чтобы агент заявлял истинное потребление и пути, которыми принципал может обеспечить его выполнение.

В [2] изучается вопрос согласованности общественных и частных интересов в моделях с разными функциями полезности общества и индивидов. Главным параметром анализа являются цена анархии, представляющая собой отношение цены игры в худшем равновесии Нэша к цене игры в лучшей возможной ситуации, и социальная цена анархии, рассчитываемая по тем же правилам, но для общества. Проанализирована целесообразность использования мер побуждения (экономических) и принуждения (административных) для улучшения этих параметров, а также предложены идеи метаигрового синтеза (включая версию модели с коррупцией). [12] является развитием этой работы и описывает с помощью СОЧИ-модели трехуровневую расширенную активную систему, состоящую из некорумпированного принципала, одного или нескольких супервайзеров и нескольких агентов, максимизирующих свои выигрыши в условиях возможной коррупции в контролируемой динамической системе. Игра решается с помощью имитационного моделирования качественно репрезентативных сценариев (QRS), предложенное решение представляет собой равновесие Нэша для агентов и равновесие Штакельберга для супер-

вайзера. В [4] к СОЧИ-модели принципала, супервайзера и агентов применен оптимизационный подход, в результате которых найдены: 1) экономический и административный коррупционные механизмы, наиболее отвечающие интересам супервайзера; 2) условия, при которых возможно воздействие супервайзера на агента; 3) условие, при котором коррупционные действия супервайзера невыгодны; 4) коррупционный механизм, наиболее отвечающий интересам супервайзера – максимально возможная надбавка почти полностью идет на взятку супервайзеру, что оказывается всегда выгодно агенту.

В [20] исследована коррупция (также случай уклонения от налогов и подкупа инспекторов) в переходных экономиках на примере России конца 90-х – начала 2000-х. Коррупционная модель включает гомогенную популяцию налогоплательщиков с двумя возможными уровнями дохода (высоким и низким), аудитора, который может быть подкуплен, и центр, максимизирующий свою полезность, состоящую из суммы всех налогов и штрафов с вычетом стоимостей инспекции (аудитор проверяет налогоплательщика) и реинспекции (центр перепроверяет аудит налогоплательщика, заявившего низкий доход). Предложены математические решения, основанные на параметрах: размерах налогов, штрафов, ценах инспекции и реинспекции.

В [1] рассматриваются проблемы оптимальной организации инспекций и предлагаются зависящие от параметров оптимальные стратегии (максимизирующие чистый доход государства): 1) вероятность проверки для нейтральных к риску агентов, претендующих на льготу; 2) вероятность проверки для агентов, чье индивидуальное отношение к риску неизвестно, но задана функция распределения величины связанных с выявлением факта обмана дополнительных издержек или различные функции групп плательщиков, а также «динамическая модель накопления информации, позволяющая оценить указанную величину для каждого плательщика и тем самым оптимизировать стратегию налоговых проверок»; 3) зарплату инспектора, частоту проверок налогоплательщиков и перепроверок инспекторов в модели с взяточничеством, а также величину премии в модификации этой модели; 4) количество уровней, зарплату и вероятность проверок по уровням, обеспечивающие честное поведение инспекторов и налогоплательщиков на всех уровнях. Также следует отметить, что

авторы считают «четкость законодательных норм и наличие надежной системы учета» необходимыми условиями эффективной работы инспекций.

В [9] изучена коррупция и лоббирование в переходных экономиках. Предложенное решение описывает пороговые стратегии, составляющие сильное равновесие Нэша (коалиционно или антикоалиционно стабильное).

В данной статье представлена теоретико-игровая модель коррупции, состоящая из стадий хищения и инспекции [5, 6, 16] и описывающая взаимоотношения инспектора и иерархии чиновников. Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен постановке модели. Полагается, что все игроки являются риск-нейтральными и максимизирующими свою исключительно денежную полезность (однако стоит заметить, что любая монетизированная полезность может быть включена в эти формулы). Специфика модели изучается в разделе 3 на частном примере с помощью имитационного моделирования. В результате исследования примера получается пессимистичное равновесие, в котором хищение приводит к взяточничеству. Раздел 4 посвящен анализу условий для минимизации коррупции. В нем сформулирован их общий и частный вид, последний проверяется посредством имитационного моделирования. В разделе 5 предложено кооперативное расширение модели, дающее чиновникам возможность объединяться в коалиции. Для различных ситуаций кооперативной постановки проведены анализ и имитационное моделирование. Также проверена эффективность антикоррупционных мер в этих условиях. В разделе 6 описано заключение по всему проведенному исследованию.

2. Модель

Иерархия чиновников представлена в виде направленного графа (рисунок 1), в котором вершинами являются чиновники (обозначаемые в форме (n, i) , где n – номер уровня, i – индекс чиновника на уровне), а дугами – связи между ними: стрелка идет от начальника к подчиненному, в случае наличия стрелок в обе стороны чиновники являются коллегами (равными), в случае отсутствия – посторонними (не имеют связей). Все коллеги одного уровня L_n подчинены

(subordinate – subs) одному начальнику (boss):

$$(j, k) = \text{boss}(n) : (n, i) \in \text{subs}(j, k) \quad \forall (n, i) \in L_n.$$

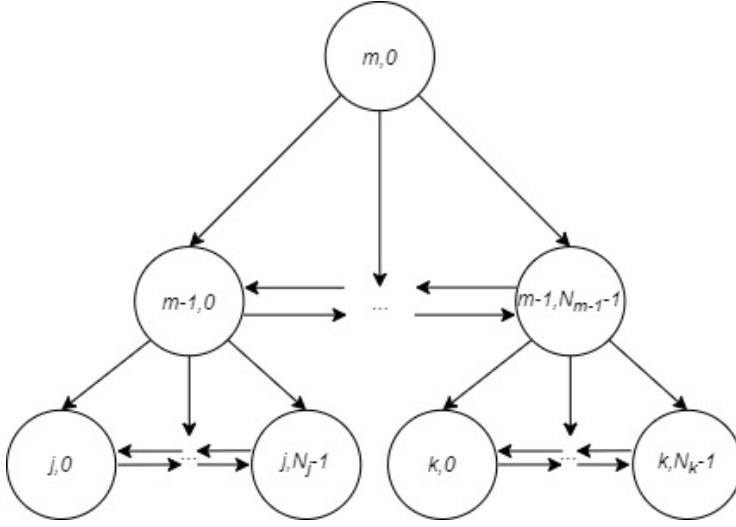


Рисунок 1. Иерархия чиновников

На первой стадии компания (муниципалитет или другой орган власти – корень иерархии $(m, 0)$) выделяет некоторый объем денег M_m для решения проблемы. Эти деньги направляются сверху вниз по иерархии так, что каждый чиновник имеет возможность присвоить себе некоторую часть суммы перед тем, как передать ее подчиненным. G_n – количество денег, попадающих на этот уровень, значение отсечки M_n – это минимальное количество денег, которое должно выйти с уровня с номером n для создания хотя бы видимости работы ($M_k < M_n < M_m \quad \forall k < n < m$ – деньги выделяются с запасом и двигаются с потерями), а $N_n = |L_n|$.

На второй стадии инспектор проверяет некоторого чиновника (n, i) на предмет коррупции, причем, если имело место хищение, оно раскрывается в 100% случаев. Вероятность проверки α_n пропорциональна суммарному размеру хищения вплоть до этого уровня (S_j – суммарное хищение на уровне j , $S_{j,i}$ – хищение чиновника (j, i)):

$$\alpha_n = \frac{\sum_{j=n}^{m-1} S_j}{M_m} = \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \sum_{i=0}^{N_j-1} S_{j,i}}{M_m}. \quad (2.1)$$

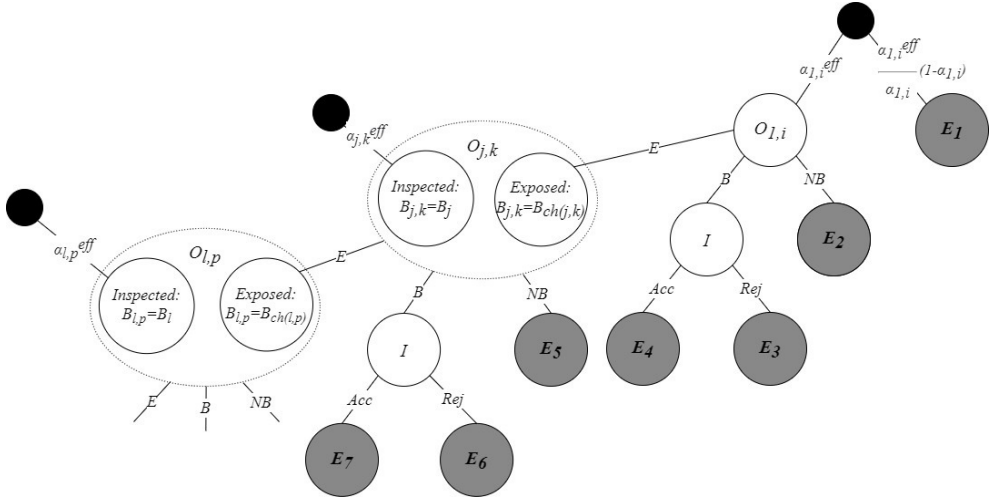


Рисунок 2. Граф игры инспекции

I – инспектор; $O_{x,y}$ – чиновник (x, y) ; E_Z – конец (исход) Z
 $\text{boss}(1) = (j, k)$; $\text{boss}(j) = (l, p)$.

Инспектор осуществляет проверку, двигаясь по иерархии согласно нумерации: сверху вниз, слева направо (от m через $m - 1$ к 1), и проверяет некоторый уровень, только если предыдущий не был проверен:

$$\alpha_n^{eff} = \alpha_n \prod_{k=n+1}^m (1 - \alpha_k). \quad (2.2)$$

Высший чиновник (корень иерархии $(m, 0)$) – муниципалитет, который в рамках модели не крадет и, следовательно, не проверяется:

$$S_m = 0 \rightarrow \alpha_m^{eff} = \alpha_m = 0. \quad (2.3)$$

Для инспектора все чиновники в пределах одного уровня неразличимы:

$$\alpha_{n,i} = \frac{\alpha_n}{N_n} \quad \alpha_{n,i}^{eff} = \frac{\alpha_n^{eff}}{N_n}. \quad (2.4)$$

У инспектируемого чиновника есть три возможных действия (рисунок 2): B – предложить инспектору взятку (размер $B_{n,i}$ – произвольное натуральное число), NB – не предлагать взятку инспектору, E

– раскрыть большую кражу (своего начальника или коллеги, укравшего больше).

В первом случае инспектор принимает (*Acc*) или отвергает (*Rej*) взятку в зависимости от ее размера. В случае выбора инспектором стратегии *Acc* чиновник (n, i) теряет взятку, но оставляет себе хищение в полном размере. Пусть $0 \leq \kappa_{n,i} \leq 1$ – часть хищения, которую чиновник смог спрятать (например, переводом в офшор или переписыванием на подставное лицо). В случае выбора инспектором стратегии *Rej* чиновник оставляет $\kappa_{n,i}S_{n,i}$, теряет взятку (она становится вещественным доказательством преступления) и платит штрафы за хищение $F(W_{n,i}, S_{n,i})$ и попытку взяточничества $Fb(B_{n,i})$. Возможен также третий случай, в котором ход переходит к раскрытому чиновнику (l, j) . Пусть $0 \leq \theta_{n,i} \leq 1$ – часть штрафа, которую раскрывающему чиновнику нужно будет заплатить в случае кооперации с инспектором (ему простят $(1 - \theta_{n,i})F(W_{n,i}, S_{n,i})$). Если чиновник (l, j) не попытается дать взятку или ее отвергнут, (n, i) придется заплатить $\theta_{n,i}F(W_{n,i}, S_{n,i})$. Если взятка будет принята, хищения обоих чиновников будут сокрыты, штрафы не будут наложены, суммы хищений останутся полностью при них.

Инспектор принимает взятку и скрывает хищение за цену $Cu(S_{n,i})$ или отвергает ее и доводит расследование до конца, получая награду $R(S_{n,i})$. Также он платит цену инспекции Ci_n в обоих случаях.

Выигрыш чиновника складывается из зарплаты $W_{n,i}$, хищения $S_{n,i}$ и потенциальной потери L , зависящей от его действия ($A_{n,i}$) действий других игроков – остальных чиновников и инспектора ($A_{-n,i}$):

$$\begin{aligned} U_{n,i}(S_{n,i}, B_{n,i}, A_{n,i}) &= W_{n,i} + S_{n,i} - \alpha_{n,i}^+ L(A_{n,i}, A_{-n,i}), \\ A_{n,i} &\in \{B, NB, E\}, \quad n \neq m - 1, \quad n \neq m, \quad i = 0, \dots, N_n - 1, \\ A_{m-1,i} &\in \{B, NB\}, \quad i = 0, \dots, N_{m-1} - 1, \\ A_{m,0} &\in \emptyset, \\ A_I &\in \{Acc, Rej\}, \\ A_{-n,i} &= (A_{k,j}, \dots, A_I), \quad (k, j) \neq (n, i). \end{aligned}$$

Полная вероятность инспекции чиновника (напрямую и через раскрытие подчиненным) $\alpha_{n,i}^+$ считается как

$$\alpha_{n,i}^+ = \alpha_{n,i}^{eff} + \sum_{(l,j) \in SE(n,i)} \alpha_{l,j}^+,$$

где $SE(n, i) = \{(v, p) : (v, p) \in subs(n, i) \wedge A_{v,p} = E\}$.

Выигрыш инспектора считается как

$$U_I(A_I, A_{n,i}, T) = W_I + \alpha_{n,i}^+ K(A_I, A_{n,i}, T),$$

где

$$K(A_I, A_{n,i}, T) = \begin{cases} K(A_I, A_{boss(n)}, T \cup \{(n, i)\}), & \text{если } A_{n,i} = E \\ B_{n,i} - \sum_{(l,j) \in T} [Cu(S_{l,j}) + Ci_l], & \text{если } A_{n,i} = B \wedge A_I = Acc \\ \sum_{(l,j) \in T} [R(S_{l,j}) - Ci_l], & \text{если } A_{n,i} \in \{B, NB\} \wedge A_I = Rej \end{cases},$$

где W_I – зарплата инспектора, $T = \{(v, k)\}$ – множество инспектируемых и раскрытых чиновников.

Уровень коррупции определяется как $LoC = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} S_j}{M_m}$.

Опишем в формате $[U_{j,k} ; U_{n,i} ; U_I]$ выигрыш чиновника-начальника $U_{j,k}$, чиновника-подчиненного $U_{n,i}$ и инспектора U_I для исхода E_X , $X = 1, \dots, 7$ (рисунок 2):

$E_1 : [W_{j,k} + S_{j,k} ; W_{n,i} + S_{n,i} ; W_I]$ – инспекция не проводится.

$E_2 : [W_{j,k} + S_{j,k} ; W_{n,i} + \kappa_{n,i} S_{n,i} - F(W_{n,i}, S_{n,i}) ; W_I + R(S_{n,i}) - Ci_1]$ – подчиненный инспектируется, взятка не предлагается.

$E_3 : [W_{j,k} + S_{j,k} ; W_{n,i} + \kappa_{n,i} S_{n,i} - (F(W_{n,i}, S_{n,i}) + B_{n,i} + Fb(B_{n,i})) ; W_I + R(S_{n,i}) - Ci_1]$ – подчиненный инспектируется, взятка отвергается.

$E_4 : [W_{j,k} + S_{j,k} ; W_{n,i} + S_{n,i} - B_{n,i} ; W_I + B_{n,i} - Ci_1 - Cu(S_{n,i})]$ – подчиненный инспектируется, взятка принимается.

$E_5 : [W_{j,k} + \kappa_{j,k} S_{j,k} - F(W_{j,k}, S_{j,k}) ; W_{n,i} + \kappa_{n,i} S_{n,i} - \theta_{n,i} F(W_{n,i}, S_{n,i}) ; W_I - (Ci_1 + Ci_j) + R(S_{n,i}) + R(S_{j,k})]$ – начальник раскрыт подчиненным, взятка не предлагается.

$E_6 : [W_{j,k} + \kappa_{j,k} S_{j,k} - (F(W_{j,k}, S_{j,k}) + B_{j,k} + Fb(B_{j,k})) ; W_{n,i} + \kappa_{n,i} S_{n,i} - \theta_{n,i} F(W_{n,i}, S_{n,i}) ; W_I - (Ci_1 + Ci_j) + R(S_{n,i}) + R(S_{j,k})]$ – начальник раскрыт подчиненным, взятка предложена и отвергнута.

$E_7 : [W_{j,k} + S_{j,k} - B_{j,k} ; W_{n,i} + S_{n,i} ; W_I + B_{j,k} - (Ci_1 + Ci_j + Cu(S_{n,i}) + Cu(S_{j,k}))]$ – начальник раскрыт подчиненным, взятка принимается.

Все последующие исходы аналогичны E_5 , E_6 , E_7 с разницей во множестве раскрытых чиновников (начальник может раскрыть своего начальника и так далее).

В такой игре хищение $S_{n,i}^* = \frac{G_n - M_n}{N_n}$, $i = 0, \dots, N_n - 1$, является оптимальным, так как любое $S_{n,i} > S_{n,i}^*$ неоптимально потому, что оно либо нарушает условие отсечки, либо обделяет коллегу, создавая возможность в будущем быть раскрытым им. Любое $S_{n,i} < S_{n,i}^*$ неоптимально, так как возможно увеличить выигрыши, взяв больше. Необходимо заметить очевидное: кража $S_{n,i}^*$ оптимальна с точки зрения риск-нейтрального максимизирующего полезность агента только при условии, что возможно подкупить инспектора взяткой, меньшей, чем хищение – в противном случае лучше не воровать вовсе.

3. Пример

Рассмотрим пример с двумя уровнями и шестью чиновниками (рисунок 3). Предположим, что муниципалитет инвестировал 3 миллиона у.е. в некоторый проект. Значения характеристик игроков представлены в таблицах 1 и 2.

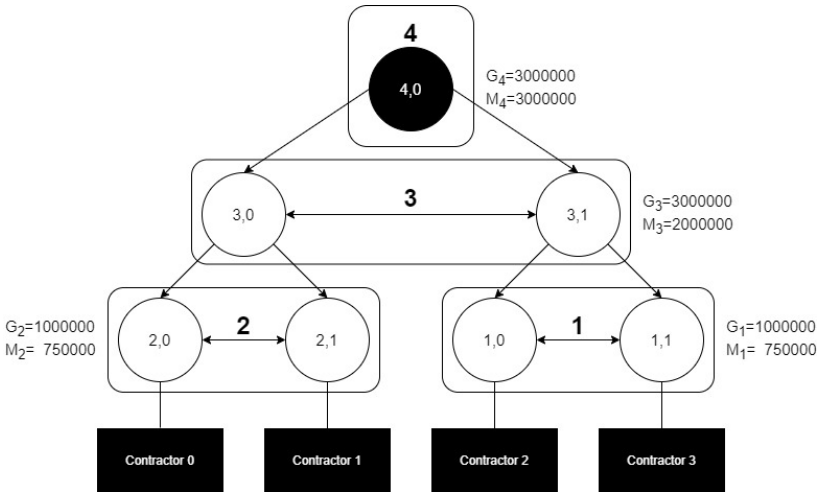


Рисунок 3. Иерархия чиновников в примере

$$boss(n) = \begin{cases} (4, 0), & \text{если } n = 3 \\ (3, 0), & \text{если } n = 2 \\ (3, 1), & \text{если } n = 1 \end{cases}$$

Таблица 1. Значения характеристик чиновников

	$W_{n,i}$	$S_{n,i}$	$\kappa_{n,i}$	$\theta_{n,i}$	$\alpha_{n,i}$	$B_{n,i}$	$F(S_{n,i})$	$Fb(B_{n,i})$
3, i	90000	500000	0,600	—	0,167	150000	1620000	5625000
2, i	40000	125000	0,300	0,010	0,208	62500	720000	2812500
1, i	40000	125000	0,300	0,010	0,250	62500	720000	2812500

Таблица 2. Значения характеристик инспектора

W_I	$Ci_{\{12\}}$	Ci_3	$R(S_{\{12\},i})$	$R(S_{3,i})$	$Cu(S_{\{12\},i})$	$Cu(S_{3,i})$
70000	10000	25000	40000	75000	5000	12500

Игра не может быть решена методом обратной индукции, так как чиновник не знает характеристики инспектора и своего начальника (а в общем случае и его начальника), поэтому для решения использована компьютерная имитационная модель¹. Ее результаты представлены в таблице 3. Каждая стратегия обозначена таким образом, что должна читаться слева направо: тип хищения подчиненных, действие подчиненных, тип хищения начальников, действие начальников. О означает оптимальное хищение, N – нулевое; Е – раскрыть начальника (доступно только подчинённым), В – дать взятку, NB – не давать взятку. Возможны $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ комбинаций стратегий, но смысл имеют только указанные 5.

Таблица 3. Результаты имитации для начальных установок

	OE_OB	OB_OB	NNB_OB	OB_NNB	NNB_NNB
(3, 0)	523136	564934	565055	90000	90000
(3, 1)	535972	565004	564835	90000	90000
(2, 0)	165000	156277	40000	162407	40000
(2, 1)	165000	156294	40000	162405	40000
(1, 0)	165000	158935	40000	160187	40000
(1, 1)	165000	158975	40000	160240	40000
I	156602	131233	105137	81219	70000
LoC	0,500	0,500	0,333	0,167	0,000

Поиск стабильной ситуации (при условии, что все игроки сфокусированы на своем выигрыше и не имеют возможности коммуницировать) происходит согласно следующему алгоритму (в скобках приведены ответы для таблицы 3):

¹Код доступен на <https://github.com/ib-rain/corruption>.

1. Найдите действие, максимизирующее выигрыш начальников (OB_OB).
2. Найдите лучший ответ подчиненных на 1 (OE_OB).
3. Найдите лучший ответ начальников на 2 (OE_OB).
4. Повторяйте, пока не останется отклонений (отклонений нет).

Или

1. Найдите действие, максимизирующее выигрыш подчиненных (OE_OB).
2. Найдите лучший ответ начальников на 1 (OE_OB).
3. Найдите лучший ответ подчиненных на 2 (OE_OB).
4. Повторяйте, пока не останется отклонений (отклонений нет).

Стабильной в данном примере является ситуация, когда все чиновники крадут оптимально, подчиненные раскрывают начальников, а они, в свою очередь, дают взятку.

Замечание 3.1. Полученное равновесие не может быть названо равновесием Нэша по причине невозможности выбора оптимального размера взятки чиновником в силу отсутствия полноты информации о выигрышах и характеристиках других игроков. Чтобы избежать терминологических проблем, в данной работе было предложено понятие *Нэш-подобного* равновесия.

Определение 3.1. *Нэш-подобное равновесие – равновесие вида*

$$(S_{n,i}^*, B_{n,i}^*, A_{n,i}^*) = \operatorname{argmax}\{U_{n,i}(S_{n,i}, B_{n,i}, A_{n,i}) \mid B_{n,i} \geq B_{n,i}^v\},$$

в котором чиновники максимизируют выигрыш в рамках отсутствия информации по трем важным характеристикам: функции выигрыша инспектора, действиям и размеру взятки начальника и величине оптимальной взятки. Они могут принимать решение только в рамках предположения о минимальной достаточной взятке $B_{n,i}^v$, ниже которого они предложить не могут, так как считают, что такая взятка точно будет отвергнута.

Нэш-подобное равновесие используют все чиновники (то есть, все игроки за исключением инспектора). Исход игры для каждого из них зависит от их собственных действий, действий инспектора и действий остальных чиновников (в частности, подчинённых, способных раскрыть кражу чиновника, и начальников, кражу которых может раскрыть сам чиновник).

4. Антикоррупционные установки

Коррупция минимизирована, когда взятка отвергается, что заставляет чиновника лишиться несокрытой части хищения и заплатить штрафы. Конечное решение (принимать или отвергать взятку) принимается инспектором, максимизирующим свой выигрыш. Таким образом, минимизации коррупции соответствует неравенство

$$\sum_{(l,j) \in T} [R(S_{l,j}) + Cu(S_{l,j})] \geq B_{n,i}. \quad (4.1)$$

В то же время размер взятки определяется чиновником: с его позиции для минимизации коррупции не воровать должно быть выгоднее, чем воровать и давать взятку:

$$U_{n,i}(S_{n,i}^*, B_{n,i}^*, B) - U_{n,i}(0, 0, NB) = S_{n,i}^* - \alpha_{n,i}^+ B_{n,i}^* \leq 0. \quad (4.2)$$

Одновременное выполнение условий (4.1) и (4.2) дает антикоррупционное условие, справедливое для любой цепочки чиновников T :

$$\sum_{(l,j) \in T} [R(S_{l,j}) + Cu(S_{l,j})] \geq \frac{S_{n,i}^*}{\alpha_{n,i}^+}. \quad (4.3)$$

Оно должно быть выполнено в лучшем случае для прямой инспекции ($T = \{(n, i)\}$), в худшем случае – для самой длинной цепочки ($T = \{(n, i), (j, k), (l, p), \dots\}$, где $(j, k) \in SE(n, i)$, $(l, p) \in SE(j, k)$), так как в случае невыполнения условия для неё существуют ситуации, в которых чиновнику выгоднее воровать.

Для цепочки чиновников T принимаемая взятка должна удовлетворять:

$$B_T^{opt} > \sum_{(l,j) \in T} [R(S_{l,j}) + Cu(S_{l,j})]. \quad (4.4)$$

Трансформируя это неравенство в равенство с помощью $\zeta > 0$, получаем:

$$B_T^{opt}(\zeta) = \sum_{(l,j) \in T} [R(S_{l,j}) + Cu(S_{l,j})] + \zeta. \quad (4.5)$$

Для минимизации коррупции необходимо, чтобы

$$B_T^{opt}(\zeta) \geq \frac{S_{n,i}^*}{\alpha_{n,i}^+}. \quad (4.6)$$

Замечание 4.1. Если условие выполняется для $\zeta = x > 0$, то оно выполняется для любого $\zeta > x$.

Вернемся к примеру. В нем возможны три типа цепочек:

$$T_s = \{(2, i)\}; \{(1, i)\}, \quad T_b = \{(3, i)\},$$

$$T_{ch} = \{(2, i), (3, 0)\}; \{(1, i), (3, 1)\}, \quad i = 0, 1.$$

Для простоты (так как чиновники на уровнях 1 и 2 идентичны) положим

$$S_{1,i}^* = S_{2,i}^* = S_s, \quad B_{1,i}^* = B_{2,i}^* = B_s.$$

Так как уже было установлено, что для подчиненных оптимально раскрывать своих начальников, бороться с коррупцией в T_s бессмысленно: независимо от того, насколько будет велика необходимая взятка, они не будут ее платить. Более эффективно сфокусироваться на T_{ch} – сделать раскрытие невыгодным для начальников; затем T_b – сделать прямую инспекцию невыгодной для начальников, и только тогда переключиться на цепочку T_s , причем при условии $S_3 = 0$ с сохранением логики большей взятки за большее хищение. Таким образом, возможно сформулировать три антикоррупционные установки – по степени увеличения строгости.

1) Достаточная (минимальная, которую инспектор примет) взятка для цепи

$$\begin{aligned} B_{ch}^{suff} &= \frac{S_{3,i}^*}{\alpha_{3,i}^+} = \frac{500000}{\frac{\alpha_3}{2} + \min[\alpha_{2,0}^+ + \alpha_{2,1}^+; \alpha_{1,0}^+ + \alpha_{1,1}^+]} = \\ &= \left[\frac{500000}{0,36111111093055556} \right] \approx 1384615. \end{aligned}$$

2) Достаточная взятка для начальника

$$B_b^{suff} = \frac{S_{3,i}^*}{\alpha_{3,i}} = \frac{S_{3,i}^*}{\frac{\alpha_3}{2}} = \left[\frac{2 \cdot 500000}{0,333} \right] = 3000000.$$

3) Достаточная взятка для подчиненного

$$B_s^{suff} = \frac{S_s}{\min[\alpha_{2,i}^0; \alpha_{1,i}^0]} = \left[\frac{125000}{0,041666667} \right] = 3000000.$$

В записи данных установок обозначение $[x]$ означает округленную вверх целую часть x . Минимум в знаменателе необходим для того, чтобы условие действовало для всех чиновников.

Замечание. Чиновники с $B_{n,i}^v = B_T^{opt}(1)$ разыгрывают не Нэш-подобное равновесие, а равновесие Нэша, которому соответствуют оптимальные кражи и минимальные возможные взятки. Сделать коррупцию невыгодной для них сложнее всего, так что логично сфокусироваться именно на них.

Таблица 4. Характеристики антикоррупционных установок

Установка	$R(S_{\{12\},i})$	$Cu(S_{\{12\},i})$	$R(S_{3,i})$	$Cu(S_{3,i})$
def	40000,0	5000,0	75000,0	11250,0
1	60000,0	20000,0	875000,0	429615,4
2	60000,0	20000,0	2000000,0	1000000,0
3	2000000,0	1000000,0	3250000,0	2500000,0

Таблица 5. Взятки в антикоррупционных установках

Установка	$B_{suff-ch}$	B_{suff-b}	B_{suff-s}	T	B_{optT}
def	131251,0	86251,0	45001,0	-	-
1	1384616,4	1304615,4	80000,0	ch	1384615,4
2	3080000,0	3000000,0	80000,0	b	3000000,0
3	8750000,0	5750000,0	3000000,0	s	3000000,0

Для всех полученных антикоррупционных установок (таблицы 4, 5) $5 \cdot 10^5$ раз была проведена компьютерная симуляция, выигрыши усреднены. Результаты представлены в таблицах 6, 7 и на рисунке 4 посредством «коррупционной выгоды»

$$CU_X = U_X - W_X, \quad (4.7)$$

рассчитываемой для любого исхода X .

Таблица 6. Коррупционная выгода CU_X при различных антикоррупционных установках

	def	s1	s2	s3
(3, 0)	143336,69	0	0	0
(3, 1)	147691,36	0	0	0
(2, 0)	109345,65	80560,62	80554,08	0
(2, 1)	109236,93	80548,62	80554,81	0
(1, 0)	96252,46	78231,37	78253,14	0
(1, 1)	96099,14	78242,55	78230,66	0
I	36663,69	11026,42	11018,90	0

Таблица 7. Изменения в коррупционной выгоде CU_X при различных антикоррупционных установках

	$def \rightarrow s1$	$def \rightarrow s2$	$def \rightarrow s3$
(3, 0)	-100,00 %	-100,00 %	-100,00 %
(3, 1)	-100,00 %	-100,00 %	-100,00 %
(2, 0)	-26,32 %	-26,33 %	-100,00 %
(2, 1)	-26,26 %	-26,26 %	-100,00 %
(1, 0)	-18,72 %	-18,70 %	-100,00 %
(1, 1)	-18,58 %	-18,59 %	-100,00 %
I	-69,93 %	-69,95 %	-100,00 %

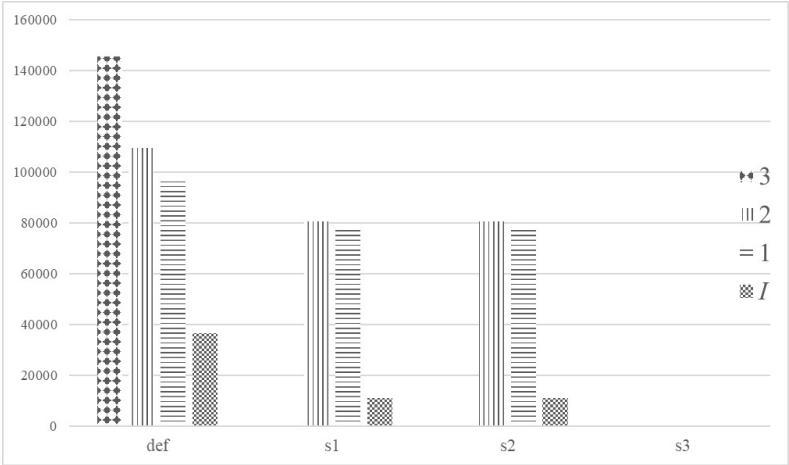


Рисунок 4. Усредненная коррупционная выгода игроков

Изменения в установках уменьшают коррупцию в рамках изученной модели и даже могут ее полностью ликвидировать. Но с практической точки зрения это требует внедрения серьезных мер – необходимая взятка, а с ней и альтернатива – сумма награды за раскрытие и цены сокрытия – должна быть в несколько (от 6 до 24) раз больше суммы хищения.

5. Кооперативное расширение

Начальникам, выше стоящим в иерархии, нужен способ обезопасить себя от раскрытия подчиненными. Один из возможных способов – сформировать из двух или более чиновников коалицию, члены которой не могут раскрывать хищения друг друга; эти хищения делятся между участниками коалиции согласно установленному правилу, как и взятки в случае инспекции одного из них.

Присоединение к коалиции имеет свои преимущества и недостатки. Преимущества включают страховку от раскрытия подчиненным членом коалиции, лучшую координацию в определении размера хищения (иррелевантно в модели, но может быть полезно в реальной жизни), большую уверенность в размере необходимой взятки (чем больше коалиция, тем точнее она знает, кто был инспектирован), большую взятку (меньший шанс отказа) и меньшую цену по ее сбору для членов – хотя бы потенциально и хотя бы для некоторых. К недостаткам можно отнести большой шанс инспекции, более высокие штрафы за преступления, совершенные группой лиц по предварительному сговору, дележи, не устраивающие всех.

Не все группы чиновников могут сформировать коалицию: например, в изучаемом примере пара $\{(1, 0), (2, 0)\}$ не имеет связей, так что отсутствует их коммуникация, ни один из них не может раскрыть другого, так что их коалиция бессмысленна и поэтому невозможна.

Мы предлагаем следующее правило: любой чиновник с прямой или непрямой связью с другим (путем в графе иерархии) может сформировать с ним коалицию. Другими словами, изолированные компоненты недопустимы (все члены иерархии должны быть связаны). На изучаемом примере можно видеть, что коалиция $\{(2, 0), (3, 0), (3, 1)\}$ возможна, а $\{(2, 0), (3, 0), (1, 0)\}$ нет. Согласно этому правилу, может быть сформировано 24 разных коалиции. Их можно характеризовать:

- множеством членов, их подмножествами по уровням и их размерами

$$C = \bigcup_{(n,i) \in C} \{(n,i)\} = \bigcup_{n \in C} C_n, \quad N_C = |C|,$$

$$C_j = \bigcup_{(j,i) \in C} \{(j,i)\}, \quad N_{C,j} = \sum_{(j,i) \in C} 1 = |C_j| \leq N_j,$$

- частичным выигрышем членов согласно правилу R (частью, которую чиновник получает от коалиционного хищения и потенциального взяточничества)

$$RU_{n,i}^C = U_{n,i}(S_{n,i}, 0, BC) - W_{n,i},$$

- коалиционными действиями – члены коалиции никогда не раскрывают друг друга, всегда совместно дают взятку и не могут не воровать (если они не желают этого делать, не стоит вступать в коалицию)

$$\forall (n,i) \in C : \quad S_{n,i} > 0 \wedge A_{n,i} = BC,$$

- коалиционным хищением $S_C = \sum_{(n,i) \in C} S_{n,i}$,
- коалиционной взяткой B_C ,
- вероятностью инспекции $\alpha_C = \bigcup_{(n,i) \in C} \alpha_{n,i}^+$.

Эта вероятность также может быть описана как вектор $\alpha_C = (\alpha_{ch}; \alpha_b; \alpha_s)$, так как любой чиновник, кроме низшего подчиненного, не может быть уверен, как к нему пришла инспекция – напрямую или через раскрытие. Похожим образом можно описать коалиционную взятку: $B_C = (B_{ch}; B_b; B_s)^T$. Отсюда получаем

$$\alpha_C B_C = \alpha_{ch} B_{ch} + \alpha_b B_b + \alpha_s B_s.$$

В примере некооперативной версии для начальников все сводилось к α_{ch} , так как они не знали источник инспекции, а для подчиненных – к α_s , так как для них не было другого варианта.

Если инспектор принимает взятку, коалиция теряет только ее, в противном случае к этому еще добавляется штраф за коалиционное хищение $Fcs(S_C)$ и взяточничество $Fcb(B_C)$:

$$U_{n,i}^C(A_I) = RU_{n,i}^C - \begin{cases} 0, & \text{если } A_I = Acc \\ Fcs(S_C) + Fcb(B_C), & \text{если } A_I = Rej \end{cases}.$$

5.1. Правила

Были предложены 7 правил, далее проанализированных на предмет стабильности в возможных типах коалиций.

Высшие начальники (чиновники уровня bl) получают все

$$bl : \nexists(n, i) \in C : (j, k) \in subs(n, i) \quad \forall(j, k) \in C_{bl},$$

$$BGAU_{n,i}^C = \frac{S_C - \alpha_C B_C}{N_{C,bl}} \quad \forall(n, i) \in C_{bl},$$

$$BGAU_{n,i}^C = 0 \quad \forall(n, i) \notin C_{bl}.$$

Низшие подчиненные (чиновники уровня sl) получают все

$$sl : subs(n, i) = \emptyset \quad \forall(n, i) \in C_{sl},$$

$$SGAU_{n,i}^C = \frac{S_C - \alpha_C B_C}{N_{C,sl}} \quad \forall(n, i) \in C_{sl},$$

$$SGAU_{n,i}^C = 0 \quad \forall(n, i) \notin C_{sl}.$$

Равенство

$$EQU_{n,i}^C = \frac{S_C - \alpha_C B_C}{N_C} \quad \forall(n, i) \in C.$$

Только деленная поровну взятка

$$ESBU_{n,i}^C = S_{n,i} - \frac{\alpha_C B_C}{N_C} \quad \forall(n, i) \in C.$$

Только деленная пропорционально взятка

$$PSBU_{n,i}^C = S_{n,i} - \frac{\alpha_C B_{C,n}}{N_{C,n}} \quad \forall(n, i) \in C,$$

$$B_C = \sum_{n \in C} B_{C,n},$$

$$B_{C,n} = \gamma_n B_C, \quad \gamma_n \in [0, 1], \quad \sum_{n \in C} \gamma_n = 1,$$

$$k > n : \quad B_{C,k} \geq B_{C,n} \geq 0.$$

Деленная поровну взятка и бонус подчиненным

$$\begin{aligned} ESBBSU_{n,i}^C &= S_{n,i} - \frac{\alpha_C B_C}{N_C} + \\ &+ \begin{cases} -|C \cap \text{subs}(n, i)| \cdot BS_{n,i}, & \text{если } n = bl \\ BS_{\text{boss}(n)} - |C \cap \text{subs}(n, i)| \cdot BS_{n,i}, & \text{если } n \neq bl, sl \\ BS_{\text{boss}(n)}, & \text{если } n = sl \end{cases} \\ &\forall (n, i) \in C. \end{aligned}$$

Деленная пропорционально взятка и бонус подчиненным

$$\begin{aligned} PSBBSU_{n,i}^C &= S_{n,i} - \frac{\alpha_C B_{C,n}}{N_{C,n}} + \\ &+ \begin{cases} -|C \cap \text{subs}(n, i)| \cdot BS_{n,i}, & \text{если } n = bl \\ BS_{\text{boss}(n)} - |C \cap \text{subs}(n, i)| \cdot BS_{n,i}, & \text{если } n \neq bl, sl \\ BS_{\text{boss}(n)}, & \text{если } n = sl \end{cases} \\ &\forall (n, i) \in C, \end{aligned}$$

$$B_C = \sum_{n \in C} B_{C,n},$$

$$B_{C,n} = \gamma_n B_C, \quad \gamma_n \in [0, 1], \quad \sum_{n \in C} \gamma_n = 1,$$

$$k > n : \quad B_{C,k} \geq B_{C,n} \geq 0.$$

5.2. Стабильность

Определение 5.1. Аллокация – это некоторое разделение коллективного хищения и взятки внутри коалиции согласно установленному правилу.

Здесь и далее в рамках нашей модели *индивидуально стабильной* будем называть аллокацию, принадлежащую множеству дележей $I(v) = \{X \in R^{N_C} \mid X(C) = v(C), \quad X_{n,i} \geq v(\{(n, i)\}) \forall (n, i) \in C\}$, то есть такой, что находиться в коалиции чиновнику не хуже, чем быть одному.

Здесь и далее в рамках нашей модели *коалиционно стабильной* будем называть аллокацию, принадлежащую С-ядру, определяемому согласно [8] как $C(v) = \{X \in R^{N_C} \mid X(C) = v(C), \quad X(S) \geq v(S) \forall S \subset C\}$, то есть такой, что ни у какой подгруппы чиновников нет причин выходить из коалиции.

Так как чиновники одного уровня обладают одинаковыми характеристиками, можно упростить анализ, сведя все возможные 24 коалиции к 14 основным типам:

Подчиненный-подчиненный слева

$$SSL = \{\{(2, 0), (2, 1)\}\}.$$

Подчиненный-подчиненный справа

$$SSR = \{\{(1, 0), (1, 1)\}\}.$$

Начальник-начальник $BB = \{\{(3, 0), (3, 1)\}\}.$

Начальник-подчиненный слева

$$1B1SL = \{\{(3, 0), (2, 0)\}, \{(3, 0), (2, 1)\}\}.$$

Начальник-подчиненный справа

$$1B1SR = \{\{(1, 0), (3, 1)\}, \{(1, 1), (3, 1)\}\}.$$

Начальник-начальник-подчиненный слева

$$BB1SL = \{\{(2, 0), (3, 0), (3, 1)\}, \{(2, 1), (3, 0), (3, 1)\}\}.$$

Начальник-начальник-подчиненный справа

$$BB1SR = \{\{(1, 0), (3, 1), (3, 0)\}, \{(1, 1), (3, 1), (3, 0)\}\}.$$

Начальник-2-подчиненных слева

$$1B2SL = \{\{(3, 0), (2, 0), (2, 1)\}\}.$$

Начальник-2-подчиненных справа

$$1B2SR = \{\{(3, 1), (1, 0), (1, 1)\}\}.$$

2-подчиненных-начальник-начальник слева

$$2SBBL = \{\{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}\}.$$

2-подчиненных-начальник-начальник справа

$$2SBBR = \{\{(1, 0), (1, 1), (3, 1), (3, 0)\}\}.$$

Подчиненный-начальник-начальник-подчиненный
 $1SBB1S = \{\{(2, 0), (3, 0), (3, 1), (1, 0)\}, \{(2, 0), (3, 0), (3, 1), (1, 1)\},$
 $\{(2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 0)\}, \{(2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 1)\}\}.$

2-подчиненных-начальник-начальник-подчиненный слева

$2SBB1SL =$
 $\{\{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 0)\}, \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 1)\}\}.$

2-подчиненных-начальник-начальник-подчиненный справа

$2SBB1SR =$
 $\{\{(2, 0), (3, 0), (3, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{(2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 0), (1, 1)\}\}.$

Полная коалиция

$GC = \{\{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 0), (1, 1)\}\}.$

Для всех возможных пар «тип коалиции–правило» был проведён предварительный анализ, получены следующие результаты:

1. Типы коалиций SSL , SSR , BB не являются стабильными (ни индивидуально, ни коалиционно) вне зависимости от выбранного правила.
2. Правила BGA , SGA , ESB не позволяют образовать стабильные пары ни с какими типами коалиций.
3. Правила PSB , $ESBBS$, $PSBBS$ могут быть стабильными, только если они трансформируются в правило SS , стабильное для подчиненных:

$$SSU_{n,i}^C(\xi) = S_{n,i} - \begin{cases} \frac{\alpha_C B_C + |C \cap \bigcup_{(n,i) \notin C_{bl}} \{(n,i)\}| \cdot \xi}{N_{C,bl}} & \text{если } n = bl \\ -\xi & \text{иначе} \end{cases} \quad \forall (n,i) \in C.$$

Так как начальники максимизируют свои выигрыши, они минимизируют свои расходы, выбирая наименьший возможный бонус. Следуя рассуждениям, аналогичным случаю для оптимальной взятки, полагаем $\xi = 1$ (так как это может считаться взяткой подчиненному). Меры, принятые против такого правила, будут действенны против любых $\xi > 1$, а именно такие значения встречаются в реальном мире, согласно исследованиям игр-ультиматумов [13,14].

4. Только для 48 пар не была аналитически доказана невозможность стабильности, они представлены таблице 8.

Таблица 8. Проверяемые пары «коалиция-правило»

Правило	EQ		SS	
Коалиция	I	C	I	C
1B1SL	X	X	X	X
1B1SR	X	X	X	X
BB1SL	X	X	X	X
BB1SR	X	X	X	X
1B2SL	X	X	X	X
1B2SR	X	X	X	X
2SBBL	X	X	X	X
2SBBR	X	X	X	X
1SBB1S	X	X	X	X
2SBB1SL	X	X	X	X
2SBB1SR	X	X	X	X
GC	X	X	X	X

5.3. Результаты имитации

Для индивидуальной стабильности проведено сравнение с некооперативной версией, для коалиционной – с кооперацией любой правильной подкоалиции. Все сравнения проводились с минимальной необходимой взяткой, то есть, с наилучшим возможным случаем для снижения вычислительной нагрузки и потому, что у некооперативной версии есть преимущество – в случае неподъемной по величине взятки чиновники просто перестают воровать, чего их коалиционные визави сделать не могут. Имитационное моделирование проводилось $5 \cdot 10^5$ раз для каждой пары во всех установках с $\xi = 1$.

Таблица 9. Анализ результатов имитации

Установка	def		s1		s2		s3	
Коалиция / Правило	EQ	SS	EQ	SS	EQ	SS	EQ	SS
(3, 0), (2, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 0), (3, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 1), (3, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 0), (3, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 1), (3, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 0), (2, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 0), (1, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1)	N	<u>C</u>	N	C	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 0), (1, 1), (3, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(2, 0), (3, 0), (3, 1), (1, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(2, 0), (3, 0), (3, 1), (1, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 0)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 1)	N	N	N	N	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (1, 0)	N	<u>C</u>	C	C	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (1, 1)	N	<u>C</u>	C	C	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 0), (1, 1), (3, 0), (2, 0)	N	<u>C</u>	N	C	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(3, 1), (1, 0), (1, 1), (3, 0), (2, 1)	N	<u>C</u>	N	C	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>
(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (1, 0), (1, 1)	N	<u>C</u>	C	C	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>	<u>N</u>

В таблице 9 N означает «нестабильно», а C – «коалиционно стабильно». Проанализировав результаты, мы пришли к следующим выводам:

1. Типы коалиций 1B1SL, 1B1SR, BB1SL и BB1SR нестабильны для всех коалиций во всех установках (залиты серым).
2. Типы коалиций 2SBBL, 2SBB1SL, 2SBB1SR и GC с правилом SS коалиционно стабильны в исходной установке (курсив и подчеркнуты).
3. В установке s1 все пары из предыдущего пункта и 2SBB1SL и GC с правилом EQ коалиционно стабильны (жирные). Коалиции эффективны в этом случае, так как на них меньше влияет изменения в B_{ch} , чем на индивидуальных игроков.
4. Не существует пары «коалиция-правило», стабильной в установках s2 и s3 (подчеркнуты), – антикоррупционных установок,

разработанных для некооперативной версии. Они работают и в кооперативной, так как делают взятки для прямых инспекций настолько высокими, что откупиться выгодно не представляет возможным, так что дополнительная информация об источнике инспекции не помогает.

5.4. Подход Майерсона

Другой подход к изолированным компонентам был предложен Майерсоном, адаптировавшим вектор Шепли («среднее значение вкладов для каждого игрока по всем возможным перестановкам» согласно [7]) для игр с графом коммуникации. В [11] он описан как:

$$v^g(S) = \sum_{C \in S|_g} v(C).$$

$S|_g$ – множество связанных коалиций графа g , то есть, множества C , являющиеся максимальными подкоалициями S , у которых все игроки связаны. Если все игроки связаны, то они могут коммуницировать и поэтому получают изначальный выигрыш $v(S)$. В противном случае члены коалиции могут коммуницировать только в пределах своего связного компонента, но не между, так что получают выигрыш, равный сумме выигрышей, полученных независимо.

$$M_i(v, g) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!} (v^g(S \cup \{i\}) - v^g(S)).$$

Для данной модели измененная и упрощенная (изучается только один граф) нотация выглядит следующим образом:

$$M_{n,i}(v) = \sum_{S \subseteq H \setminus \{(n,i)\}} \frac{|S|!(|H|-1-|S|)!}{|H|!} [v(S \cup \{(n,i)\}) - v(S)],$$

где H – иерархия, множество всех чиновников.

Рассмотрены два типа: цена Майерсона для оригинальной и модифицированной версии игры, в которой подчиненные «ведут себя хорошо» и не раскрывают начальников ни при каких условиях (в таблице обозначена M^*).

Таблица 10. Анализ цен Майерсона для установок def и s1

Установка	def		s1	
	М > ЛЧШ	М* > ЛЧШ	М > ЛЧШ	М* > ЛЧШ
(3, 0)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
(3, 1)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
(2, 0)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
(2, 1)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
(1, 0)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
(1, 1)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
Вып_нар	274	1044	306	982

Таблица 11. Анализ Майерсона для установок s2 и s3

Установка	s2		s3	
	М > ЛЧШ	М* > ЛЧШ	М > ЛЧШ	М* > ЛЧШ
(3, 0)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
(3, 1)	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
(2, 0)	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
(2, 1)	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
(1, 0)	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
(1, 1)	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ
Вып_нар	308	888	348	1028

В таблицах 10 – 11 обозначение ЛЧШ – усредненный выигрыш стратегий, обеспечивающих наибольший выигрыш для соответствующих установок в некооперативной версии. Колонка "М > М*" была убрана, так как она всегда истинна для начальников и ложна для подчиненных. Выводы из анализа:

1. Обе версии игры невыпуклы: из всех возможных $63 \cdot 62 = 3906$ пар коалиций S, T неравенство $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ не выполняется для числа, указанного в строке Вып_нар.
2. У подчиненных цена Майерсона для модифицированной версии игры всегда ниже, чем цена Майерсона для оригинальной версии, что ожидаемо, так как они отказались от своей возможности раскрывать начальников, а значит, стали менее значимы.
3. Оба дележа нестабильны в исходной установке.

4. Вектор Майерсона для оригинальной версии игры индивидуально стабилен в установке $s1$.
5. Вектор Майерсона для модифицированной версии игры никогда не дает стабильный результат: он удовлетворяет либо исключительно начальников ($s1, s2$), либо никого ($def, s3$).

6. Заключение

В статье предложена двухстадийная иерархическая модель коррупции. Введено понятие *Нэш-подобного* равновесия, в котором агенты максимизируют свой выигрыш, не имея полной информации о выигрышах других игроков.

Изучен частный случай модели с шестью чиновниками на двух уровнях, решение которого найдено с помощью компьютерной имитационной модели. Результатом стало пессимистичное равновесие, в котором коррупция порождает коррупцию. Условия для минимизации коррупции приведены в общей форме и в числовом виде для рассматриваемого примера. Результаты моделирования для него были следующими: две установки уменьшили коррупцию, одна ее искоренила.

Также рассмотрено кооперативное расширение модели: получены правила для формирования коалиции, дележи и критерии стабильности. Все ситуации, чья нестабильность не была доказана аналитически, были просимулированы. Результаты их анализа показали, что достаточно большим коалициям (от четырех до шести чиновников) выгодно оставаться коррумпированными под первой антикоррупционной установкой, но под более строгими ни одна коалиция этого делать не может.

В случае кооперативного расширения была рассчитана цена Майерсона для оригинальной и модифицированной версий игры: первая индивидуально стабильна под первой антикоррупционной установкой, вторая никогда не стабильна, обе невыпуклы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А. А., Картунова П. А., Уразов А. С. *Модели организации государственных инспекций и борьбы с коррупцией* // Матем. моделирование. 2010. № 22. С. 67–89.
2. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. № 7. С. 50–73.
3. Горбанева О.И., Усов А.Б., Угольницкий Г.А. *Модели коррупции в иерархических системах управления* // Проблемы управления. 2015. № 1. С. 2–10.
4. Горбанева О.И. *Коррупционные механизмы в моделях сочетания общих и частных интересов в случае одного агента. Оптимизационный подход* // Математическая теория игр и ее приложения. 2020. № 12. С. 36–62.
5. Орлов И.М. *Пример решения коррупционной игры с иерархической схемой* // Процессы управления и устойчивость. 2020. № 1. С. 402–407.
6. Орлов И.М., Кумачева С.Ш. *Иерархическая модель коррупции: теоретико-игровой подход* // Сборник «Математическая теория управления и ее приложения (МТУИП-2020)». 2020. С. 269–271.
7. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Лань, 2016.
8. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2012.
9. Савватеев А.В. *Моделирование коррупции и лоббирования в переходных экономиках*. Дис. канд. экон. наук: 08.00.13, Москва. 2003. 114 с. РГБ ОД, 61:03-8/2759-6
10. Attanasi G., Rimbaud C., Villeval M. *Embezzlement and guilt aversion* // IZA Discussion Papers 11956. 2016.

11. Caulier J.-F., Skoda A., Tanimura E. *Allocation Rules for Networks Inspired by Cooperative Game-Theory* // *Revue d'economie politique*. 2017.
12. Gorbaneva O.I., Usov A.B., Ougolnitsky G.A. *Mechanisms of struggle with corruption in dynamic social and private interests coordination engine models* // *Contributions to Game Theory and Management*. 2019. V. 12. P. 140–150.
13. Halko M.-L., Seppala T. *Ultimatum game experiments* // *Discussion papers of Helsinki Center of Economic Research*. 2006. No. 140.
14. Ramsay K., Signorino C. *A Statistical Model of the Ultimatum Game* // *Working Papers*. 2009.
15. Kumacheva, S. Sh. *The Strategy of Tax Control in Conditions of Possible Mistakes and Corruption of Inspectors* // *Contributions to Game Theory and Management*. 2013. V. 6. P. 264–273.
16. Orlov I., Kumacheva S. *Hierarchical Model of Corruption: Game-Theoretic Approach* // *Frontiers of Dynamic Games: Game Theory and Management*. 2020. (Принята в печать.)
17. Shenje T. *Investigating the mechanism of corruption and bribery behavior: a game-theoretical methodology* // *Dynamic Research Journals. Journal of Economics and Finance*. 2016. V. 1. P. 1–6.
18. Song Y., Zhu M., Wang H. *Game-theoretic approach for anti-corruption policy between investigating committee and inspected departments in China* // *International Conference on Applied Mathematics, Simulation and Modelling*. 2016. P. 452–455.
19. Spengler D. *Detection and Deterrence in the Economics of Corruption: a Game Theoretic Analysis and some Experimental Evidence*. University of York: York. 2014.
20. Vasin A., Panova E. *Tax Collection and Corruption in Fiscal Bodies* // *Economics Education and Research Consortium Working Paper Series*. 2000. No. 99/10.

21. Zyglidopoulos S., Dieleman M., Hirsch P. *Playing the Game: Unpacking the Rationale for Organizational Corruption in MNCs* // Journal of Management Inquiry. 2019. V. 29. P. 338–349.

TWO-STAGE GAME-THEORETIC MODEL OF INSPECTION AND EMBEZZLEMENT IN A THREE-LEVEL CONTROL SYSTEM

Suriya Sh. Kumacheva, Saint Petersburg State University, Cand.Sc.
(s.kumacheva@spbu.ru),

Ivan M. Orlov, Saint Petersburg State University
(orlov.ivan.m@gmail.com).

Abstract: The subhierarchical two-stage game-theoretic model of embezzlement and bribery is designed, the particular example based on the scheme with six officials on three levels is solved. Theoretic conditions and numerical corruption minimization settings are suggested. The cooperative extension is proposed and the computer simulation is carried out for two different approaches to the isolated components, the results analyzed for stability.

Keywords: corruption, embezzlement, hierarchical game, inspection, bribery, cooperative games, core, Myerson value.