Математическая Теория Игр и её Приложения, т.14, в.4, с. 96–114

УДК 517.977
ББК 22.18

АНАЛИЗ МОДЕЛИ РОСТА С ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ CES-ФУНКЦИЕЙ

Анастасия А. Усова*
ИММ УрО РАН имени Н.Н. Красовского
620990, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16
e-mail: ausova@imm.uran.ru
Александр М. Тарасьев
ИММ УрО РАН имени Н.Н. Красовского,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: tam@imm.uran.ru

В работе рассматривается модель роста с производственной функцией постоянной эластичности, предельными случаями которой являются такие функции, как Кобба-Дугласа или Леонтьева. Инвестиционные показатели модели рассматриваются как управляющие параметры, которые выбираются с целью максимизации функционала качества. Формулируется задача оптимального управления с неограниченным горизонтом планирования. Применяя принцип максимума Понтрягина, строится гамильтониан и гамильтонова система, для которой проводится качественный анализ, доказывается существование и единственность стационарной точки, и приводится алгоритм ее поиска за счет решения нелинейного уравнения одной

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00105, https://rscf.ru/project/19-11-00105.

переменной. Стабилизация гамильтоновой динамики в окрестности положения равновесия осуществляется при помощи регулятора, существование которого гарантируется седловым характером стационарной точки. Приводится численный пример, иллюстрирующий аналитические результаты исследования.

Ключевые слова: стабилизация, нелинейный регулятор, гамильтонова система, производственная функция, CES-функция.

Поступила в редакцию: 20.11.22 *После доработки*: 10.12.22 *Принята к публикации*: 12.12.22

1. Введение

В работе изучается модель экономического роста, в которой зависимость выпуска от производственных факторов описывается при помощи производственной функции с постоянной эластичностью замещения (Constant Elasticity of Substitution — CES-функция). Данная функция включает в себя ряд широко используемых функций типа Кобба-Дугласа или Леонтьева, которые являются предельными случаями CES-функции. Исследование модели экономического роста, в которой рост факторов производства обусловлен прежде всего инвестициями, направленными в их развитие, а снижение — показателями износа, амортизации и/или размытия, приводит к решению задачи управления с неограниченным горизонтом планирования. В этой задаче инвестиции играют роль управляющих параметров, а в качестве фазовых переменных выступают факторы производства. Инвестиционный процесс оценивается интегральным индексом потребления логарифмического типа, учитывающим дисконтирующий фактор.

В общем виде данные модели освещаются во многих работах [1,4,5,9,11,12]. Их исследование осуществляется с применением принципа максимума Понтрягина [1,7] и приводит к анализу гамильтоновой функции, изучению ее наибольших по управлению значений, составлению гамильтоновой системы, ее стабилизации [9,10] и поиску решений. Данные модели применяются для анализа и прогноза экономического развития регионов и стран (например, США, Япония, Китай и других) [4,5,8,13,14], где зачастую связь между выпуском и факторами производства описывается производственной функцией Кобба-Дугласа, что обусловлено статистическим анализом данных по макроэкономическим показателям[1] (внутренний валовой продукт (ВВП), основной капитал и трудовые ресурсы) этих регионов.

Отталкиваясь от общей логики исследования моделей роста, в данной работе после описания самой модели осуществляется постановка соответствующей задачи управления, проводится анализ гамильтоновой функции и качественное исследование гамильтоновой системы и ее последующая стабилизация вблизи положения равновесия, которое, как будет показано, существует и единственно. Результаты численных экспериментов для двумерной модели роста приводятся в заключительной части статьи.

2. Модели роста и задача управления

2.1. Производственная функция

В предлагаемой работе изучается модель экономического роста, в которой связь между производственными факторами x_1, x_2 и выпуском y описывается производственной функцией с постоянной эластичностью замещения (CES-функцией)

$$y = f(x_1, x_2) = a\left(\alpha_1 x_1^{-\gamma} + \alpha_2 x_2^{-\gamma}\right)^{-\frac{\nu}{\gamma}}, \tag{2.1}$$

где параметр a есть общий фактор производительности, определяющий совокупное влияние всех возможных факторов на выпуск продукции, за исключением затрат на x_1 и x_2. Общая факторная производительность может рассматриваться как мера долгосрочных технологических изменений или технологической динамики. Положительные коэффициенты α_1 и α_2 определяют вклад каждого из факторов в выпуск y, выполняя роль весовых коэффициентов, сумма которых равна единице, то есть $\alpha_1+\alpha_2 = 1$. Параметр ν $(0 < \nu < 1)$ задает степень положительной однородности производственной функции, а именно

$$f(kx_1, kx_2) = a\left(\alpha_1(kx_1)^{-\gamma} + \alpha_2(kx_2)^{-\gamma}\right)^{-\frac{\nu}{\gamma}} = k^\nu f(x_1, x_2).$$

Параметр γ $(\gamma > -1)$ связан с показателем эластичности замещения σ, который означает, что эластичность пропорции аргументов

---

[1]Для модели развития ресурсозависимой экономики рассматривались такие макроэкономические показатели как ВВП, основной капитал и объемы потребления природных ресурсов по данным КНР.

функции по отношению к пропорции их предельных продуктов является неизменной при любых значениях аргументов, и определяется по формуле

$$\sigma = -\frac{d\left(\ln x_2/x_1\right)}{d\left(\ln \frac{df(x_1,x_2)}{dx_2} \Big/ \frac{df(x_1,x_2)}{dx_1}\right)} = \frac{1}{\gamma+1}.$$

Некоторые из известных производственных функций представляют собой частные или предельные случаи CES-функции. Например, функция Кобба–Дугласа $y = ax_1^{\alpha_1\nu}x_2^{\alpha_2\nu}$ является функцией с единичной эластичностью замещения ($\sigma = 1$ или $\gamma = 0$). Производственная функция Леонтьева $y = \min\{Ax_1, Bx_2\}$ обладает нулевой эластичностью замещения ($\sigma = 0$ или при $\gamma \to +\infty$).

Следует отметить, что модели экономического роста с производственной функцией Кобба-Дугласа хорошо изучены и для них построены оптимальные решения, доставляющие максимум логарифмическому индексу потребления интегрального типа (см., например, [2,3]). В данной работе представлен анализ задачи управления с производственной функцией постоянной эластичности замещения. В рамках принципа максимума Понтрягина [1] строится гамильтонова система и проводится ее качественный анализ. Обосновывается существование и единственность стационарной точки и выводятся соотношения для ее поиска через специально введенный параметр. В окрестности стационарной точки гамильтонова система стабилизируется и строятся субоптимальные решения.

2.2. Постановка задачи

Рассмотрим классическую модель экономического роста, в которой динамика основных производственных факторов, которыми являются капитал x_1 и трудовые ресурсы x_2, описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1 f(x) - (\delta+\lambda)x_1 \\ \dot{x}_2(t) = bu_2 f(x) - \lambda x_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Рост факторов производства x_1 и x_2 обусловлен инвестициями u_1, u_2, соответственно, и скорректирован на величину амортизации δ и/или размытия λ капитала. Производственные факторы предполагаются положительными величинами, и в начальный момент времени их значения известны $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = x^0$. Инвестиции определяются как доли выпуска $y = f(x), \quad x = (x_1, x_2)$, направляемые в повышение эффективности выбранных факторов производства. Инвестиционные составляющие u_1 и u_2 процесса рассматриваются в модели в качестве управляющих параметров и аффинным образом влияют на изменение факторов производства, при этом они удовлетворяют ограничениям

$$u = (u_1, u_2) \in [0, \bar{u}_1] \times [0, \bar{u}_2] = \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad 0 < \bar{u}_i < 1 \quad (i = 1, 2). \quad (2.3)$$

Функция полезности задана в виде интегрального индекса потребления $c\big(x(t), u(t)\big) = f(x(t))(1 - u_1(t))(1 - u_2(t))$, дисконтированного на бесконечном промежутке времени

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c\big(x(t), u(t)\big) dt. \quad (2.4)$$

За счет изменения инвестиционных компонент, направленных на повышение эффективности факторов производства, можно влиять на целевые показатели, в частности на тот, который выражается в данной модели функцией полезности (2.4). Следовательно, на основе описанной модели развития экономической системы можно сформулировать задачу управления, которая состоит *в максимизации функционала полезности* $J(\cdot)$ (2.4) *на траекториях динамической системы* (2.2)*, которые отвечают начальным условиям* $x(0) = x^0$*, а вектор управлений удовлетворяет ограничениям* $u \in \mathcal{U}$*.*

3. Исследование задачи

Используя принцип максимума Понтрягина [1,3], осуществляется анализ динамики и качественного поведения модельных трендов, включающий поиск стационарных уровней и построение управлений, стабилизирующих систему (2.2) вблизи положения равновесия.

Прежде всего, составим гамильтониан задачи управления

$$H(x, \psi, u) = \ln c(x, u) + \psi_1(f(x)u_1 - (\delta + \lambda)x_1) + \psi_2(bf(x)u_2 - \lambda x_2), \quad (3.1)$$

и найдем такое значение $\mathbf{u}$ управляющей переменной $u \in \mathcal{U}$, которое доставляет максимум гамильтониану. В силу строгой вогнутости гамильтоновой функции (3.1) по переменной u [3], лежащей в компакте $\mathcal{U}$, максимум гамильтониана достигается на следующих значениях управлений

$$\mathbf{u}_i = \begin{cases} 0, & (x,\psi) \in \Delta_1^i = \{b^{i-1}\psi_i f(x) \le 1\} \\ 1 - \dfrac{b^{1-i}}{\psi_i f(x)}, & (x,\psi) \in \Delta_2^i = \left\{1 \le b^{i-1}\psi_i f(x) \le \dfrac{1}{1-\bar{u}_i}\right\} \\ \bar{u}_i, & (x,\psi) \in \Delta_3^i = \left\{b^{i-1}\psi_i f(x) \ge \dfrac{1}{1-\bar{u}_i}\right\}, i = 1,2. \end{cases} \tag{3.2}$$

При этом максимизированный гамильтониан $\mathbf{H}(x,\psi) = H(x,\psi,\mathbf{u})$ при найденных управлениях есть гладкая функция своих аргументов, вогнутая по фазовым переменным [2,3].

Согласно принципу максимума, переходим к построению гамильтоновой системы по правилу

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{\partial \mathbf{H}(x,\psi)}{\partial \psi} \\ \dot{\psi} &= \rho\psi - \dfrac{\partial \mathbf{H}(x,\psi)}{\partial x}. \end{cases} \tag{3.3}$$

В каждой из девяти областей $D_{ij} = \Delta_i^1 \cap \Delta_j^2$ $(i,j \in \{1,2,3\})$ гамильтонова система имеет свою структуру, однако стационарная точка, удовлетворяющая условию $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, может располагаться лишь в областях с ненулевыми управлениями [3], то есть в областях $D_{ij} = \Delta_i^1 \cap \Delta_j^2$, где $i,j \in \{2,3\}$. Далее исследуется вопрос их существования.

3.1. Стационарная точка гамильтоновой системы

Переходя к качественному анализу гамильтоновой системы, прежде всего остановимся на вопросе существования стационарной точки. Для этого рассмотрим гамильтонову систему в области с непостоянными режимами управления $D_{22} = \Delta_2^1 \cap \Delta_2^2$, где

$$\Delta_2^i = \left\{(x,\psi) : 1 \le b^{i-1}\psi_i f(x) \le (1-\bar{u}_i)^{-1},\ i = 1,2\right\}.$$

Вычислим частные производные $f_i'(x) = \partial f(x)/\partial x_i$, $(i = 1,2)$ производственной функции $y = f(x)$ по фазовым переменным и представим их в нескольких формах

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{\alpha_1 \nu f(x)}{x_1^{\gamma+1}(\alpha_1 x_1^{-\gamma} + \alpha_2 x_2^{-\gamma})} = \frac{\alpha_1 \nu f(x)}{x_1(\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma})},\\
f_2'(x) &= \frac{\alpha_2 \nu f(x)}{x_2^{\gamma+1}(\alpha_2 x_1^{-\gamma} + \alpha_2 x_2^{-\gamma})} = \frac{\alpha_2 \nu f(x)}{x_2(\alpha_1 q^{-\gamma} + \alpha_2)}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Здесь использовались следующие вспомогательные величины

$$
q = x_1/x_2, \quad q_1 = f_1'/(\delta + \lambda + \rho) \quad q_2 = b f_2'/(\lambda + \rho). \tag{3.5}
$$

Замечание 3.1. Следует заметить, что стационарная точка гамильтоновой системы (3.3) может быть локализована не только в области переменных управлений D_{22}, но и в других областях с ненулевыми управлениями, *то есть* D_{ij} $(i, j = 2, 3)$. Однако принадлежность стационарной точки областям D_{23} или D_{32} требует выполнения дополнительных ограничений в виде равенства $q_1 + \bar{u}_2 q_2 = 1$ или $\bar{u}_1 q_1 + q_2 = 1$, соответственно. В противном случае в этих областях стационарной точки существовать не может, так как система нелинейных алгебраических уравнений не будет иметь допустимого решения, а именно такого вектора $(x^*, \psi^*)^\top \in \mathbb{R}^4$, у которого все координаты положительны.

Что касается области насыщенного управления D_{33}, то в ней стационарная точка может существовать в условиях

$$
\bar{u}_1 q_1 + \bar{u}_2 q_2 < 1, \; q_1 > 1 - \bar{u}_2 q_2, \; q_2 > 1 - \bar{u}_1 q_1
$$

и достаточно легко вычисляется явно

$$
\begin{aligned}
&x_1^* = \left(\frac{a \bar{u}_1}{\delta + \lambda} \left(\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}\right)^{-\frac{\nu}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad && \psi_1^* = \frac{\bar{u}_1 q_1}{x_1^*(\delta + \lambda)(1 - \bar{u}_1 q_1 - \bar{u}_2 q_2)},\\
&x_2^* = \left(\frac{a b \bar{u}_1}{\lambda} \left(\alpha_1 q^{-\gamma} + \alpha_2\right)^{-\frac{\nu}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}} \quad && \psi_2^* = \frac{\bar{u}_2 q_2}{x_2^* \lambda (1 - \bar{u}_1 q_1 - \bar{u}_2 q_2)}, \text{ где}\\
&q_1 = \frac{\delta + \lambda}{(\delta + \lambda + \rho)\, \bar{u}_1} \cdot \frac{\alpha_1 \nu}{\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}}, \quad && q_2 = \frac{\lambda}{(\lambda + \rho)\, \bar{u}_2} \cdot \frac{\alpha_2 \nu q^{\gamma}}{\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}},\\
&q = \frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{\lambda}{\delta + \lambda} \frac{\bar{u}_1}{b \bar{u}_2}.
\end{aligned}
$$

Поэтому далее остановимся на области переменного управления D_{22}.

В области D_{22} гамильтониан $H(x,\psi,u)$ (3.1) достигает максимума на управлениях $\mathbf{u}_i = 1 - b^{1-i}(\psi_i f(x))^{-1}$ $(i = 1, 2)$ и приобретает вид

$$H_{22}(x,\psi) = -\ln f(x) - \ln b - \ln\psi_1 - \ln\psi_2 + \\ + \psi_1\left(f(x) - (\delta+\lambda)x_1\right) + \psi_2\left(bf(x) - \lambda x_2\right) - 2.$$

Следовательно гамильтонова система имеет следующую структуру

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x) - (\delta+\lambda)x_1 - 1/\psi_1 \\ \dot{x}_2 &= bf(x) - \lambda x_2 - 1/\psi_2 \\ \dot{\psi}_1 &= \left(\delta+\lambda+\rho - f_1'(x)\right)\psi_1 - bf_1'(x)\psi_2 + f_1'(x)/f(x) \\ \dot{\psi}_2 &= -f_2'(x)\psi_1 + \left(\lambda+\rho - bf_2'(x)\right)\psi_2 + f_2'(x)/f(x). \end{cases} \tag{3.6}$$

В следующем утверждении рассматривается вопрос существования и единственности стационарной точки.

Утверждение 3.1. *В условиях, когда максимальный уровень инвестиций снизу ограничен величинами*

$$\bar{u}_1 \geq \frac{1-q_2}{q_1}, \qquad \bar{u}_2 \geq \frac{1-q_1}{q_2}, \quad \textit{где} \tag{3.7}$$

$$q_1 = 1 - \frac{(1-A)\alpha_2}{\alpha_1 q^{-\gamma} + \alpha_2}, \qquad q_2 = 1 - \frac{(1-B)\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}}, \tag{3.8}$$

$$A = 1 - \frac{\lambda\nu}{\lambda+\rho} \in (0,1), \qquad B = 1 - \frac{(\delta+\lambda)\nu}{\delta+\lambda+\rho} \in (0,1),$$

а параметр $q = x_1^*/x_2^*$ находится численно из решения нелинейного уравнения, зависящего от одной переменной q

$$\frac{\alpha_1 B + \alpha_2 q^{\gamma}}{\alpha_1 + \alpha_2 A q^{\gamma}} = Cq^{\gamma+1}, \quad C = \frac{\delta+\lambda+\rho}{\lambda+\rho}\cdot\frac{\alpha_2 b}{\alpha_1}, \tag{3.9}$$

стационарная точка системы (3.6) существует, единственна и вычисляется по формулам

$$x_1^* = \left(\frac{a\alpha_1\nu}{(\delta+\lambda+\rho)q_1}\left(\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}\right)^{-\frac{\nu+\gamma}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad \psi_1^* = \frac{q_1}{f(x^*)\left(q_1+q_2-1\right)},$$

$$x_2^* = \left(\frac{ab\alpha_2\nu}{(\lambda+\rho)q_2}\left(\alpha_1 q^{-\gamma} + \alpha_2\right)^{-\frac{\nu+\gamma}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}, \qquad \psi_2^* = \frac{q_2}{bf(x^*)\left(q_1+q_2-1\right)}.$$

Здесь $f(x^*)$ есть значение производственной функции (2.1), вычисленное в стационарной точке.

Доказательство. 1. Доказательство утверждения строится путем прямого вычисления стационарной точки системы (3.6), правые части которой приравниваются к нулю. Здесь процедуру решения упрощает тот факт, что вторые два уравнения линейны относительно сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2, что позволяет их выразить явно.

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{f(x)} \begin{pmatrix} \delta + \lambda + \rho - f_1'(x) & -bf_1'(x) \\ -f_2'(x) & \lambda + \rho - bf_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{bf(x)(q_1 + q_2 - 1)} \begin{pmatrix} bq_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где q_1 и q_2 определены в (3.5). В рамках условий (3.7) на максимальный уровень инвестиций $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ и ограничений на управления (2.3), получим

$$\frac{1 - q_2}{q_1} \leq \bar{u}_1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - q_2 < q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1 + q_2 - 1 > 0.$$

Следовательно, знаменатель в выражении (3.10) положителен, и для сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2 полученные выражения корректно определены. Эти же соображения указывают на невырожденность матрицы в формулах (3.10).

Подставляя полученные решения в первые два уравнения правых частей гамильтоновой системы (3.6), получаем

$$\frac{f(x)(q_1 + q_2 - 1)}{q_1} = f(x) - (\delta + \lambda)x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)(1 - q_2)}{q_1} = (\delta + \lambda)x_1, \tag{3.11}$$

$$\frac{bf(x)(q_1 + q_2 - 1)}{q_2} = bf(x) - \lambda x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{bf(x)(1 - q_1)}{q_2} = \lambda x_2. \tag{3.12}$$

Далее, используя соотношения (3.4), полученные равенства (3.11)-(3.12) и обозначения $A = 1 - \lambda\nu/(\lambda + \rho)$ и $B = 1 - (\delta + \lambda)\nu/(\delta + \lambda + \rho)$, находим

$$\frac{f(x)}{x_1 q_1} = \frac{\delta + \lambda + \rho}{\alpha_1 \nu}(\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}) = \frac{\delta + \lambda}{1 - q_2} \quad \Rightarrow \quad q_2 = 1 - \frac{(1 - B)\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 q^{\gamma}},$$

$$\frac{bf(x)}{x_2 q_2} = \frac{\lambda + \rho}{\alpha_2 \nu}(\alpha_1 q^{-\gamma} + \alpha_2) = \frac{\lambda}{1 - q_1} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1 - \frac{(1 - A)\alpha_2}{\alpha_1 q^{-\gamma} + \alpha_2}.$$

Таким образом, формулы (3.8) для q_1 и q_2 получены.
2. Следующим шагом находим параметр q (3.5). Пользуясь формулами (3.5), (3.4) вычисляем отношение q_1/q_2

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\lambda+\rho}{\delta+\lambda+\rho}\cdot\frac{\alpha_1}{b\alpha_2}q^{-\gamma-1} = \frac{1}{Cq^{\gamma+1}}$$

Тоже самое соотношение находим используя вычисленные ранее значения (3.8) для q_1 и q_2, что приводит нас к уравнению (3.9).

Исследуем уравнение (3.9). Рассмотрим два случая.
(i) Пусть $\gamma > 0$, тогда уравнение (3.9) приобретает вид

$$Q_l(q) = 1 - \frac{\alpha_1(1-AB)}{\alpha_1+\alpha_2 Aq^{\gamma}} = ACq^{\gamma+1} = Q_r(q), \quad q > 0. \tag{3.13}$$

Проанализируем это равенство, обозначив левую его часть $Q_l(q)$, а правую $Q_r(q)$. Обе функции строго монотонно возрастают при $q > 0$. Исходя из структуры $Q_l(q)$ левой части (3.13), очевидно, что ее значения заключены в интервале $(AB, 1)$. Границы этого интервала значений функция $Q_r(q)$ достигает единственный раз (в силу монотонного роста) соответственно в точках

$$\underline{q} = \left(\frac{B}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad \bar{q} = (AC)^{-\frac{1}{\gamma+1}}. \tag{3.14}$$

При этом $\underline{q} < \bar{q}$, так как по определению величин A, B и C справедливо неравенство $AB < 1$, и, следовательно, $B/C < 1/(AC)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $Q(q) = Q_r(q) - Q_l(q)$ на $[\underline{q}, \bar{q}]$.

$$Q(\underline{q}) = AB - 1 + \frac{\alpha_1(1-AB)}{\alpha_1+\alpha_2 A\underline{q}^{\gamma}} = -\frac{(1-AB)\alpha_2 A\underline{q}^{\gamma}}{\alpha_1+\alpha_2 A\underline{q}^{\gamma}} < 0$$

$$Q(\bar{q}) = 1 - 1 + \frac{\alpha_1(1-AB)}{\alpha_1+\alpha_2 A\bar{q}^{\gamma}} = \frac{\alpha_1(1-AB)}{\alpha_1+\alpha_2 A\bar{q}^{\gamma}} > 0$$

Таким образом, по теореме Больцано-Коши, корень уравнения (3.13) существует и лежит внутри отрезка $[\underline{q}, \bar{q}]$. Графически данный случай изображен на рис. 1.

(ii) Пусть $-1 < \gamma < 0$, тогда левая часть уравнения (3.9) приобретает вид

$$Q_l(q) = B + \frac{\alpha_2(1-AB)}{\alpha_1 q^{-\gamma}+\alpha_2 A} = Cq^{\gamma+1} = Q_r(q) \tag{3.15}$$

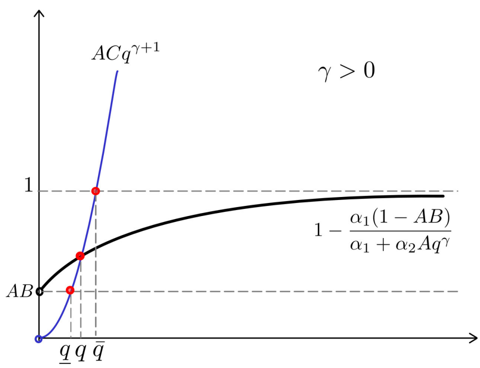

Рисунок 1. Корень уравнения (3.9) при $\gamma > 0$.

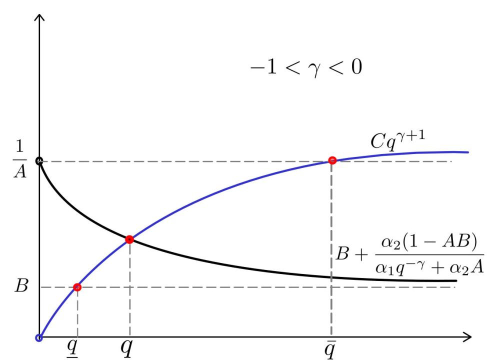

Рисунок 2. Корень уравнения (3.9) при $-1 < \gamma < 0$.

В этом случае, при $q > 0$ функция $Q_l(q)$ убывает от значения $1/A$, но не опускается ниже значения B, то есть ее значения заключены в диапазоне $(B, 1/A)$. При этом монотонно возрастающая правая функция достигает границ этого интервала в точках $\underline{q}$ и $\bar{q}$, которые определены в случае (i), рассмотренном выше.

Аналогично введем непрерывную функцию $Q(q) = Q_r(q) - Q_l(q)$ и рассмотрим ее на отрезке $[\underline{q}, \bar{q}]$.

$$Q(\underline{q}) = -\frac{\alpha_2(1-AB)}{\alpha_1\underline{q}^{-\gamma}+\alpha_2 A} < 0, \quad Q(\bar{q}) = \frac{\alpha_1(1-AB)}{A\left(\alpha_1+\alpha_2 A\left(\bar{q}\right)^{-\gamma}\right)} > 0$$

По теореме Больцано-Коши, корень уравнения (3.15) существует и лежит в интервале $(\underline{q}, \bar{q})$. На графике (см. рис. 2) схематично изображены правая и левая части уравнения (3.15), пересекающиеся в единственной точке q, расположенной правее точки $\underline{q}$ и левее $\bar{q}$.

Значит, уравнение (3.9) имеет единственное решение q, которое удовлетворяет оценке

$$\underline{q} = (B/C)^{\frac{1}{\gamma+1}} < q < \bar{q} = (AC)^{-\frac{1}{\gamma+1}}. \tag{3.16}$$

Следовательно существование и единственность стационарной точки системы (3.6) доказаны.

3. Последнее, в чем осталось убедиться, это принадлежность найденной стационарной точки области D_{22} переменных управлений. Ограничения в области D_{22} имеют вид.

$$1 \le f(x)\psi_1 \le (1-\bar{u}_1)^{-1}, \quad 1 \le bf(x)\psi_2 \le (1-\bar{u}_2)^{-1}.$$

Пользуясь полученными равенствами (3.10) для сопряженных переменных, имеем $b^{i-1}f(x)\psi_i = q_i/(q_1+q_2-1)$ $(i=1,2)$, следовательно справедливы оценки

$$\frac{q_i}{q_1+q_2-1} \le \frac{1}{1-\bar{u}_i} \quad \Rightarrow \quad 1-\bar{u}_i \le 1-\frac{1-q_{3-i}}{q_i} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_i \ge \frac{1-q_{3-i}}{q_i},$$

которые приводят к условиям (3.7), описанным в утверждении. Таким образом, утверждение доказано. □

Следствие 3.1. *В силу условий на параметры q_1 и q_2 в стационарной точке справедливы оценки для частных производных производственной функции*

$$f_1'(x^*) < \delta + \lambda + \rho, \quad bf_2'(x^*) < \lambda + \rho.$$

Доказательство. Действительно, из равенств (3.11)-(3.12) видно, что все сомножители в правой и левой частях равенств положительны. Таким образом, величины $1-q_1$ и $1-q_2$ также положительны, что, в силу определения (3.5) q_1 и q_2, и влечет требуемые оценки. □

Следствие 3.2. *Управления в стационарной точке вычисляются по формулам*

$$\mathbf{u}_1^* = \frac{(1-B)\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2 A q^{\gamma}}, \quad \mathbf{u}_2^* = \frac{(1-A)\alpha_2}{\alpha_1 B q^{-\gamma}+\alpha_2},$$

Доказательство. В области D_{22} управления вычисляются по формуле

$$\mathbf{u}_i = 1 - \frac{b^{1-i}}{\psi_i f(x)}, \quad i=1,2.$$

Подставляя в формулу найденные в Утверждении 3.1 стационарные значения величин ψ_i и $f(x)$, получим

$$\mathbf{u}_i^* = \frac{1-q_{3-i}}{q_i}, \quad i=1,2$$

И наконец, подстановка полученных выражений (3.8) для q_i доказывает следствие. □

Следствие 3.3. *Стационарная точка гамильтоновой системы принадлежит области переменных управлений D_{22}, если максимальные уровни $\bar{u}_i$ инвестиций превышают пороговые значения u_i^c, $\quad (i = 1, 2)$, отвечающие равенствам*

$$u_1^c = \begin{cases} \dfrac{(1-B)\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 A \underline{q}^{\gamma}}, & \gamma > 0; \\ \dfrac{(1-B)\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 A \bar{q}^{\gamma}}, & \gamma \in (-1, 0); \end{cases} \qquad u_2^c = \begin{cases} \dfrac{(1-A)\alpha_2}{\alpha_1 B \bar{q}^{-\gamma} + \alpha_2}, & \gamma > 0; \\ \dfrac{(1-A)\alpha_2}{\alpha_1 B \underline{q}^{-\gamma} + \alpha_2}, & \gamma \in (-1, 0). \end{cases}$$

Доказательство. Для принадлежности стационарной точки области D_{22} необходимо, чтобы стационарные управления $\mathbf{u}_i^*$ не превышали максимального уровня инвестиций $\bar{u}_i$, $\quad (i = 1, 2)$, то есть

$$\bar{u}_1 \geq \mathbf{u}_1^* = \frac{(1-B)\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 A q^{\gamma}}.$$

Очевидно, что при положительных значениях параметра γ полученное справа выражение как функция переменной q является убывающей, поэтому своего наибольшего значения она достигнет при наименьшем возможном своем значении $\underline{q}$ (3.14) (см. доказательство Утверждения 3.1). При отрицательных значениях параметра γ выражение в правой части неравенства как функция параметра q возрастает и не превосходит своего значения при $q = \bar{q}$ (3.14). Таким образом, руководствуясь этими соображениями, выбираем u_1^c, как указано в следствии, что гарантированно обеспечит нам выполнение неравенства $\mathbf{u}_1^* < u_1^c$. Значит, если максимальный уровень $\bar{u}_1$ инвестиций не ниже критического u_1^c, то одно из требований для принадлежности стационарной точки области переменных управлений D_{22} будет выполнено.

Используя подобные же рассуждения, получим аналогичные ограничения, влекущие выполнение требования для второй переменной управления, а именно

$$\bar{u}_2 \geq \mathbf{u}_2^* = \frac{(1-A)\alpha_2}{\alpha_1 B q^{-\gamma} + \alpha_2}.$$

Здесь при положительных значениях параметра γ правая часть неравенства является возрастающей функцией параметра q и, следовательно, не превышает значения при $q = \bar{q}$, которым ограничен данный параметр сверху. А при $\gamma \in (-1, 0)$ выражение в правой части неравенства убывает по q, и, как следствие, принимает наибольшее значение при наименьшем значении параметра $q = \underline{q}$. Наконец, выбирая u_2^c по формуле, указанной в следствии, мы гарантируем, что стационарный уровень $\mathbf{u}_2^*$ второго управления не превзойдет u_2^c, что, совместно с условиями на переменную управления u_1, обеспечит принадлежность стационарной точки области D_{22}. □

Замечание 3.2. В вышеизложенных доказательствах не оговаривался случай, когда $\gamma = 0$. При $\gamma = 0$ производственная функция превращается в степенную функцию типа Кобба-Дугласа, для которой аналогичная модель роста подробно изучена в работе [3].

3.2. Стабилизация гамильтоновой системы

В условиях существования и единственности стационарной точки осуществим процедуру стабилизации гамильтоновой системы (3.6), то есть построим такой регулятор $\widehat{u}$, который приводит систему (3.6) в стационарную точку.

Согласно работе [12] найденная стационарная точка имеет седловой характер. Это позволяет (см. [15]) построить нелинейный регулятор $\widehat{u}$, применение которого к системе (2.2) гарантирует ее асимптотическую устойчивость по первому приближению (то есть решение системы, отвечающее стационарному положению (x_1^*, x_2^*), будет асимптотически устойчиво).

Построение регулятора осуществляется в общем случае локально, в некоторой окрестности стационарной точки, поскольку и само понятие устойчивости носит локальный характер. Радиус окрестности зависит от конкретной задачи, а именно от динамики модельных переменных. Например, в монотонном случае (см. [1, Раздел 1.10]) можно вести речь о стабилизации системы всюду, где начальные условия отвечают ограничениям $\widehat{u}_i(x^0) \in [0, \bar{u}_i], \quad (i = 1, 2)$, которые характеризуют режим D_{22}.

Итак, выразим сопряженные переменные через фазовый вектор

$$\psi = \psi^* + X(x - x^*) = \widehat{\psi}(x). \tag{3.17}$$

Здесь используется матрица X, столбцы которой состоят из координат собственных векторов, отвечающих отрицательным собственным значениям. В рассматриваемой задаче отрицательных собственных значений будет ровно два (см. [15, Лемма 1]). Локальные представления (3.17) для сопряженных переменных ψ_1, ψ_2 подставляем в управления (3.2), отвечающие режиму D_{22} и, таким образом, получаем регулятор

$$\widehat{u}_i(x) = 1 - \frac{b^{i-1}}{\widehat{\psi}_i(x) f(x)}, \quad i = 1, 2. \tag{3.18}$$

Применяя построенный закон управления (3.18) к динамике производственных факторов (2.2), получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f(x) - (\delta + \lambda) x_1 - 1/\widehat{\psi}_1(x) \\ \dot{x}_2 & = b f(x) - \lambda x_2 - 1/\widehat{\psi}_2(x), \end{cases} \tag{3.19}$$

которая является устойчивой по первому приближению [15], то есть ее решения $x(t) = \widehat{x}(t)$ асимптотически сходятся к стационарному положению x^* (3.1).

Стабилизированные решения удовлетворяют и условию трансверсальности, которое в рамках принципа максимума Понтрягина [1] имеет вид

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \widehat{\psi}_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Действительно, по построению стабилизированной системы (3.19) ее решения стремятся к стационарному положению, то есть $\lim\limits_{t \to +\infty} \widehat{x}(t) = x^*$, тогда по определению $\widehat{\psi}(x)$ (3.17) имеем

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \left(\psi^* + X \left(x - x^* \right) \right) = \lim_{t \to +\infty} e^{-\rho t} \psi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, хотелось бы отметить, что используемая процедура построения регулятора для гамильтоновой системы нечувствительна к изменениям параметров модели, поскольку для решения задачи стабилизации системы в положении равновесия требуется, чтобы половина собственных значений матрицы Якоби, вычисленной в стационарной точке, обладала отрицательной вещественной частью. Данное обстоятельство обеспечивается структурой матрицы Якоби [10,12] и свойствами гамильтоновой матрицы.

3.3. Решение стабилизированной гамильтоновой системы

Решения стабилизированной гамильтоновой системы (3.19), исходящие из выбранной окрестности положения равновесия, представлены на рис. 3. Параметры модели инициализированы значениями (см. [2,6]) $a = 1$, $\alpha_1 = 0.781$, $\alpha_2 = 0.219$, $\gamma = 0.414$, $\nu = 0.5$, $\rho = 0.05$, $b = 0.31$, $\delta = 0.025$ и $\lambda = 0.005$. Инвестиционные составляющие в модели ограничены значениями $\bar{u} = (0.3, 0.5)$.

Стационарные уровни управляющих параметров здесь заданы значениями $\mathbf{u}^* = (0.127, 0.017)$, а критические значения управлений при указанных значениях параметров модели равны $u^c = (0.128, 0.018)$, то есть максимально допустимые уровни инвестиций превосходят критические значения, следовательно, стационарная точка лежит в области переменных управлений D_{22}. Как видно из графиков, траектории фазовых переменных стабилизируются в точке равновесия $x^* = (12.345, 3.112)$ под воздействием регуляторов $\widehat{u}_i(x), \quad (i = 1, 2)$, изображенных на рис. 4.

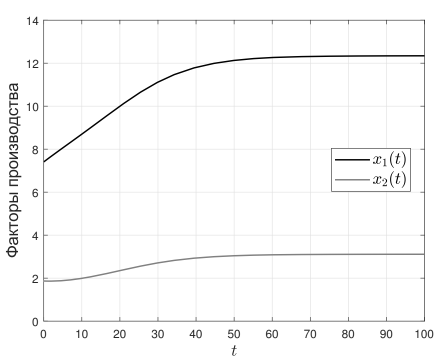

Рисунок 3. Фазовые траектории.

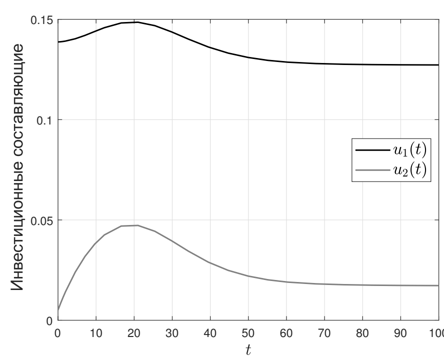

Рисунок 4. Регулятор, $\widehat{u}(x)$.

4. Заключение

В работе рассматривается модель роста с производственной CES-функцией и проводится исследование соответствующей задачи управления в рамках принципа максимума.

Показано, что гамильтонова система имеет единственное установившееся состояние, выписаны условия принадлежности стационарной точки различным областям управления, и, в частности, области переменных управляющих воздействий. Применена процедура стабилизации гамильтоновой системы и построены соответствующие решения. Численные эксперименты наглядно демонстрируют сходимость фазовых переменных к стационарным уровням по возрастающим траекториям S-образной формы (более ярко выражена для второй фазовой переменной x_2). Управляющие параметры, выполняющие роль регулятора, демонстрируют снижение инвестиций в производственные факторы в долгосрочной перспективе.

Особый интерес данный случай вызывает в связи с тем, что CES-функция обобщает некоторые широко известные и достаточно часто применяемые производственные функции, использование которых обусловлено статистическим анализом данных. В дальнейшем планируется провести анализ чувствительности стабилизированных решений задачи управления к изменениям параметра эластичности γ производственной CES-функции. В частности, представляет интерес переход величины γ к своему предельному значению $\gamma = 0$, что влечет трансформацию CES-функции в степенную функцию по типу Кобба-Дугласа, а модели роста различной размерности с производственной функцией Кобба-Дугласа детально исследованы, например, в работах [1,3,9,13,14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. *Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста* // Труды МИАН. 2007. Т. 257.

2. Тарасьев А.М., Усова А.А. *Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных стратегий* // Труды МИАН. 2012. Т. 277. С. 257–274.

3. Усова А.А. *Исследование свойств гамильтоновых систем и функций цены в динамических моделях роста.* Диссертация на соискание степени кандидата физ.-мат. наук. 2012.

4. Krasovskii A., Kryazhimskiy A., Tarasyev A. *Optimal control design in models of economic growth.* In Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control, 2008. CIMNE, Barcelona. P. 70–75.

5. Krasovskii A., Tarasyev A. *Conjugation of Hamiltonian Systems in Optimal Control Problems* // IFAC-PapersOnLine. 2008. Vol. 17(1). P. 7784–7789.

6. Klump R., McAdam P., Willman A. *Factor substitution and factor augmenting technical progress in the US: a normalized supply-side system approach* // ECB Working Paper. 2004. No. 367.

7. Pontryagin L., Boltyanskii V. and et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience, New York, 1962.

8. Russkikh O.V., Usova A.A., Tarasyev A.M. *Sensitivity of the qualitative behavior of the Hamiltonian trajectories with respect to growth model parameters* // CEUR Workshop Proceedings. 2016. Vol. 1662. P. 110–120.

9. Tarasyev A., Usova A. *Construction of a regulator for the Hamiltonian system in a two-sector economic growth model* // Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2010. Vol. 271. P. 1–21.

10. Tarasyev A., Usova A. *Structure of the Jacobian in economic growth models* // Proc. of the 16th IFAC Workshop CAO 2015. Vol. 48(25). P. 191–196.

11. Tarasyev A., Usova A. *Cyclic behaviour of optimal trajectories in growth models* // In Proc. of the 10th IFAC Symposium NOLCOS 2016. Vol. 49(18). P. 1048–1053.

12. Tarasyev A., Usova, A. *Robust methods for stabilization of Hamiltonian systems in economic growth models* // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, issue 32. P. 7-12.

13. Tarasyev A., Usova, A., Wang, W. *Hamiltonian Trajectories in a Heterogeneous Economic Growth Model for Optimization Resource Productivity* // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, issue 25. P. 74–79.

14. Tarasyev A., Zhu B. *Optimal proportions in growth trends of resource productivity* // Proc. of the 15th IFAC Workshop CAO 12. Vol. 45(25). P. 182–187.

15. Usova A., Tarasyev A. *Structure of a Stabilizer for the Hamiltonian Systems*. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham., 2020.

ANALISYS OF A GROWTH MODEL WITH A PRODUCTION CES-FUNCTION

Anastasiia A. Usova, IMM UbRAS, Cand.Sc. (ausova@imm.uran.ru),
Alexander M. Tarasyev, IMM UbRAS, UrFU, Dr.Sc. (tam@imm.uran.ru).

Abstract: The paper investigates a growth model with a production function of constant elasticity of substitution, which generalizes such functions as Cobb-Douglas or Leontief, when one of its parameter tends to zero or infinity respectively. The investment indicators of the model are considered as control parameters that are chosen in order to maximize the utility functional. An optimal control problem with an infinite planning horizon is formulated. Using the Pontryagin maximum principle, the paper studies a Hamiltonian function and a Hamiltonian system and provides its qualitative analysis. Next, the existence and uniqueness of a steady state are proven, and an algorithm for its search is given by solving a nonlinear equation of one special variable. The following section performs the stabilization of the Hamiltonian system in the vicinity of the steady state using a controller that can be constructed due to saddle character of the steady state. Finally, a numerical example is given that illustrates obtained analytical results.

Keywords: stabilization, nonlinear regulator, Hamiltonian system, production function, CES-function.