

УДК 517.977

ББК 22.35

ЗАДАЧА ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДВУХ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ*

НИКОЛАЙ Н. ПЕТРОВ

ЕЛЕНА С. МОЖЕГОВА

Удмуртский государственный университет

426034, Ижевск, ул. Университетская, 1

e-mail: kma3@list.ru, mozhegovalena@yandex.ru

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух убегающих в заданной временной шкале. Предполагается, что убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого многогранного множества. Преследователи используют контрстратегии на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений каждого из участников — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начало координат. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего

©2022 Н.Н. Петров, Е.С. Можегова

* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010 и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00293.

двумя преследователями или поимка двух убегающих. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, убегающий, преследователь, временная шкала.

Поступила в редакцию: 31.05.22 *После доработки:* 23.10.22 *Принята к публикации:* 12.12.22

1. Введение

Одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр является разработка методов решения задач конфликтного взаимодействия групп преследователей и убегающих [1-3,7]. Б. Олбах и С. Хилгер в работах [8,13] предложили подход к исследованию дифференциальных и разностных уравнений с единых позиций. Оказывается, что некоторым результатам, полученным отдельно для каждой из этих теорий, можно придать больший характер общности, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замнутых подмножествах $\mathbb{R}$, названных временными шкалами. Временные шкалы находят свое применение при построении различных математических моделей [9,10]. Неантагонистическая игра N лиц во временной шкале рассматривалась в работе [14]. Достаточные условия поимки одного убегающего в задаче простого группового преследования в заданной временной шкале получены в работе [4]. В работе [5] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы жестко скоординированных убегающих в заданной временной шкале, где были получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Задача о многократной поимке заданного числа убегающих во временных шкалах, при условии, что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, движения игроков являются простыми, рассматривалась в [15].

В данной работе в заданной временной шкале рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух убегающих, использующих одно и то же управление, при условии, что

убегающие не покидают пределы выпуклого многогранного множества. Вводится новое условие поимки. Считается, что поимка произошла, если либо какого-то убегающего ловят два различных преследователя, либо найдутся два преследователя такие, что один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Получены достаточные условия поимки.

2. Вспомогательные определения и факты

В данном разделе будут изложены базовые факты из теории временных шкал. Все приводимые ниже результаты могут быть найдены, например, в работах [11,12].

Определение 2.1. *Непустое замкнутое подмножество $T \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup_{t \in T} t = +\infty$, называется временной шкалой.*

Определение 2.2. *Пусть T — временная шкала. Функция $\sigma : T \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\}$$

называется функцией сдвига.

Определение 2.3. *Функция $f : T \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -дифференцируемой в точке $t \in T$, если существует число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что неравенство*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in T \cap W$.

Число γ в этом случае называется Δ -производной функции f в точке t . Δ -производная функции f в точке t будет обозначаться $f^\Delta(t) = \gamma$.

Определение 2.4. *Функция $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ называется Δ -дифференцируемой в точке $t \in T$, если все функции $f_1, \dots, f_n$ являются Δ -дифференцируемыми в точке t .*

Пусть T — временная шкала, $E \subset T$. Обозначим $R(E) = \{t \in E \mid \sigma(t) > t\}$. Тогда множество $R(E)$ не более чем счетно.

Определение 2.5. Множество $E \subset T$ называется Δ -измеримым, если множество

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{t \in R(E)} (t, \sigma(t))$$

измеримо по Лебегу.

Определение 2.6. Функция $f : T \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -измеримой на Δ -измеримом множестве E , если функция $\tilde{f}$ вида

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)), \quad t_i \in R(E) \end{cases}$$

измерима на множестве $\tilde{E}$.

Определение 2.7. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}^1$, $E \subset T$ называется Δ -интегрируемой на Δ -измеримом множестве E , если функция $\tilde{f}$ интегрируема по Лебегу на множестве $\tilde{E}$. Если f является Δ -интегрируемой на множестве E , то определим $\int_E f(s) \Delta s$, полагая

$$\int_E f(s) \Delta s = \int_{\tilde{E}} f d\mu,$$

где μ — мера Лебега.

3. Постановка задачи

Пусть задана некоторая временная шкала T , $t_0 \in T$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, 2)$ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и два убегающих E_1, E_2 с законами движения вида

$$x_i^\Delta = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \quad (3.1)$$

$$y_j^\Delta = v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V. \quad (3.2)$$

Здесь $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leq 1\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I, j \in J$. Дополнительно предполагается, что убегающие E_1, E_2 в процессе игры не покидают пределы выпуклого множества D с непустой внутренностью вида

$$D = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, y) \leq \mu_j, j = 1, \dots, r\},$$

где $p_1, \dots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \dots, \mu_r$ — вещественные числа, (a, b) — скалярное произведение. Считаем, что $D = \mathbb{R}^k$ при $r = 0$.

Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (3.1), (3.2) получим систему

$$z_{ij}^{\Delta} = u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v \in V. \quad (3.3)$$

Δ -измеримую функцию $v : T \rightarrow \mathbb{R}^k$ назовем допустимой, если $v(t) \in V$, $y_j(t) \in D$ для всех $t \in T, j \in J$. Здесь $y_j(t)$ — решение задачи Коши (3.2) с заданной функцией $v(\cdot)$.

Предысторией функции v в момент $t \in T$ будем называть сужение функции v на $[t_0, t) \cap T$. Обозначим $z^0 = \{z_{ij}^0 \mid i \in I, j \in J\}$ — вектор начальных позиций.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 3.1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i , если определено отображение U_i^0 , ставящее в соответствие начальным позициям z^0 , моменту $t \in T$ и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_1, E_2 Δ -измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(z^0, t, v_t(\cdot))$ со значениями в V .

Определение 3.2. В игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T_0] \cap T$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) найдутся номера $l, m \in I$, ($m \neq l$), $j \in \{1, 2\}$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$ такие, что $z_{lj}(\tau_1) = 0$, $z_{mj}(\tau_2) = 0$;
- б) найдутся номера $l, m \in I$, ($m \neq l$), моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$ такие, что $z_{l1}(\tau_1) = 0$, $z_{m2}(\tau_2) = 0$.

Замечание 3.1. Условие поимки означает, что либо два каких-то преследователя осуществляют поимку одного убегающего, либо один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Такая ситуация может возникнуть, если система состоит из двух блоков и

для того, чтобы ее вывести из строя, нужно либо уничтожить один из блоков, либо повредить оба блока.

4. Вспомогательные результаты

Определение 4.1. [6] Векторы $a_1, a_2, \dots, a_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m.$$

Обозначим через $\text{Int } X$, со X соответственно внутренность, выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 4.1. [6] Векторы $a_1, a_2, \dots, a_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда

$$0 \in \text{Intco} \{a_1, \dots, a_m\}.$$

Лемма 4.1. Пусть $a_1, \dots, a_m, c, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для всех $l \in J = \{1, \dots, m\}$ имеет место включение

$$0 \in \text{Intco} \{a_j \mid j \in J, j \neq l, c, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда для любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ существует число $\mu > 0$, что для всех $l \in J_1 = \{1, \dots, m+2\}$ наборы векторов $\{a_j \mid j \in J_1, j \neq l, p_1, \dots, p_r\}$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, где $a_{m+1} = b_1 + \mu c$, $a_{m+2} = b_2 + \mu c$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда существуют $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ такие, что для каждого $\mu > 0$ найдется номер $l(\mu) \in J_1$ для которого набор векторов $\{a_j \mid j \in J_1, j \neq l, p_1, \dots, p_r\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Поэтому в силу теоремы 1

$$0 \notin \text{Intco} \{a_i \mid i \in J_1, i \neq l(\mu), p_1, \dots, p_r\}.$$

Следовательно, существуют последовательность $\{\mu_s\}$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mu_s = +\infty$ и номер $l \in J_1$ для которых для всех s верно

$$0 \notin \text{Intco} \{a_i \mid i \in J_1, i \neq l, p_1, \dots, p_r\}, \quad (4.1)$$

где $a_{m+1} = b_1 + \mu_s c$, $a_{m+2} = b_2 + \mu_s c$. Из (4.1) следует, что существует последовательность $\{q_s\}$, $q_s \in \mathbb{R}^k$, $\|q_s\| = 1$ такая, что

$$(a_i, q_s) \leq 0 \text{ для всех } i \in J, i \neq l, (p_1, q_s) \leq 0, \dots, (p_r, q_s) \leq 0.$$

Из последовательности $\{q_s\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Считаем, что последовательность $\{q_s\}$ сама сходится к вектору q . Тогда $\|q\| = 1$.

Если $l \in J$, то имеем

$$(a_i, q_s) \leq 0, i \in J, i \neq l, (b_1 + \mu_s c, q_s) \leq 0, (b_2 + \mu_s c, q_s) \leq 0, \\ (p_1, q_s) \leq 0, \dots, (p_r, q_s) \leq 0.$$

Отсюда получаем, что справедливы неравенства

$$(a_i, q) \leq 0, i \in J, i \neq l, (q, c) \leq 0, (p_1, q) \leq 0, \dots, (p_r, q) \leq 0.$$

Это означает, что $0 \notin \text{Intco} \{a_i \mid i \in J, i \neq l, c, p_1, \dots, p_r\}$, что противоречит условию леммы.

Если $l = m + 1$, то имеем

$$(a_i, q_s) \leq 0, i \in J, (b_2 + \mu_s c, q_s) \leq 0, (p_1, q_s) \leq 0, \dots, (p_r, q_s) \leq 0.$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$(a_i, q) \leq 0, i \in J, (q, c) \leq 0, (p_1, q) \leq 0, \dots, (p_r, q) \leq 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма доказана. $\square$

Введем следующие обозначения.

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \\ K(t) = \int_{t_0}^t \Delta s, \quad \Omega(J) = \{(i_1, i_2) \mid i_1, i_2 \in J, i_1 \neq i_2\},$$

где J — конечное множество натуральных чисел.

Лемма 4.2. Пусть $m \geq 2$, $a_1, \dots, a_m, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для всех $l \in J = \{1, \dots, m\}$ выполнено включение

$$0 \in \text{Intco} \{a_i \mid i \in J, i \neq l, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда

$$\delta = \min_{v \in V} \max \left\{ \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(a_i, v), (p_1, v), \dots, (p_r, v) \right\} > 0.$$

Доказательство. Предположим, что $\delta = 0$. Следовательно, существует $v_0 \in V$ такой, что

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(a_i, v_0) \leq 0, (p_1, v_0) \leq 0, \dots, (p_r, v_0) \leq 0.$$

Из последних соотношений следует, что для всякого $\Lambda \in \Omega(J)$ найдется номер $i_\Lambda \in \Lambda$ для которого $\lambda(a_\Lambda, v_0) = 0$. Из свойств функции λ следует [2], что $\|v_0\| = 1$ и поэтому равенство $\lambda(a_\Lambda, v_0) = 0$ равносильно условию $(a_\Lambda, v_0) \leq 0$.

Возьмем $\Lambda_1 = \{1, 2\}$. Найдется $i_1 \in \Lambda_1$ для которого $(a_{i_1}, v_0) \leq 0$. Рассмотрим $\Lambda_2 = \Lambda_1 \setminus \{i_1\} \cup \{3\}$. Найдется $i_2 \in \Lambda_2$ для которого $(a_{i_2}, v_0) \leq 0$. Продолжая этот процесс дальше, получим, что для множества $\Lambda_{m-1} = \Lambda_{m-2} \setminus \{i_{m-2}\} \cup \{m\}$ найдется номер $i_{m-1} \in \Lambda_{m-1}$ для которого $(a_{i_{m-1}}, v_0) \leq 0$.

Тем самым, получили, что $0 \notin \text{Intco}\{a_{i_1}, \dots, a_{i_{m-1}}, p_1, \dots, p_r\}$, что противоречит предположению леммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $m \geq 2$, $a_1, \dots, a_m, p_1 \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для всех $l \in J = \{1, \dots, m\}$ выполнено включение

$$0 \in \text{Intco}\{a_i \mid i \in J, i \neq l, p_1\}.$$

Тогда существует момент $\tau \in T$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся номера $r, q \in J$, такие, что

$$\int_{t_0}^{\tau} \lambda(a_r, v(s)) \Delta s \geq 1, \quad \int_{t_0}^{\tau} \lambda(a_q, v(s)) \Delta s \geq 1.$$

Доказательство. Из условия леммы и леммы 4.2 следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\min_{v \in V} \max \left\{ \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(a_i, v), (p_1, v) \right\} \geq \delta.$$

Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция — управление убегающих. Для каждого $t \in T$ определим множества

$$T_1(t) = \{t \in T \mid (p_1, v(t)) \geq \delta\}, \quad T_2(t) = \{t \in T \mid (p_1, v(t)) < \delta\}.$$

Так как $(p_1, y(t)) \leq \mu_1$ для всех $t \in T$, то справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^t (p_1, v(s)) \Delta s \leq \mu_0 = \mu_1 - (p_1, y^0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_0 &\geq \int_{t_0}^t (p_1, v(s)) \Delta s \geq \delta \int_{T_1(t)} \Delta s - \int_{T_2(t)} \Delta s, \\ K(t) &= \int_{T_1(t)} \Delta s + \int_{T_2(t)} \Delta s.\end{aligned}$$

Отсюда получаем справедливость неравенства

$$\int_{T_2(t)} \Delta s \geq \frac{\delta K(t) - \mu_0}{1 + \delta}. \quad (4.2)$$

Далее имеем

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^t \lambda(a_j, v(s)) \Delta s \geq \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \int_{t_0}^t \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s)) \Delta s. \quad (4.3)$$

Для любых неотрицательных чисел γ_Λ ($\Lambda \in \Omega(J)$) имеет место неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \gamma_\Lambda \geq \frac{1}{C_m^2} \sum_{\Lambda \in \Omega(J)} \gamma_\Lambda, \quad \text{где } C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \int_{t_0}^t \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s)) \Delta s &\geq \frac{1}{C_m^2} \int_{t_0}^t \sum_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s)) \Delta s \geq \\ &\geq \frac{1}{C_m^2} \int_{t_0}^t \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s)) \Delta s \geq \frac{1}{C_m^2} \int_{T_2(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s)) \Delta s.\end{aligned}$$

Следовательно, из (4.2), (4.3) получаем

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^t \lambda(a_j, v(s)) \Delta s \geq \frac{\delta}{C_m^2} \int_{T_2(t)} \Delta s \geq \frac{\delta}{C_m^2} \cdot \frac{\delta K(t) - \mu_0}{1 + \delta}.$$

Так как $\lim_{t \in T, t \rightarrow +\infty} K(t) = +\infty$, то из последнего неравенства следует, что существует $\tau \in T$ для которого справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{\tau} \lambda(a_j, v(s)) \Delta s \geq 1,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. $\square$

5. Достаточные условия поимки

Теорема 5.1. Пусть $r = 1$ и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$ такое, что для всех $l \in I_0$

$$0 \in \text{Intco} \{z_{i1}^0, z_{i2}^0 \mid i \in I_0, i \neq l, p_1\}. \quad (5.1)$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Доказательство. Из условия (5.1) следует [1], что для всех $l \in I_0$ набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0 \mid i \in I_0, i \neq l, p_1\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Обозначим $c = y_1^0 - y_2^0$. Так как

$$z_{i2}^0 = x_i^0 - y_2^0 = x_i^0 - y_1^0 + c = z_{i1}^0 + c,$$

то для всех $l \in I_0$ положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор $\{z_{i1}^0 \mid i \in I_0, i \neq l, c, p_1\}$. Считаем, что $I_0 = \{1, \dots, n-2\}$. Из леммы 4.1 следует, что существует число $\mu > 0$ такое, что для всех $l \in I$ векторы $\{w_i^0 \mid i \in I, i \neq l, p_1\}$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, где

$$w_i^0 = \begin{cases} z_{i1}^0, & \text{если } i \in I_0, \\ z_{n-12}^0 + \mu c, & \text{если } i = n-1, \\ z_{n2}^0 + \mu c, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы 4.1 получаем, что для всех $l \in I$

$$0 \in \text{Intco} \{w_i^0 \mid i \in I, i \neq l, p_1\}.$$

Из лемм 4.2, 4.3 следует, что число

$$T_0 = \min\{t \mid t > t_0, t \in T, \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega(I)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^t \lambda(w_j^0, v(s)) \Delta s \geq 1\}$$

конечно. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^t \lambda(w_i^0, v(s)) \Delta s.$$

Предпишем преследователю P_i строить свое управление следующим образом. Если в момент $t \in T$ выполняется неравенство $h_i(t) \geq 0$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(w_i^0, v(t))w_i^0.$$

Если $\tau \in T$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau) = 0$, то считаем, что $\lambda(w_i^0, v(t)) = 0$ для всех $t \geq \tau$.

Пусть $\tau \in T$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau) < 0$, а для всех $t \in T$, $t < \tau$ выполняется неравенство $h_i(t) > 0$. Определим число

$$\tau_i^* = \sup\{t \in T \mid h_i(t) > 0\}.$$

Тогда $(\tau_i^*, \tau) \cap T = \emptyset$. Действительно, если бы существовал момент $t \in (\tau_i^*, \tau) \cap T$, то выполнялось бы неравенство $h_i(t) > 0$, что невозможно в силу определения числа τ_i^* . Полагаем в этом случае

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \lambda^*(w_i^0, v(\tau))w_i^0, \text{ где}$$

$$\lambda^*(w_i^0, v(\tau)) = \frac{h_i(\tau_i^*)}{\sigma(\tau_i^*) - \tau_i^*} = \frac{h_i(\tau_i^*)}{\tau - \tau_i^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\lambda^*(w_i^0, v(\tau)) \leq \lambda(w_i^0, v(\tau))$ и поэтому $u_i(\tau) \in V$. Тогда

$$1 - \int_{t_0}^{\tau_i^*} \lambda(w_i^0, v(s)) \Delta s - \int_{\tau_i^*}^{\tau} \lambda^*(w_i^0, v(s)) \Delta s =$$

$$= h_i(\tau_i^*) - \int_{\tau_i^*}^{\tau} \frac{h_i(\tau_i^*)}{\tau - \tau_i^*} \Delta s = 0.$$

Тогда из определения управлений убегающих и системы (3.3) следует, что для всех $t \in [t_0, \hat{T}] \cap T$ справедливы равенства

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_i(t), i \in I_0,$$

$$z_{n-12}(t) = z_{n-12}^0 h_{n-1}(t) - \mu c(1 - h_{n-1}(t)),$$

$$z_{n2}(t) = z_{n2}^0 h_n(t) - \mu c(1 - h_n(t)).$$

Из леммы 4.3 и определения управлений убегающих следует, что существуют номера $l, m \in I$ такие, что $h_l(T_0) = 0$, $h_m(T_0) = 0$.

При этом возможны следующие варианты.

1. $l, m \in I_0$. В этом случае преследователи P_l, P_m осуществляют поимку убегающего E_1 , что означает, что в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

2. $l \in I_0, m \in \{n-1, n\}$. Это означает, что преследователь P_l осуществляет поимку убегающего E_1 . Пусть $m = n-1$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$. Докажем, что

$$0 \in \text{Intco} \{z_{i2}(T_0) \mid i \in I, i \neq l, p_1\}. \quad (5.2)$$

Так как для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ справедливы следующие равенства

$$z_{i1}(T_0) = z_{i1}^0 h_i(T_0), \quad z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c = z_{i1}^0 h_i(T_0) + z_{i2}^0 - z_{i1}^0,$$

то

$$z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, \quad z_{i2}^0 = z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}.$$

Из условия теоремы следует, что набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0 \mid i \in I_0, i \neq l, p_1\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$.

Следовательно, положительный базис $\mathbb{R}^k$ образуют векторы

$$\left\{ \frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)} \mid i \in I_0, i \neq l, p_1 \right\}.$$

Из условия $h_i(T_0) \in (0, 1]$ для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ получаем, что положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i1}(T_0), z_{i2}(T_0) \mid i \in I_0, i \neq l, p_1\}. \quad (5.3)$$

Из равенства $z_{n-12}(T_0) = \mu(y_2(T_0) - y_1(T_0))$ получаем, что для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} z_{i1}(T_0) &= x_i(T_0) - y_1(T_0) = x_i(T_0) - y_2(T_0) + y_2(T_0) - y_1(T_0) = \\ &= z_{i2}(T_0) + \frac{1}{\mu} z_{n-12}(T_0). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из (5.3), (5.4) следует, что положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i2}(T_0) \mid i \in I_0 \cup \{n-1\}, i \neq l, p_1\}.$$

Из последнего соотношения и теоремы 4.1 вытекает (5.2). Принимая момент T_0 за начальный и используя теорему работы [4], получаем, что преследователи $P_i, i \in I, i \neq l$ осуществляют поимку убегающего E_2 . Следовательно, в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

3. $l = n - 1$, $m = n$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$, $z_{n2}(T_0) = -\mu c$. Отметим, что для всех $i \in I_0$ $z_{i1}(T_0) = z_{i1}^0 h_i(T_0)$. Докажем, что в этом случае для всех $s \in I$ выполняется включение

$$0 \in \text{Intco} \{z_{i2}(T_0) \mid i \in I, i \neq s, p_1\}. \quad (5.5)$$

Предположим, что существует $s \in I$, для которого

$$0 \notin \text{Intco} \{z_{i2}(T_0) \mid i \in I, i \neq s, p_1\}. \quad (5.6)$$

Возможны следующие ситуации.

3.1. $s \in I_0$. Из (5.6) следует, что набор $\{z_{i2}(T_0) \mid i \in I, i \neq s, p_1\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Поэтому существует единичный вектор $q \in \mathbb{R}^k$, для которого $(q, z_{i2}(T_0)) \leq 0$ для всех $i \in I, i \neq s$ и $(p_1, q) \leq 0$.

Из условия $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$ получаем, что $(q, c) \geq 0$. Так как для всех $i \in I_0$ $z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c$, то для всех $i \in I_0, i \neq s$

$$(q, z_{i1}(T_0)) = (q, z_{i2}(T_0)) - (q, c) \leq 0.$$

Следовательно, $(q, z_{i1}^0) \leq 0$ для всех $i \in I_0, i \neq s$. Кроме того, из равенства

$$z_{i2}^0 = z_{i2}(T_0) + z_{i1}^0(1 - h_i(T_0))$$

и ранее доказанного получим, что $(q, z_{i2}^0) \leq 0$ для всех $i \in I, i \neq s$. Получили, что набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0 \mid i \in I_0, i \neq s, p_1\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$, что противоречит условию теоремы. Тем самым включение (5.5) доказано.

3.2. $s \in \{n-1, n\}$. Считаем, что $s = n$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта **3.1.**, получаем, что набор векторов $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0 \mid i \in I_0, p_1\}$ не образует положительного базиса $\mathbb{R}^k$, что противоречит условию теоремы. Тем самым включение (5.5) доказано.

Принимая момент времени T_0 за начальный и используя результаты работы [5], получим, что найдутся преследователи $P_q, P_r, q \neq r$, осуществляющие поимку убегающего E_2 . Теорема доказана. $\square$

Теорема 5.2. Пусть существуют $p \in \mathbb{R}^k, p \neq 0, \mu \in \mathbb{R}^1, I_0 \subset I, |I_0| = n-2$ такие что $D \subset \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p, z) \leq \mu\}$ и для всех $l \in I_0$

$$0 \in \text{Intco} \{z_{i1}^0, z_{i2}^0 \mid i \in I_0, i \neq l, p\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

Справедливость данной теоремы сразу следует из теоремы 5.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов*. Ижевск: Изд. Удмурт. ун-та, 2009.
2. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
4. Петров Н.Н. *Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах*// Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 249–258.
5. Петров Н.Н. *Об одной задаче преследования группы убегающих во временных шкалах*// Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. С. 163–171.
6. Петров Н. Н. *Об управляемости автономных систем*// Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
7. Чикрий А.А. *Конфликтно управляемые процессы*. Киев: Наук. думка, 1992.
8. Aulbach B., Hilger S. *Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale*// Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems. 1990. V. 59. P. 9–20.
9. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. *Impulsive Differential Equations and Inclusions*. New York: Hindawi Publishing, 2006.
10. Bohner M., Peterson A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Boston: Birkhauser, 2003.
11. Cabada A., Vivero D. R. *Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ -antiderivatives*// Mathematical and Computer Modelling. 2006. V. 43. № 1-2. P. 194–207.
12. Guseinov G.S. *Integration on time scales*// Journal of Math. Anal. Appl. 2003. V. 285. № 1. P. 107–127.

13. Hilger S. *Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus* // Results in Mathematics. 1990. V. 18. P. 18–56.
14. Martins N., Torres D. *Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales* // Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. V. 31, № 1. P. 23–37.
15. Petrov N.N. *Multiple Capture of a Given Number of Evaders in the Problem of Simple Pursuit with Phase Restrictions on Timescales* // Dyn. Games Appl. 2022. V. 12. № 2. P. 632–642.

SIMPLE PURSUIT PROBLEM WITH PHASE RESTRICTIONS OF TWO COORDINATED EVADERS ON TIME SCALES

Nikolai N. Petrov, Udmurt State University, Dr.Sc., professor
(kma3@list.ru),

Elena S. Mozhegova, Udmurt State University, post-graduate
student (mozhegovalena@yandex.ru).

Abstract: In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of a simple pursuit by a group of pursuers of two evaders is considered on a given time scale. It is assumed that all evaders use the same control and do not leave the convex polyhedral set. The pursuers use counter-strategies based on information about the initial positions and control history of the evaders. The set of admissible controls for each of the participants is a unit ball centered at zero, the target sets are the origin. The goal of the pursuers' group is the capture by two pursuers of at least one evader or the capture of two evaders. In terms of the initial positions and game parameters a sufficient capture condition has been obtained. The study uses the method of resolving functions as a basic one, which allows to obtain sufficient conditions for the solvability of the approach problem in some guaranteed time.

Keywords: differential game, group pursuit, evader, pursuer, time scale.