

УДК 519.83

ББК 22.1

НАПАДЕНИЕ ПРОТИВ ЭШЕЛОНИРОВАННОЙ ОБОРОНЫ

ВЛАДИМИР В. МОРОЗОВ*

МГУ имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
vmorosov@mail.ru

Рассматривается модель «нападение-оборона», в которой защита на каждом пункте обороны располагает несколькими рубежами и использует целераспределение своих сил по средствам нападения. В роли критерия эффективности нападения используется средний ущерб, наносимый защите силами нападения, прорвавшимися через все пункты обороны. Решаются задачи оптимизации распределения средств защиты по рубежам обороны и нахождения оптимальных стратегий сторон в антагонистической игре.

Ключевые слова: модель «нападение-оборона», антагонистическая игра, значение игры, оптимальная стратегия игрока, целераспределение.

Поступила в редакцию: 29.09.21 *После доработки:* 20.10.22 *Принята к публикации:* 12.12.22

1. Введение

Модель «нападение-оборона» изучалась многими авторами. Отметим следующие работы. Блэккет [7] дал общее определение игры. Явные формулы решений в смешанных стратегиях построены для моделей Гросса [9], Гермейера [3,2] и их обобщения [4].

В последние десятилетия, после некоторого затишья, наблюдается рост интереса к моделям класса «нападение – оборона». Это связано с их применением к исследованию атак и защиты компьютерных сетей, как например, в работах [8, 12]. Пауэлл в [13] и Халлер в [10] рассматривают модели децентрализованной защиты. В [6] рассмотрена модель, в которой сеть испытывает каскадные бои в зависимости от типов атак и вложения ресурсов в защиту. В [11] предложены условия, при которых два союзника добровольно делятся ресурсами при противостоянии общему противнику на двух независимых фронтах.

В работе [5] исследована модель с эшелонированной обороной, в которой вероятности поражения защитой единиц нападения на рубежах пункта прорыва предполагались равными. В настоящей работе эти вероятности предполагаются возрастающими в зависимости от номера рубежа. Найдены формулы для оптимального распределения средств защиты по рубежам обороны и для соответствующего минимума среднего количества средств нападения, прорвавшихся через все рубежи заданного пункта. На основе этого результата сформулирована и решена антагонистическая игра распределения ресурсов сторон по пунктам, в которой нападение стремится максимизировать величину суммарного ущерба, наносимого защите силами нападения, прорвавшимися через все пункты.

2. Оптимизация распределения сил обороны по рубежам

Пусть нападение выделяет $A > 0$ средств для прорыва через некоторый пункт обороны. Защита, имея информацию о A , располагает средствами в количестве $B > 0$, которые она распределяет по m рубежам обороны в соответствии с вектором

$$z = (z_1, \dots, z_m) \in Z = \left\{ z \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{j=1}^m z_j \leq B \right\}.$$

На j -м рубеже обороны каждая единица средств защиты может воздействовать на r единиц средств нападения с вероятностью их поражения p_j . Предположим, что $0 < p_1 < \dots < p_m < 1$. Положим $q_j = 1 - p_j$, $j = 1, \dots, m$. Будем считать, что на каждую единицу средств нападения может воздействовать только одна единица средств защиты.

Пусть A_{j-1} – среднее количество средств нападения, прорвавшихся к j -му рубежу ($A_0 = A$). Тогда на этом рубеже средства защиты воздействуют на $\min(A_{j-1}, rz_j)$ средств нападения. Будем говорить о точном целераспределении, если $A_{j-1} = rz_j$. Через j -й рубеж прорвется в среднем

$$A_j = A_{j-1} - p_j \min(A_{j-1}, rz_j) = \max(q_j A_{j-1}, A_{j-1} - p_j rz_j).$$

средств нападения. Заметим, что функция $A_m = A_m(z)$ выпуклая. Рассмотрим следующую задачу минимизации

$$f(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{z \in Z} A_m(z) = A_m(z^*). \quad (2.1)$$

Если $p_j \equiv p$, $q = 1 - p$, то $f(A, B) = \max(q^m A, A - prB)$ (см. [5]). Для неравных p_j определим величины

$$Q_j = \prod_{l=1}^j q_l, \quad j = 1, \dots, m, \quad P_j = 1 + \sum_{l=j}^{m-1} \prod_{s=j}^l q_s, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Также для удобства положим $P_m = Q_0 = 1$, $P_{m+1} = p_0 = 0$.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие свойства последовательностей $\{Q_j\}$ и $\{P_j\}$:*

- (i) $1 - p_j P_{j+1} > 0$, $j = 1, \dots, m$;
- (ii) $P_j > P_{j+1}$, $j = 1, \dots, m$;
- (iii) $(1 - p_j P_{j+1})Q_j > (1 - p_{j+1} P_{j+2})Q_{j+1}$, $j = 1, \dots, m-1$.

Доказательство. (i) Заметим, что $P_j = 1 + q_j P_{j+1}$, $j = 1, \dots, m$. Будем использовать индукцию. При $j = m$ и $j = m-1$ неравенство, очевидно, выполнено. Предположим, что $1 - p_{j+1} P_{j+2} > 0$, $j < m-2$, и докажем, что $1 - p_j P_{j+1} > 0$. Поскольку $p_j < p_{j+1}$, имеем

$$1 - p_j P_{j+1} > 1 - p_{j+1} P_{j+1} = 1 - p_{j+1}(1 + q_{j+1} P_{j+2}) = q_{j+1}(1 - p_{j+1} P_{j+2}) > 0.$$

(ii) Неравенство $P_j = 1 + q_j P_{j+1} > P_{j+1}$ следует из (i).

(iii) Доказываемое неравенство эквивалентно следующему

$$1 - p_j P_{j+1} > (1 - p_{j+1} P_{j+2})q_{j+1} = q_{j+1} - p_{j+1}(P_{j+1} - 1) = 1 - p_{j+1} P_{j+1},$$

которое вытекает из условия $p_j < p_{j+1}$. □

Утверждение 2.1. Пусть $z^* \in Z$ – оптимальное решение задачи (2.1), удовлетворяющее условию $z_j^* \leq A_{j-1}^*/r$, где A_j^* – соответствующее z^* среднее количество средств нападения, прорвавшихся через j -й рубеж, $j = 1, \dots, m$, $A_0^* = A$. Тогда при $A < rB/P_1$ защита осуществляет на всех рубежах точное целераспределение:

$$z_j^* = \frac{A_{j-1}^*}{r} = \frac{Q_j A}{r q_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad f(A, B) = Q_m A.$$

Если $rB/P_k \leq A < rB/P_{k+1}$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, то защита распределяет свои силы, начиная с k -го рубежа:

$$z_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad z_k^* = \frac{rB - P_{k+1}A}{r(1 - p_k P_{k+1})} > 0, \quad A_k^* = \frac{A - p_k rB}{1 - p_k P_{k+1}},$$

$$z_j^* = \frac{(A - p_k rB)Q_{j-1}}{r(1 - p_k P_{k+1})Q_k}, \quad j = k+1, \dots, m, \quad f(A, B) = \frac{(A - p_k rB)Q_m}{(1 - p_k P_{k+1})Q_k}.$$

Если $A \geq rB$, то защита отводит все свои силы на последний рубеж: $z_j^* = 0$, $j = 1, \dots, m-1$, $z_m^* = B$, $f(A, B) = A - p_m rB$. Минимум в задаче (2.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(A, B) &= \max_{0 \leq j \leq m} \frac{(A - p_j rB)Q_m}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} = \\ &= \max \left[A Q_m, \max_{1 \leq j \leq m} \frac{(A - p_j rB)Q_m}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доказательство. Заметим, что оптимальное решение z^* задачи (2.1), удовлетворяющее неравенствам $z_j^* \leq A_{j-1}^*/r$, $j = 1, \dots, m$, всегда найдется, поскольку при $z_j^* > A_{j-1}^*/r$ средства защиты в количестве $z_j^* - A_{j-1}^*/r$ не взаимодействуют с нападением и их можно не использовать. При этом $A_j^* = A_{j-1}^* - p_j A_{j-1}^* = q_j A_{j-1}^*$, $j = 1, \dots, m$.

Покажем, что в случае $z_j^* > 0$, $j < m$, необходимо выполнено $z_{j+1}^* = A_j^*/r$. В самом деле, если $z_{j+1}^* < A_j^*/r$, то, уменьшая z_j^* и одновременно увеличивая z_{j+1}^* на малое $\varepsilon > 0$, получим, что через $(j+1)$ -й рубеж прорвется в среднем $A_{j+1}^* + \varepsilon r(p_j - p_{j+1}) < A_{j+1}^*$ средств нападения, а через m -й рубеж – менее A_m^* этих средств, что противоречит оптимальности z^* .

Отсюда следуют формулы для z_j^* , $j = 1, \dots, m$. Ограничимся их выводом в одном случае, когда $z_j^* = 0$, $j = 1, \dots, k-1$, $z_k^* > 0$. Тогда необходимо выполнены равенства

$$A_k^* = A - p_k r z_k^*, \quad z_{k+1}^* = \frac{A_k^*}{r}, \quad z_{k+2}^* = \frac{A_k^* q_{k+1}}{r}, \dots, \quad z_m^* = \frac{A_k^*}{r} \prod_{j=k+1}^{m-1} q_j,$$

$$\sum_{j=k}^m z_j^* = B, \quad f(A, B) = A_k^* \prod_{j=k+1}^m q_j = \frac{A_k^* Q_m}{Q_k}.$$

Из этой системы находим A_k^* и z_j^* , $j = k, k+1, \dots, m$. При этом

$$z_k^* = \frac{rB - P_{k+1}A}{r(1 - p_k P_{k+1})} \in \left(0, \frac{A}{r}\right] \Leftrightarrow \frac{rB}{P_k} \leq A < \frac{rB}{P_{k+1}}.$$

Выведем формулу (2.2). Пусть выполнены неравенства $rB/P_k \leq A < rB/P_{k+1}$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Докажем, что в этом случае максимум в правой части (2.2) достигается при $j = k$ и равен $f(A, B)$. Покажем, что при $j < k$ выполнено неравенство

$$\frac{A - p_j r B}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} \leq \frac{A - p_k r B}{(1 - p_k P_{k+1})Q_k} = f(A, B). \quad (2.3)$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & A \left(\frac{1}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} - \frac{1}{(1 - p_k P_{k+1})Q_k} \right) \leq \\ & \leq rB \left(\frac{p_j}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} - \frac{p_k}{(1 - p_k P_{k+1})Q_k} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

По свойству (iii) и из неравенства $p_j < p_k$ следует, что обе части неравенства (2.4) отрицательны. Поэтому, заменяя в его правой части rB на, вообще говоря, большее число AP_k и сокращая обе части на A , получим неравенство

$$\frac{1 - p_j P_k}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} \leq \frac{1 - p_k P_k}{(1 - p_k P_{k+1})Q_k}. \quad (2.5)$$

из которого следует (2.3). Для доказательства неравенства (2.5) покажем, что его левая часть монотонна по $j < k$, т.е.

$$\frac{1 - p_j P_k}{(1 - p_j P_{j+1})Q_j} \leq \frac{1 - p_{j+1} P_k}{(1 - p_{j+1} P_{j+2})Q_{j+1}}.$$

Заметим, что

$$(1 - p_{j+1}P_{j+2})q_{j+1} = q_{j+1} - p_{j+1}(P_{j+1} - 1) = 1 - p_{j+1}P_{j+1}.$$

Поэтому последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$\frac{1 - p_j P_k}{1 - p_j P_{j+1}} \leq \frac{1 - p_{j+1} P_k}{1 - p_{j+1} P_{j+1}},$$

эквивалентному неравенству $P_k \leq P_{j+1}$ и верному по свойству (ii).

Аналогично доказывается неравенство (2.3) при $j > k$. В самом деле, в этом случае обе части неравенства (2.4) положительны. Заменяя в нем rB на меньшее число AP_{k+1} получим неравенство (2.5), в котором вместо P_k фигурирует P_{k+1} и которое справедливо в силу неравенства $P_{j+1} < P_{k+1}$. $\square$

Замечание 2.1. При $A < rB/P_1$ имеем $z_1^* + \dots + z_m^* = P_1 A/r < B$. В этом случае оптимальное решение z^* не единственно, поскольку избыточное количество средств $B - P_1 A/r$ защита может произвольно распределить по рубежам обороны. При $A \geq rB/P_1$ оптимальное решение задачи (2.1) единственно.

Замечание 2.2. В предельном случае $p_j \equiv p$ утверждение 2.1 остается справедливым. Здесь

$$P_j = 1 + q + \dots + q^{m-j} = \frac{1 - q^{m-j+1}}{p}, \quad 1 - p_j P_{j+1} = q^{m-j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $rB/P_k \leq A < rB/P_{k+1}$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, то

$$f(A, B) = A_m(z^*) = \frac{(A - p_k rB)Q_m}{(1 - p_k P_{k+1})Q_k} = A - prB.$$

Но для $z^{(m)} = (0, \dots, 0, B)$ также имеем $A_m(z^{(m)}) = A - prB$. Поэтому в рассматриваемом случае множество всех оптимальных решений задачи (2.1) является отрезком $[z^*, z^{(m)}]$.

3. Исследование игровой модели

Имеется n пунктов возможного прорыва средств нападения. На i -м пункте имеется m_i рубежей обороны, а единица защиты может

воздействовать на r_i единиц нападения. При этом на j -м рубеже этого пункта защита уничтожает нападение с вероятностью p_{ij} . Пусть

$$0 < p_{i1} < p_{i2} < \dots < p_{im_i} < 1, \quad q_{ij} = 1 - p_{ij}, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Положим

$$Q_{ij} = \prod_{l=1}^j q_{il}, \quad P_{ij} = 1 + \sum_{l=j}^{m_i-1} \prod_{s=j}^l q_{is}, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad P_{im_i} = 1, \quad P_{i,m_i+1} = 0.$$

Сначала нападение и защита независимо друг от друга выбирают стратегии $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ – распределения своих средств в количествах A и B по пунктам прорыва:

$$x \in X = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A \right\}, \quad y \in Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n y_i = B \right\}.$$

Затем на каждом i -м пункте защита получает информацию о средствах нападения x_i и оптимально распределяет свои средства y_i по рубежам обороны в соответствии с утверждением 2.1. В результате через i -й пункт в среднем прорвется

$$f_i(x_i, y_i) = \max \left[Q_{im_i} x_i, \max_{1 \leq j \leq m_i} \frac{(x_i - p_{ij} r_i y_i) Q_{im_i}}{(1 - p_{ij} P_{i,j+1}) Q_{ij}} \right]$$

средств нападения. Пусть функция выигрыша нападения равна

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_i, y_i),$$

где $\lambda_i > 0$ – величина ущерба, наносимого защите единицей нападения, прорвавшейся на i -м пункте. Без потери общности величины λ_i будем считать упорядоченными: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. В результате определили антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$. Займемся ее решением.

Функция $F(x, y)$ выпукла по совокупности переменных (x, y) . Поэтому функция минимума $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$ выпукла [4], а значение игры v равно минимаксу

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \max_{x \in X} F(x, y^0),$$

где y^0 – оптимальная минимаксная стратегия защиты. Оптимальная смешанная стратегия нападения $\pi^0 = (\pi_1^0, \dots, \pi_n^0)$ состоит в выборе концентрированного удара по i -му пункту $x^{(i)} = (0, \dots, 0, \underbrace{A}_i, 0, \dots, 0)$

с некоторой вероятностью π_i^0 , $\sum_{i=1}^n \pi_i^0 = 1$ [2].

Определим функции

$$g_i(y_i) = \lambda_i \max_{1 \leq j \leq m_i} \frac{(A - p_{ij} r_i y_i) Q_{im_i}}{(1 - p_{ij} P_{i,j+1}) Q_{ij}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq j \leq m_i} (c_{ij} - d_{ij} y_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

которые являются убывающими и выпуклыми. Из свойства (iii), справедливого для последовательности $(1 - p_{ij} P_{i,j+1}) Q_{ij}$, $j = 1, \dots, m_i$, вытекает, что $g_i(0) = \lambda_i A$, $i = 1, \dots, n$. Заметим, что $F(x^{(i)}, y) = \max[\lambda_i Q_{im_i} A, g_i(y_i)]$, $i = 1, \dots, n$. В силу сказанного нижнее и верхнее значения игры Γ представимы в виде

$$\underline{v} = \max_{x \in X} W(x) = \max_{1 \leq i \leq n} W(x^{(i)}) = \max \left[\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_{im_i} A, \max_{1 \leq i \leq n} g_i(B) \right].$$

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) = \max \left[\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_{im_i} A, \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} g_i(y_i) \right].$$

Отсюда следует, что минимаксная стратегия защиты y^0 является решением задачи

$$\min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} g_i(y_i) = \max_{1 \leq i \leq n} g_i(y_i^0).$$

В соответствии с принципом уравнивания Гермейера [3,1] для y^0 найдется такое $k \in \{1, \dots, n\}$, что справедлива следующая система относительно переменных C и y_i^0 , $i = 1, \dots, k$:

$$g_i(y_i^0) = c_{is_i} - d_{is_i} y_i^0 = C, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k y_i^0 = B, \quad C > g_{k+1}(0) = \lambda_{k+1} A.$$

При этом $y_i^0 = 0$, $i = k+1, \dots, n$. Если

$$\bar{v} = C \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_{im_i} A = \lambda_{i^0} Q_{i^0 m_{i^0}} A,$$

то $\underline{v} = \bar{v}$ и в игре Γ существует седловая точка в чистых стратегиях (i^0, y^0) . Пусть выполнено неравенство

$$C > \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_{im_i} A.$$

Оптимальную смешанную стратегию нападения будем искать вида $\pi^0 = (\pi_1^0, \dots, \pi_k^0, 0, \dots, 0)$, где $\pi_i^0 > 0$, $i = 1, \dots, k$. При этом пара (π^0, y^0) образует седловую точку функции

$$\Phi(\pi, y) = \sum_{i=1}^n \pi_i F(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^n \pi_i \max[\lambda_i Q_{im_i} A, g_i(y_i)]$$

на произведении $\Pi \times Y$, где $\Pi = \{\pi \in \mathbb{R}_+^n | \pi_1 + \dots + \pi_n = 1\}$. Подберем π_i^0 , $i = 1, \dots, k$, таким образом, чтобы минимаксная стратегия y^0 минимизировала функцию $\Phi(\pi^0, y)$ по $y \in Y$. Заметим, что отрицательные величины $-d_{is_i}$, $i = 1, \dots, k$, являются субпроизводными функций $g_i(y_i)$ в точках y_i^0 . Определим π_i^0 , $i = 1, \dots, k$, и величину μ :

$$\pi_i^0 = \frac{\mu}{d_{is_i}}, \quad i = 1, \dots, k, \quad \mu = \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{d_{ls_l}} \right)^{-1}.$$

Поскольку $\mu > 0$, $\pi_i^0 > 0$, $i = 1, \dots, k$, $\pi_i^0 = 0$, $i = k+1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \pi_i^0 (F(x^{(i)}, y) - F(x^{(i)}, y^0)) = \sum_{i=1}^k \pi_i^0 (F(x^{(i)}, y) - g_i(y_i^0)) \geq \\ & \geq \sum_{i=1}^k \pi_i^0 (g_i(y_i) - g_i(y_i^0)) \geq \sum_{i=1}^k \pi_i^0 (-d_{is_i})(y_i - y_i^0) = -\mu \sum_{i=1}^k (y_i - y_i^0) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $y \in Y$ выполнено неравенство

$$\Phi(\pi^0, y) \geq \Phi(\pi^0, y^0) = \sum_{i=1}^k \pi_i^0 g_i(y_i^0) = \sum_{i=1}^k \pi_i^0 C = \bar{v}.$$

Следовательно, π^0 – оптимальная смешанная стратегия нападения.

Пример 3.1. Пусть $n = 3$, $m_i = 3$, $i = 1, 2, 3$, $A = 100$, $B = 250$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.9$, $\lambda_3 = 0.8$, $r_1 = 1.7$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1.2$. Вероятности поражения зададим матрицей

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Здесь с точностью до двух знаков в дробной части числа

$$\underline{v} = 12, \quad v = \bar{v} = 31.29, \quad y^0 = (71.63, 93.19, 85.18), \quad \pi^0 = (0.26, 0.28, 0.46).$$

Пусть z_{ij}^0 – оптимальное количество средств, выделяемое защитой на j -й рубеж i -го пункта, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, если нападение все силы направляет на i -й пункт. Тогда

$$(z_{ij}^0) = \begin{pmatrix} 0 & 25.61 & 46.02 \\ 0 & 0 & 93.19 \\ 0 & 3.69 & 81.49 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A > y_i^0$, $i = 1, 2, 3$, на каждом пункте защита готовится к взаимодействию с превосходящими силами нападения. Вследствие этого она не взаимодействует с противником на первых рубежах.

4. Заключение

В работе рассмотрена модель эшелонированной обороны, обобщающая классические модели игры полковника Блотто. Вначале стороны распределяют свои силы по пунктам, не имея информации о действиях противника. Затем защита, получив полную информацию о средствах нападения, оптимально распределяет свои силы по рубежам обороны. Единица средств защиты способна воздействовать на несколько единиц средств нападения с вероятностью их уничтожения, возрастающей в зависимости от номера рубежа обороны.

Функцией выигрыша нападения является средняя величина ущерба, наносимого защите прорвавшимися силами. Как и в классических моделях, оптимальная стратегия нападения состоит в нанесении концентрированного удара по пункту, выбираемому в соответствии вероятностным распределением. Готовясь к отражению подобных ударов, защита в зависимости от соотношения сил может не использовать первые линии обороны, отходя на более подготовленные рубежи. В работе оптимальные стратегии сторон находятся с помощью принципа уравнивания, либо представлены в виде явных формул. Дальнейшее исследование модели может быть продолжено при условии более сложного целераспределения со стороны защиты, например, когда несколько единиц ее средств способны воздействовать на одну единицу средств нападения.

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту, существенно расширившему обзор литературы и предложившему несколько улучшений текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций*. М.: Издательский центр «АКАДЕМИЯ», 2008.
2. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики*. М.: МАКС-Пресс, 2008.
3. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, 1971.
4. Огарышев В.Ф. *Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса* // Журн. выч. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 1. С. 59–70.
5. Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. *Простейшая модель эшелонированной противоздушной обороны* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3. С. 83–94.
6. Acemoglu D., Malekian A., Ozdaglar A. *Network security and contagion* // Journal of Economic Theory. 2016. V. 166. P. 536–585.
7. Blackett D.W. *Some Blotto games* // Naval Research Logistic Quarterly. 1954. V. 1. № 1. P. 55–60.
8. Clark D.J., Konrad K.A. *Asymmetric conflict: Weakest link against best shot* // Journal of Conflict Resolution. 2007. V. 51. N. 3. P. 457–469.
9. Gross O., Wagner R. *A continuous colonel Blotto game* // U.S. air force Project RAND, research memorandum – 408. 1950.
10. Haller H., Hoyer B. *The common enemy effect under strategic network formation and disruption* // Journal of Economic Behavior and Organization. 2019. V. 162. P. 146–163.
11. Kovenock D., Roberson B. *Coalitional Colonel Blotto Games With Application to the Economics of Alliances* // Journal of Public Economic Theory. 2012. V. 14. N. 4. P. 653–676.
12. Kovenock D., Roberson B. *The Optimal Defense of Networks of Targets* // Economic Inquiry. 2018. V. 56. N. 4. P. 2195–2211.

13. Powell R. *Defending against terrorist attacks with limited resources* // American Political Science Review. 2007. V. 101. N. 3. P. 527–541.

ATTACK AGAINST LAYERED DEFENSE

Vladimir V. Morozov, Lomonosov Moscow State University,
Cand.Sc., associated professor (vmorosov@mail.ru).

Abstract: The "attack-defense" model is considered, in which the defense party at each point of defense has several lines and uses the target allocation of its forces. The problem of minimizing the mean quantity of attack forces breaking through the defense lines is solved in explicit formulae. Algorithm of finding a solution of the zero-sum damage game is developed.

Keywords: "attack-defense" model, target allocation, zero-sum game, optimal strategies, value of the game.