

УДК 519.7

ББК 22.18

ДИНАМИКА МНЕНИЙ В МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ С ОПТИМАЛЬНЫМ ВЫБОРОМ МОМЕНТОВ ПРОВЕРКИ МНЕНИЙ*

Цзинцзин Гао

ЕЛЕНА М. ПАРИЛИНА

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: st081293@student.spbu.ru, e.parilina@spbu.ru

В работе рассматривается модель динамики мнений в социальной сети, представляющей собой мультиагентную систему с конечным числом агентов. Предполагается, что существует центр влияния на мнение агентов, который управляет уровнем влияния в каждый момент времени. Затраты центра представлены линейно-квадратичной функцией переменной состояния (мнения агентов) и управлений. Центр влияния стремится выбрать конечное число моментов проверок мнений агентов для их сравнения с целевым мнением. В работе предлагается решение этой динамической задачи на конечном промежутке времени, представлен алгоритм его реализации. С помощью численного моделирования показано, как найти оптимальные моменты проверок и соответствующие траектории оптимального управления и состояния системы.

Ключевые слова: динамика мнений, социальная сеть, линейно-квадратичные игры, оптимальные моменты проверки мнений.

Поступила в редакцию: 19.11.22 *После доработки:* 03.12.22 *Принята к публикации:* 12.12.22

©2022 Ц. Гао, Е.М. Парилина

* Работа второго автора поддержана Российским научным фондом, грант № 22-11-00051, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00051/>

1. Введение

В работе изучается математическая модель социальной сети, представленной в виде мультиагентной системы. Со временем меняются индивидуальные мнения участников социальных сетей. Известно множество математических моделей динамики мнений, разработанных для описания процесса обмена мнениями в реальном мире. Изменения мнений могут привести к некоторым негативным последствиям для лиц принимающих решения. Поэтому чтобы уменьшить издержки, которые влекут такие изменения, нужны эффективные методы управления мнениями участников сети. В статье [13] разрабатывается новая структура управления мнениями на основе методов глубокого обучения с подкреплением (OMFDRL). В работе [12] две компании или маркетолога, находящиеся в конкурентных отношениях, рассматриваются как игроки, минимизирующие разницу между средним и желаемым мнением в социальной сети при заданном маркетинговом бюджете. В [2] авторы исследуют стратегии вирусного маркетинга в социальных сетях, направленные на максимизацию дохода за счет продажи продукта. В этой модели на решение покупателя приобрести товар влияют друзья, владеющие товаром, и цена, по которой он предлагается. Существует множество моделей динамики мнений, в которых решаются задачи оптимального управления, направленные на достижение консенсуса в сети. В статье [1] предлагается модель динамики мнений на развивающейся во времени сети с безмасштабным асимптотическим распределением. Разработана стратегия управления, основанная на степени связности каждого агента.

Для описания социальных сетей используются различные подходы к построению математических моделей динамических систем. Так, проблема социальной оптимальности в линейно-квадратичных системах среднего поля изучается в [9]. Стратегия агента находится с помощью приближения среднего поля. В статье [4] основное внимание уделяется различию мнений в конце конечного промежутка времени. Теоретические результаты в [4] получены при решении задачи минимизации затрат на сближение с целевыми мнениями агентов социальных сетей. В работе [5] предложена модель динамики мнений, которая рассматривает динамику при фиксированном числе наблю-

дений k и учитывает разницу между мнением агента и общественно желаемым мнением. Теоретические результаты в [7] помогают найти оптимальную стратегию. Динамические модели мнений исследованы в [10] и [11], причем в последней работе для определения равновесия в игре нескольких лиц используется кооперативный подход.

В нашей работе рассматривается упрощенная версия социальной сети, состоящей из двух агентов и центра влияния, называемого игроком. Игрок может влиять только на одного агента. Предполагается, что у игрока есть конечное число моментов времени на заданном временном промежутке, в которые он может проводить проверку мнений агентов и сравнивать их с целевым мнением. В процессе управления игрок учитывает следующие издержки: 1) квадрат разницы между мнением агента и целевым мнением, 2) квадратичные издержки на влияние. Игрок стремится минимизировать линейно-квадратичную функцию при заданной динамике мнений, выбирая уровень или силу влияния.

В работе изучается оптимальное поведение игрока, который желает воздействовать на участников социальной сети для достижения цели (определенного мнения по некоторой проблеме) с минимальными затратами. В статье предлагается решение проблемы: игрок воздействует на определенного члена общества (агента) и осуществляет мониторинг мнений агентов фиксированное количество раз за весь период времени. В работе рассчитываются и сравниваются затраты для разных сценариев, чтобы найти набор моментов проверок с наименьшими затратами.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Модель динамики мнений описывается в разделе 2. Метод уравнений Эйлера кратко описан в разделе 3. В разделе 4 приводится алгоритм решения поставленной задачи минимизации. Результаты численного моделирования описаны в разделе 5, и краткие выводы о работе сделаны в разделе 6.

2. Модель

Рассмотрим модель социальной сети с двумя агентами¹. Мнение

¹Модель легко обобщается на случай с любым конечным числом агентов. В работе демонстрируются результаты на двухагентной модели для упрощения интерпретации результатов.

агента 1 (агента 2) обозначается через x_1 (x_2). Агенты могут влиять на мнения друг друга посредством взаимодействия, поэтому их мнения со временем меняются. Предполагаем, что время дискретно и конечно. Определим мнение агента 1 в момент времени t как $x_1(t) \in \mathbb{R}$, $t = 0, \dots, T$ и мнение агента 2 в момент времени t как $x_2(t) \in \mathbb{R}$, $t = 0, \dots, T$. Вектор $(x_1(t), x_2(t))$ представляет переменную состояния в момент времени t .

Предположим также, что в социальной сети есть игрок, который может влиять на одного агента сети, скажем, на агента 1. Обозначим его влияние на агента 1 в момент времени $t = 0, \dots, T - 1$ через $u(t) \in U \subset \mathbb{R}$. Игрок не влияет на мнение агента 1 в конечный момент времени T .

Динамика мнения агента зависит от текущего состояния и управления игрока. Мнение агента 1 в следующий момент времени зависит от текущего мнения агента 1, среднего социального мнения и уровня влияния или управления игрока. Мнение агента 2 в следующий момент времени зависит от текущего мнения агента 2 и среднего общественного мнения. Динамика мнений агентов определяется следующими уравнениями:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u(t), \quad (2.1)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) \quad (2.2)$$

с начальными условиями:

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (2.3)$$

В уравнениях (2.1) и (2.2) константы $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ обозначают убеждения или чувствительность агентов к среднему общественному мнению.

Предполагаем, что игрок может проверять мнения агентов на траектории состояний только в некоторые моменты времени. Число таких проверок равно k , и это число является фиксированным. Пусть $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1$, где $k < T$, обозначают моменты наблюдения, которые неизвестны. Целевое мнение игрока есть $s \in \mathbb{R}$. Игрок

стремится выбрать моменты проверки мнений агентов и управления на каждом шаге таким образом, чтобы минимизировать свои затраты, которые задаются формулой

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (cu^2(t)) + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} ((x_1(t_j) - s)^2 + (x_2(t_j) - s)^2) + \delta^T ((x_1(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2), \quad (2.4)$$

где $\delta \in (0, 1]$ – дисконт-фактор и $c > 0$ – удельные издержки игрока на влияние.

Сначала сформулируем необходимые условия оптимальной стратегии игрока в задаче при заданных моментах проверки мнений $t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Далее предложим алгоритм решения задачи при неизвестных $t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

3. Метод Эйлера

В этом разделе представлено краткое описание метода уравнений Эйлера. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $U \subset \mathbb{R}^m$ – пространство состояний и множество управлений соответственно. При заданном начальном состоянии $x_0 \in X$ состояние системы меняется в соответствии с уравнением динамики:

$$x(t+1) = f_t(x(t), u(t)), t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (3.1)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти управление $u(t) \in U$, максимизирующее функционал

$$\sum_{t=0}^T \delta^t r_t(x(t), u(t)) \quad (3.2)$$

относительно уравнений динамики состояния (3.1) и заданного начального условия $x(0) = x_0$, где $r_t(x(t), u(t))$ есть функция выигрыша или затрат игрока.

Можем переформулировать эту задачу относительно траектории состояния $x(t)$. Предположим, что можно выразить $u(t)$ из уравнения (3.1) как функцию $x(t)$ и $x(t+1)$, скажем, $u(t) = q(x(t), x(t+1))$. Следовательно, мы можем переписать функционал (3.2) в виде:

$$\sum_{t=0}^T \delta^t g_t(x(t), x(t+1)), \quad (3.3)$$

где $g_t(x(t), x(t+1)) = r_t(x(t), q(x(t), x(t+1)))$, $t = 0, 1, \dots, T-1$. Подход с использованием уравнений Эйлера дает необходимые условия (см., например, [3,6,7]) оптимальной траектории $x^*(t)$, которые² имеют вид:

$$\frac{\partial g_{t-1}(x^*(t-1), x^*(t))}{\partial y} + \delta \frac{\partial g_t(x^*(t), x^*(t+1))}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

$$t = 1, \dots, T-1.$$

где x – первая переменная в g_t , а y – вторая переменная в g_{t-1} .

Можно заметить, что рассматриваемая в статье задача относится к классу задач линейно-квадратичной оптимизации. Применим метод уравнений Эйлера для нахождения оптимальной стратегии игрока в задаче с заданной динамикой мнений, ориентированной на среднее мнение (см. [8]). Тот же метод применялся в [4] и [5] для нахождения оптимального управления в задаче управления мнениями.

Следующая теорема дает необходимые условия оптимальной стратегии игрока, найденной с использованием метода уравнений Эйлера.

4. Теоретические результаты

Теорема 4.1. Пусть $\{u^*(t) : t = 0, \dots, T-1\}$ – оптимальная стратегия, минимизирующая функционал (2.4) при начальных условиях (2.3) и уравнении динамики состояний (2.1) и (2.2), а также $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ – соответствующая траектория состояния. Моменты $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T-1$ заданы. Тогда оптимальная стратегия $u^*(t), t = 0, \dots, T-1$, определяемая как

$$u^*(t) = z^*(t+1) - Az^*(t)$$

и соответствующая оптимальная траектория состояний $(x_1^*(t), x_2^*(t)), t = 1, \dots, T$ удовлетворяют системе уравнений:

²Мы предполагаем, что условия теоремы 2.1 в [6] удовлетворены.

$$\left\{ \begin{array}{l} Ac\delta z(t+1) + Bz(t-1) - Cz(t) \\ \quad - \frac{Ac}{\delta} z(t-2) = 0, t = 2, \dots, T-1, \\ Dz(t) - Ez(t-1) - A\delta cz(t+1) + \frac{Ac}{\delta} z(t-2) \\ \quad = (a_2 - 1)\delta(x_2(t) - s) + x_2(t-1) - s, \\ \quad t = t_j, j = 2, \dots, k, \\ c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, t = T, \\ \left(\frac{c}{\delta} + A^2c\right)z(T-1) - \frac{Ac}{\delta}z(T-2) - \left(Ac - \frac{a_2\delta}{2}\right)z(T) \\ \quad = a_2(x_2(T) - s), \\ x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), t = 1, \dots, T-1, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

где $z^*(t) = x_1^*(t) - x_2^*(t)$, $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$, $B = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c$, $C = Ac - c - A^2\delta c$, $D = c + A^2\delta c + \delta + Ac - \frac{a_2\delta}{2}$ и $E = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c + 1$.

Доказательство. Введем новую переменную $z(t)$:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad t = 0, \dots, T.$$

Из уравнений динамики состояний (2.1), (2.2), принимая во внимание выражение $z(t)$, получаем новые уравнения динамики состояний:

$$z(t+1) = Az(t) + u(t), \quad (4.2)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t) \quad (4.3)$$

с начальными условиями:

$$z(0) = x_1^0 - x_2^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

где $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$.

Найдем выражение для $u(t)$ из уравнения (4.2) и получим

$$u(t) = z(t+1) - Az(t), \quad (4.4)$$

а также

$$u(0) = z(1) - Az(0).$$

Подставляя эти выражения в $\sum_{t=0}^T \delta^t g_t(x(t), x(t+1))$, можно переписать функционал в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(z, x_2) = & c(z(1) - Az(0))^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t [c(z(t+1) - Az(t))^2] \\ & + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} [(z(t_j) + x_2(t_j) - s)^2 + (x_2(t_j) - s)^2] \\ & + \delta^T [(z(T) + x_2(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2]. \end{aligned}$$

Чтобы минимизировать $J(z, x_2)$ при заданных уравнениях (4.3) и (4.4), запишем функцию Лагранжа:

$$L(z, x_2, k) = J(z, x_2) + \sum_{t=1}^{T-1} k_t \left(x_2(t+1) - x_2(t) - \frac{a_2}{2} z(t) \right).$$

Условия оптимальности первого порядка: $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial z(t)} = 0$, $t = 1, \dots, T$ и $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial x_2(t)} = 0$, $t = 1, \dots, T$.

Сначала находим производные и записываем полученные уравнения:

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)),$$

$$t = 1, \dots, T-1, \quad t \neq t_j,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t))$$

$$+ \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \quad t = t_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad t \neq t_j,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)],$$

$$t = t_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

Далее запишем систему условий первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{\delta} (z(t) - Az(t-1)) - Ac(z(t+1) - Az(t)) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \\ t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\ \frac{c}{\delta} (z(t) - Az(t-1)) - Ac(z(t+1) - Az(t)) \\ + (z(t) + x_2(t) - s) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, t = t_j, j = 1, \dots, k, \\ c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, t = T, \\ k_{t-1} - k_t = 0, t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] - k_t + k_{t-1} = 0, t = t_j, j = 2, \dots, k, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} = 0, t = T, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

с начальными условиями $z(0) = x_1^0 - x_2^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Исключая k_t из системы (4.5), получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ac\delta z(t+1) + Bz(t-1) - Cz(t) - \frac{Ac}{\delta} z(t-2) = 0, t = 2, \dots, T-1, \\ Dz(t) - Ez(t-1) - A\delta cz(t+1) + \frac{Ac}{\delta} z(t-2) \\ = (a_2 - 1)\delta(x_2(t) - s) + x_2(t-1) - s, t = t_j, j = 2, \dots, k, \\ c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, t = T, \\ \left(\frac{c}{\delta} + A^2c\right)z(T-1) - \frac{Ac}{\delta}z(T-2) - \left(Ac - \frac{a_2\delta}{2}\right)z(T) = a_2(x_2(T) - s), \end{array} \right.$$

где $B = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c$, $C = Ac - c - A^2\delta c$, $D = c + A^2\delta c + \delta + Ac - \frac{a_2\delta}{2}$ и $E = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c + 1$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.1. Теорема 4.1 дает необходимые условия оптимального управления, когда игрок максимизирует (2.4) с заданными моментами проверки мнений. Так как рассматриваемая проблема задана в дискретном времени и имеет конечный горизонт планирования, то всегда можно найти моменты $t_1, t_2, \dots, t_k$ для заданного k , минимизирующие $J(u)$ на множестве $\{(t_1, \dots, t_k) : 1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T-1\}$. Алгоритм нахождения этого решения и численное моделирование представлены в следующем разделе.

5. Численное моделирование

5.1. Описание эксперимента

Опишем 6 наборов параметров для численного моделирования. Начальные параметры следующие: $a_1 = 0, 2$; $a_2 = 0, 8$; $\delta = 1$; $c =$

$0, 1; x_1(0) = 0, 9; x_2(0) = 0, 1; T = 10$. Эти параметры одинаковы во всех экспериментах (см. табл. 1). В экспериментах 1–3 при одинаковых целевых мнениях, мы изменяем только количество k , в которых происходят проверки мнений агентов. Изучается влияние k на траектории состояний и оптимальных управлений. Затем в экспериментах 4–6 мы сохраняем количество проверок из экспериментов 1–3 соответственно, но меняем целевое мнение для каждого эксперимента. Здесь мы также сравниваем влияние целевого мнения на траекторию состояний и оптимальных управлений.

Таблица 1. Параметры экспериментов

$s \setminus k$	3	4	5
0.4	Эксперимент 1 84 случая	Эксперимент 2 126 случаев	Эксперимент 3 126 случаев
0.5	Эксперимент 4 84 случая	Эксперимент 5 126 случаев	Эксперимент 6 126 случаев

5.2. Блок-схема эксперимента

Последовательность шагов для проведения эксперимента изображена на рис. 1. Приведем описание этих шагов:

1. *Задание параметров*: например, $a_1 = 0, 2; a_2 = 0, 8; \delta = 1; c = 0, 1; x_1(0) = 0, 9; x_2(0) = 0, 1; T = 10$.
2. *Задание целевых мнений*: $s = 0, 4$ (для экспериментов 1, 2, 3) или $s = 0, 5$ (для экспериментов 4, 5, 6).
3. *Определение моментов проверок*: $k = 3$ (для экспериментов 1 и 4), $k = 4$ (для экспериментов 2 и 5) и $k = 5$ (для экспериментов 3 и 6).
4. *Генерация множества моментов проверок*: для экспериментов 1 и 4, три момента времени выбираются из множества $\{1, \dots, 9\}$ для формирования множества $\{t_1, t_2, t_3\}$. Например, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$ и т.д. Всего задается 84 таких множества. Для экспериментов 2 и 5, из моментов $1, \dots, 9$, выбираются четыре элемента для формирования множества $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, например,

$\{1, 2, 3, 4\}$. Всего формируется 126 таких множеств. Для экспериментов 3 и 6 из моментов $1, \dots, 9$, выбирается пять элементов и формируется множество $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, например, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Всего определяется 126 таких множеств.

5. *Построение системы уравнений*: используем (4.1) из теоремы 4.1 и записываем систему уравнений.
6. *Последовательное введение множества моментов проверок*: подставить выбранные наборы моментов проверок в систему (4.1).
7. *Вычислить состояния и управления для всех моментов проверок*, решая систему (4.1).

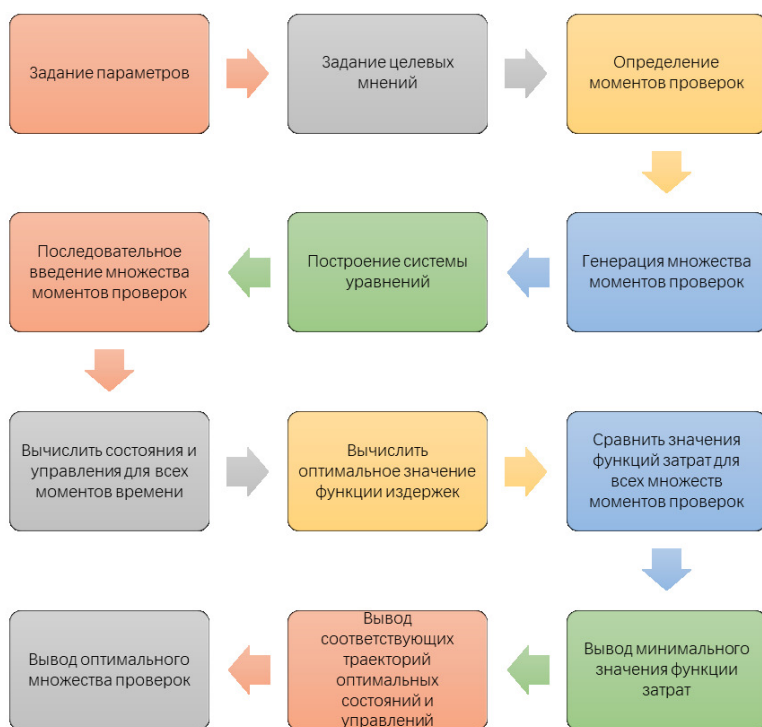


Рисунок 1. Блок-схема эксперимента.

8. *Вычислить оптимальное значение функции издержек*: подставить оптимальные значения управлений и состояний, вычисленные на предыдущем этапе в функцию затрат (2.4).
9. *Сравнить значения функций затрат для всех множеств моментов проверок*: в каждом эксперименте сравнить значения функции затрат для каждого множества моментов проверок.
10. *Вывод минимального значения функции затрат*.
11. *Вывод соответствующих траекторий оптимальных состояний и управлений*: по множеству моментов проверок, соответствующему минимальному значению издержек, вывести траектории состояний агентов и управления игрока.
12. *Вывод оптимального множества моментов проверок*: вывести множество моментов проверок, соответствующее минимальному значению функции стоимости.

5.3. Результаты численного моделирования

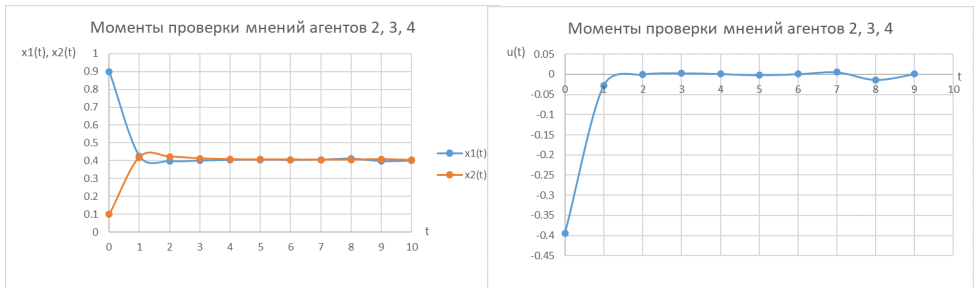
В этом разделе описаны траектории оптимальных состояний агентов и управлений игрока, а также его затраты, соответствующие каждому эксперименту. Опишем результаты численных экспериментов, объединяя их по количеству моментов наблюдения. Примеры 5.1–5.6 показывают результаты экспериментов 1-6 соответственно.

Пример 5.1. Пусть $k = 3$. Решаем задачу минимизации (2.4) относительно моментов $1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 9$. Целевое мнение игрока $s = 0,4$. Оптимальное решение состоит в том, что игрок проводит проверки мнений агентов в периоды 2, 3, 4. Оптимальные состояния и управления представлены в табл. 2, где жирным шрифтом выделены оптимальные моменты проверок. Затраты игрока при оптимальном поведении равны 0,016417.

Таблица 2. Траектории мнений агентов и оптимальных управлений в эксперименте 1

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.9000	0.4252	0.3977	0.4001	0.4045	0.4061
$x_2(t)$	0.1000	0.4200	0.4221	0.4123	0.4075	0.4063
$z(t)$	0.8000	0.0052	-0.0244	-0.0122	-0.0029	-0.0002
$u(t)$	-0.3948	-0.0270	0.0000	0.0032	0.0013	-0.0016
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4045	0.4056	0.4112	0.3974	0.3999	
$x_2(t)$	0.4062	0.4055	0.4056	0.4078	0.4036	
$z(t)$	-0.0017	0.0001	0.0056	-0.0105	-0.0038	
$u(t)$	0.0010	0.0055	-0.0133	0.0014		

В этом эксперименте траектории оптимальных состояний агентов и управлений игрока, полученные при выборе моментов проверок 2, 3, 4 за общее время $T = 10$, представлены на рис. 2.



(а) Оптимальные состояния агентов (б) Оптимальное управление $u(t)$
(голубой – $x_1(t)$, красный – $x_2(t)$)

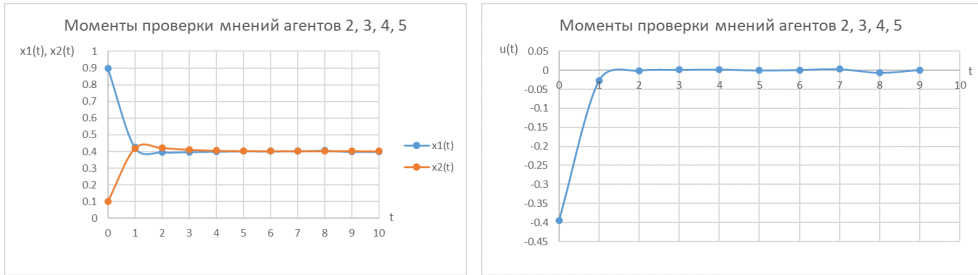
Рисунок 2. Эксперимент 1

Пример 5.2. Теперь $k = 4$ и целевое мнение $s = 0,4$. Оптимальным решением задачи является выбор моментов проверок мнений агентов в периоды 2, 3, 4, 5. Оптимальные состояния и управления представлены в табл. 3. Оптимальные затраты для игрока 0,016413. Отметим, что затраты для $k = 3$ немного больше, чем для $k = 4$.

Таблица 3. Траектории мнений агентов и оптимальных управлений в эксперименте 2

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.9000	0.4246	0.3965	0.3979	0.4002	0.4026
$x_2(t)$	0.1000	0.4200	0.4219	0.4117	0.4062	0.4038
$z(t)$	0.8000	0.0046	-0.0253	-0.0139	-0.0059	-0.0012
$u(t)$	-0.3954	-0.0276	-0.0012	0.0010	0.0018	-0.0005
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4022	0.4028	0.4057	0.3987	0.3999	
$x_2(t)$	0.4033	0.4029	0.4029	0.4040	0.4019	
$z(t)$	-0.0011	-0.0000	0.0028	-0.0053	-0.0019	
$u(t)$	0.0006	0.0028	-0.0067	0.0007		

Заметим также, что при добавлении еще одного момента проверки в оптимальном решении задачи при $k = 3$ к множеству $\{2, 3, 4\}$ добавляется новый дополнительный момент проверки $t = 5$. Оптимальное состояние и траектории управления представлены на рис. 3.



(а) Оптимальные состояния агентов (голубой – $x_1(t)$, красный – $x_2(t)$) (б) Оптимальное управление $u(t)$

Рисунок 3. Эксперимент 2

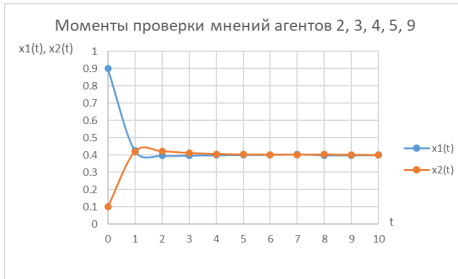
Пример 5.3. Теперь $k = 5$ и целевое мнение игрока $s = 0, 4$. Оптимальным решением задачи является выбор моментов проверок в периодах 2, 3, 4, 5, 9, т.е. игроку необходимо добавить дополнительную проверку мнений в $t = 9$ к множеству $\{2, 3, 4, 5\}$, которое является оптимальным в предыдущем примере с $k = 4$. Оптимальные состояния и управления представлены в табл. 4. Оптимальные затраты

игрока составляют 0,016405. Отметим, что затраты для $k = 4$ также немного больше, чем для $k = 5$.

Таблица 4. Трактории оптимальных состояний и управлений в эксперименте 3

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.9000	0.4245	0.3963	0.3974	0.3993	0.4009
$x_2(t)$	0.1000	0.4200	0.4218	0.4116	0.4059	0.4033
$z(t)$	0.8000	0.0045	-0.0255	-0.0142	-0.0066	-0.0023
$u(t)$	-0.3955	-0.0278	-0.0015	0.0005	0.0010	0.0006
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4018	0.4045	0.399	0.3987	0.3999	
$x_2(t)$	0.4023	0.4021	0.4031	0.4015	0.4004	
$z(t)$	-0.0005	0.0024	-0.0040	-0.0027	-0.0005	
$u(t)$	0.0026	-0.0052	-0.0007	0.0009		

Трактории мнений агентов и оптимального управления представлены на рис. 4.



(а) Оптимальные состояния агентов (голубой — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$) (б) Оптимальное управление $u(t)$

Рисунок 4. Эксперимент 3

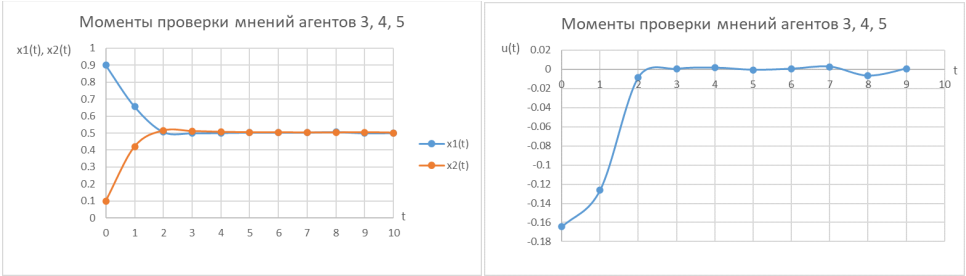
В примерах 5.1–5.3, когда целевое мнение равно $s = 0, 4$, оба агента быстро приходят к консенсусу под влиянием игрока. Управление игрока стабилизируется после периода 2. Также отметим, что нет существенного изменения влияния на мнение агентов после каждого увеличения на одну точку проверки мнений. Оптимальное значение издержек уменьшается с увеличением количества проверок.

Пример 5.4. Пусть $k = 3$ и $s = 0,5$. Игроку при оптимальном поведении необходимо проводить проверки в периоды 3, 4, 5. Траектория оптимального управления и соответствующие мнения агентов представлены в табл. 5. Оптимальные затраты игрока составляют 0,004486. Оптимальные траектории мнений агентов и управления игрока представлены на рис. 5.

Таблица 5. Траектории оптимальных состояний и управлений в эксперименте 4

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.9000	0.6556	0.5061	0.4986	0.5003	0.5026
$x_2(t)$	0.1000	0.4200	0.5142	0.5110	0.5060	0.5037
$z(t)$	0.8000	0.2356	-0.0082	-0.0124	-0.0057	-0.0012
$u(t)$	-0.1644	-0.1260	-0.0083	0.0005	0.0017	-0.0005

t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5021	0.5028	0.5056	0.4987	0.4999	
$x_2(t)$	0.5033	0.5028	0.5028	0.5039	0.5018	
$z(t)$	-0.0011	-0.0000	0.0028	-0.0053	-0.0019	
$u(t)$	0.0006	0.0028	-0.0067	0.0007		



(a) Оптимальные состояния агентов (голубой – $x_1(t)$, красный – $x_2(t)$) (b) Оптимальное управление $u(t)$

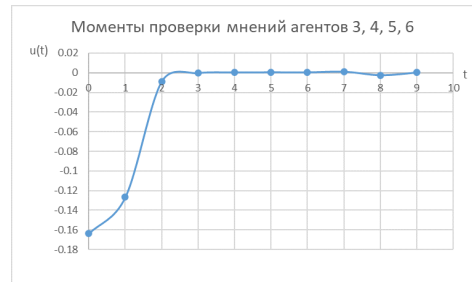
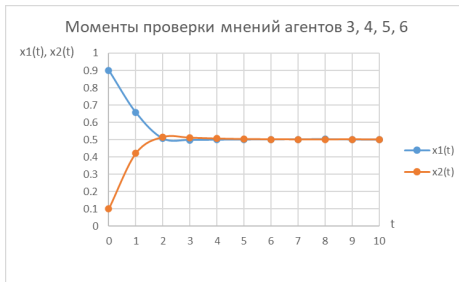
Рисунок 5. Эксперимент 4

Пример 5.5. Пусть $k = 4$ и $s = 0,5$. Оптимальным решением является проведение проверок в периоды 3, 4, 5, 6. Соответствующие мнения агентов и оптимальные управления игрока представлены в табл. 6. Оптимальные затраты игрока составляют 0,004472, которые

меньше, чем при $k = 3$. Легко заметить, что при $k = 4$ новый момент проверки $t = 6$ добавляется к множеству $\{3, 4, 5\}$, оптимальному при $k = 3$. Соответствующие мнения агентов и оптимальные управления изображены на рис. 6.

Таблица 6. Траектории оптимальных состояний и управлений в эксперименте 5

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.9000	0.6561	0.5057	0.4978	0.4987	0.4997
$x_2(t)$	0.1000	0.4200	0.5144	0.5109	0.5057	0.5029
$z(t)$	0.8000	0.2361	-0.0088	-0.0132	-0.0070	-0.0032
$u(t)$	-0.1639	-0.1268	-0.0088	-0.0004	0.0003	0.0005
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5005	0.5010	0.5021	0.4995	0.5000	
$x_2(t)$	0.5016	0.5011	0.5011	0.5015	0.5007	
$z(t)$	-0.0011	-0.0002	0.0010	-0.0020	-0.0007	
$u(t)$	0.0004	0.0011	-0.0025	0.0003		



(а) Оптимальные состояния агентов (голубой — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$) (б) Оптимальное управление $u(t)$

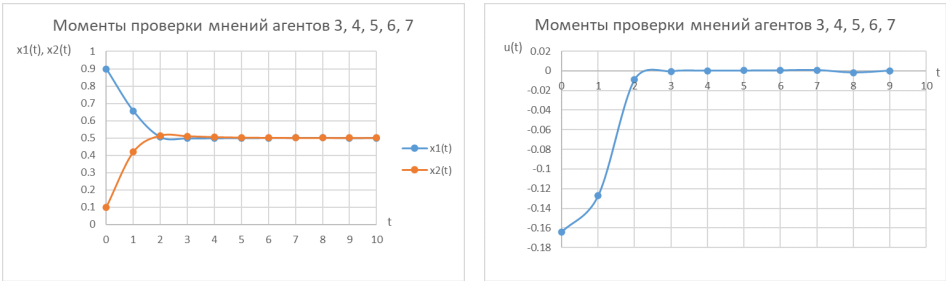
Рисунок 6. Эксперимент 5

Пример 5.6. Пусть $k = 5$ и $s = 0,5$. Игрок при оптимальном поведении проводит проверки в периоды 3, 4, 5, 6, 7. Мнения игроков и управления игрока представлены в табл. 7. Оптимальные издержки игрока равны 0,004474. В этом эксперименте состояния и управления представлены на рис. 7.

Таблица 7. Траектории оптимальных состояний и управлений в эксперименте 6

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.9000	0.6561	0.5056	0.4977	0.4986	0.4994
$x_2(t)$	0.1000	0.4200	0.5145	0.5109	0.5056	0.5028
$z(t)$	0.8000	0.2361	-0.0088	-0.0132	-0.0071	-0.0034
$u(t)$	-0.1639	-0.1269	-0.0088	-0.0005	0.0001	0.0002

t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5000	0.5006	0.5014	0.4996	0.5000	
$x_2(t)$	0.5015	0.5009	0.5008	0.5010	0.5005	
$z(t)$	-0.0015	-0.0003	0.0006	-0.0014	-0.0005	
$u(t)$	0.0004	0.0008	-0.0017	0.0002		



(а) Оптимальные состояния агентов (б) Оптимальное управление $u(t)$
(голубой – $x_1(t)$, красный – $x_2(t)$)

Рисунок 7. Эксперимент 6

В примерах 5.4–5.6 мы изменили целевое мнение с $s = 0,4$ на $s = 0,5$ по сравнению с примерами 5.1–5.3 при неизменных остальных параметрах модели. Как мы видим, мнения агентов достигли консенсуса. Управление игрока становится близким к нулю после периода 3. Хотя в последних трех экспериментах целевое мнение $s = 0,5$ немного больше целевого мнения в экспериментах 1–3 ($s = 0,4$), но можно заметить, что изменение целевого мнения позволяет агентам быстрее достигать консенсуса. При этом оптимальные издержки в последних трех экспериментах меньше, чем в экспериментах 5.1–5.3.

Замечание 5.1. Применение метода поиска оптимальных моментов

проверок мнений агентов затруднительно для задач с большим числом шагов. Но численные эксперименты подтверждают, что мнения агентов сходятся к консенсусу достаточно быстро, если граф связный, поэтому рассмотрение небольшого количества шагов может быть оправдано, а применение предложенного метода несложно с вычислительной точки зрения.

6. Заключение

В работе предложена модель динамики мнений в мультиагентной системе, на которую влияет игрок, т.е. отслеживает мнения агентов. Предложен алгоритм нахождения оптимальных моментов проверок мнений агентов и оптимальных воздействий (управлений) на определенного агента сети. При численном моделировании найдены оптимальные множества моментов проверок для различных целевых мнений. Получилось, что при увеличении количества проверок затраты игрока уменьшаются. Также отмечено, что если увеличить количество моментов проверок, сохраняя остальные параметры на прежнем уровне, оптимальное множество таких моментов для меньшего числа проверок включается во множество проверок, оптимальное при их большем числе. Предложенная модель может быть адаптирована и для большего количества агентов и игроков. Когда игроков больше одного, возникает конкуренция, если у игроков разные целевые мнения и разные цели в долгосрочной перспективе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albi G., Pareschi L., Zanella M. *On the Optimal Control of Opinion Dynamics on Evolving Networks*. In: Bociu, L., Désidéri J.A., Habbal, A. (eds) *System Modeling and Optimization*. Cham: Springer, 2015. P. 58–67.
2. Arthur D., Motwani R., Sharma A., Xu Y. *Pricing Strategies for Viral Marketing on Social Networks*. In: Leonardi S. (eds.) *Internet and Network Economics*. Heidelberg: Springer, 2009. P. 101–112.
3. Dechert, D. *Optimal control problems from second-order difference*

- equations* // Journal of Economic Theory. 1978. V.19. No 1. P. 50–63.
4. Gao J., Parilina E.M. *Average-oriented opinion dynamics with the last moment of observation* // Control Processes and Stability. 2021. V. 8, no. 1. P. 505–509.
 5. Gao J., Parilina E.M. *Opinion control problem with average-oriented opinion dynamics and limited observation moments* // Contributions to Game Theory and Management. 2021. V. 14. P. 103–112.
 6. González-Sánchez D., Hernández-Lerma O. *Discrete-time stochastic control and dynamic potential games: the Euler-Equation approach*. Springer Science & Business Media, 2013.
 7. González-Sánchez D., Hernández-Lerma O. *On the Euler equation approach to discrete-time nonstationary optimal control problems* // Journal of Dynamics & Games. 2014. V. 1, no. 1. P. 57.
 8. Jiang H., Mazalov V.V., Gao H., Wang C. *Opinion Dynamics Control in a Social Network with a Communication Structure* // Dynamic Games and Applications. 2021. P. 1–23.
 9. Liang Y., Wang B. *Robust mean field social optimal control with applications to opinion dynamics*. In: 2019 IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA), 2019. P. 1079–1084.
 10. Mazalov V., Parilina E.M. *The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics* // Mathematics. 2020. V. 8, no. 3. P. 355.
 11. Rogov M.A., Sedakov A.A. *Coordinated Influence on the Opinions of Social Network Members. Automation and Remote Control* // Automation and Remote Control. 2020. V. 81, no. 3. P. 528–547.
 12. Veetaseveera J., Varma V.S., Morarescu I.-C. *A Dynamic Game Formulation for Control of Opinion Dynamics over Social Networks*. In: Lasaulce S., Mertikopoulos P., Orda A. (eds.)

Network Games, Control and Optimization. Cham: Springer, 2021. P. 252–260.

13. Wang M., Liang D., Xu Z. *Consensus achievement strategy of opinion dynamics based on deep reinforcement learning with time constraint* // Journal of the Operational Research Society. 2021. P. 1–15.

OPINION DYNAMICS IN MULTIAGENT SYSTEMS WITH OPTIMAL CHOICE OF OPINION VERIFICATION MOMENTS

Jingjing Gao, Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, PhD student,
(st081293@student.spbu.ru),

Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Dr.Sc., professor
(e.parilina@spbu.ru).

Abstract: In this paper, we consider a model of opinion dynamics in the social network, that is a multiagent system with finite number of agents. There exists a center of influence on agent's opinion by choosing control, which is an influence level at every time period. In the model, center's costs are represented by a linear-quadratic function of a state variable and its controls. The center of influence aims to choose a finite number of opinion verification moments to compare agents' opinion with the target one. We provide a solution of this dynamic problem. In the numerical simulations, we show how to find optimal opinion verification moments, corresponding optimal state trajectories and controls.

Keywords: opinion dynamics, social network, linear-quadratic costs, optimal opinion verification moments.