Математическая Теория Игр и её Приложения, т.15, в.1, с. 3–47

УДК 519.86

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ В ОЛИГОПОЛИИ КУРНО С УЧЁТОМ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ, «ЗЕЛЁНОГО» ЭФФЕКТА И ЗАБОТЫ О СПРАВЕДЛИВОСТИ

Ольга И. Горбанева

Геннадий А. Угольницкий*

Южный федеральный университет

344007, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/41

e-mail: oigorbaneva@sfedu.ru, gaugolnickiy@sfedu.ru

Проведён сравнительный анализ эффективности различных способов организации экономических агентов с учётом структуры и регламента их взаимодействия в моделях олигополии Курно. Построены и аналитически исследованы модели олигополии Курно в форме цепи поставок, с учётом «зелёного» эффекта и заботы о справедливости. Для симметричных моделей олигополии Курно при различных способах организации экономических агентов аналитически получены совпадающие структуры общественных и индивидуальных предпочтений. Проведено численное исследование моделей олигополии Курно в различных формах с несимметричными агентами,

* Статья подготовлена в рамках проекта ЮФУ «Цифровой атлас политических и социально-экономических угроз и рисков развития Южнороссийского приграничья: национальный и региональный контекст («Цифровой Юг»)» Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» № СП-14-22-06»

получены соответствующие структуры общественных и индивидуальных предпочтений.

Ключевые слова: Олигополия Курно, цепь поставок, забота о справедливости, «зеленый» эффект, симметричные и несимметричные агенты.

Поступила в редакцию: 09.09.22 *После доработки*: 10.01.23 *Принята к публикации*: 20.03.23

1. Введение

1.1. Проблема неэффективности равновесий

Проблема неэффективности равновесий играет важную роль в теоретико-игровом моделировании социально-экономических систем. Детальный анализ данной проблемы дан в работах [1,6, 15,22, 28]. Исход рационального поведения независимых эгоистичных экономических агентов может оказаться для общества хуже исхода, полученного при централизованном управлении или добровольной кооперации. Возникает важный вопрос: насколько именно хуже? Для ответа на этот вопрос вводится специальная функция выигрыша, определённая на множестве исходов игры, которая численно выражает «общественное благо» некоторого исхода. Две основные такие функции – утилитаристская и эгалитаристская, определяемые соответственно как сумма и минимум выигрышей всех игроков. Введение такой функции выигрыша позволяет количественно измерить неэффективность равновесий и, в частности, считать некоторые исходы оптимальными или приближённо оптимальными. Все подобные меры определяются как отношение между значением функции выигрыша в некотором равновесии и при оптимальном исходе. Предполагается, что все функции выигрыша неотрицательны, поэтому данное отношение также неотрицательно.

Цена анархии, наиболее популярная мера неэффективности равновесий, решает проблему неединственности равновесий на основе гарантированного подхода. Цена анархии игры определяется как отношение наихудшего из равновесных значений выбранной функции выигрыша к её значению на оптимальном исходе [27]. Если цена анархии близка к единице, то все равновесия дают хорошее приближение к оптимальному исходу, и выгода от введения жёсткого централизованного управления (которое может оказаться затратным или вообще нереализуемым) невелика.

Однако, проблему неэффективности равновесий целесообразно формулировать в более общем виде. Во-первых, сравнению подлежат выигрыши не только при базовых способах организации экономических агентов (независимое поведение, иерархия, кооперация), но и с учётом различных дополнительных эффектов (структура и регламент взаимодействия агентов). Во-вторых, сравнение следует проводить с точки зрения не только общественного благосостояния, но и отдельных экономических агентов. Исход игры при некотором способе организации, более выгодный для общества в целом, не обязательно окажется таким же для каждого из агентов. Например, выигрыш ведущего игрока в иерархической игре может превышать долю при симметричном распределении выигрыша от кооперации.

1.2. Способы организации экономических агентов и дополнительные эффекты их взаимодействия

Базовые способы организации взаимодействия экономических агентов – это их независимое поведение, иерархия и кооперация. При независимом поведении агенты выбирают свои действия одновременно, а решением возникающей игры в нормальной форме считается равновесие Нэша. При иерархической организации взаимодействия возможны два основных варианта. При первом ведущий игрок выбирает и сообщает одному или нескольким остальным игрокам своё действие, а они оптимально реагируют на него. Тогда возникает иерархическая игра Штакельберга, решением которой считается равновесие Штакельберга. Во втором варианте ведущий выбирает и сообщает ведомым свою стратегию как функцию от их ожидаемых действий, а они оптимально реагируют на эту стратегию. Тогда возникает обратная игра Штакельберга, решение которой ищется на основе принципа гарантированного результата. Наконец, при кооперации все игроки объединяются и совместно максимизируют суммарную функцию выигрыша по всем управляющим переменным. Тогда исходная игра сводится к задаче оптимизации, кооперативное решение которой оптимально по Парето [3,10, 24, 26].

При учёте структуры взаимодействия экономических агентов видное место занимает концепция управления цепями поставок (supply chain management) [14]. Под цепью поставок понимается упорядоченная совокупность экономических агентов, обеспечивающих производство товара и его движение от производителя к потребителю. Взаимодействие агентов в канале поставок естественно моделировать как иерархическую игру [5]. В простейшем случае такая игра включает производителя и продавца, в более общем – ещё ряд посредников, добавляющих стоимость. Функционирование и оценка эффективности цепей поставок описаны в [7]. В маркетинговом контексте подобные модели рассмотрены в [16]. Ivanov and Dolgui в [13] предлагают концепцию интегрированных сетей поставок (intertwined supply chains). В этой модели учитываются связи (в том числе обратные) между несколькими цепями поставок. Авторы уделяют основное внимание вопросам устойчивости и живучести сетей поставок.

Очень интересное направление исследований последних лет в данной области - «зелёные» цепи поставок (green supply chain) [35-36,23,2, 11, 17, 33]. Здесь речь идёт об усилиях, которые участники цепи поставок предпринимают для снижения негативного воздействия производства и логистики на окружающую среду. Предполагается, что такая деятельность приведёт к увеличению спроса на «зелёную» продукцию со стороны экологически ответственных потребителей. Обзоры соответствующих моделей представлены в [4, 32, 29, 8, 12]. Отметим, что участники цепей поставок могут тратить дополнительные ресурсы на увеличение не только экологичности, но и, например, инновационности или социальной полезности производимой продукции, что также ведёт к повышению спроса на неё.

В развитие данного подхода рассматривается так называемая забота о справедливости (fairness concern) [9, 31]. Хорошо известно, что хотя теория игр базируется на постулате экономической рациональности, этот постулат не описывает все реальные мотивы поведения. Поэтому предпринимаются попытки учесть в теоретико-игровых моделях дополнительные эффекты. В частности, забота о справедливости связана с тем, что если агент считает распределение дохода несправедливым, то он может отказаться от деловых отношений [25]. Поэтому в иерархической игре в функцию выигрыша ведущего включается штраф за существенную разницу доходов ведущего и ведомого. Исследования показывают, что забота о справедливости существенно влияет на стратегии игроков [18-19].

Sharma and Jain в [30] исследуют теоретико-игровые модели цепей поставок с учётом «зелёного» эффекта, заботы о справедливости и контрактов разделения затрат. Они изучают две возможные постановки иерархической игры, когда заботящимся о справедливости ведущим является производитель либо продавец. В обоих случаях учитывается «зелёный» эффект.

1.3. Концепция, вклад и структура статьи

Замысел настоящей работы состоит в сравнительном анализе эффективности различных способов организации экономических агентов (независимое поведение, иерархия, кооперация) с учётом дополнительных особенностей структуры и регламента взаимодействия агентов. В качестве таких особенностей рассматриваются цепи поставок, «зелёный» эффект и забота о справедливости. Сравнение эффективности проводится как в смысле общественного благосостояния, так и с точки зрения отдельных агентов. Для количественной оценки сравнительной эффективности вычисляются отношения суммарных или индивидуальных функций выигрыша при различных способах организации. В симметричных моделях, допускающих аналитическое исследование, эти показатели эквивалентны. Для моделей с разными характеристиками агентов проводится численное исследование обоих случаев по отдельности. Результатом сравнения выступают (совпадающие или несовпадающие) структуры общественных и индивидуальных предпочтений.

Удобной моделью для указанного сравнительного анализа представляется олигополия Курно [20], описывающая конкуренцию производителей по объёмам выпуска однородного товара. Общая теория олигополии изложена в [34]. Теоретико-игровой анализ олигополии Курно представлен в [21]. В настоящей статье рассматриваются модели олигополии Курно с постоянными затратами и затратами, зависящими от масштаба производства.

Вклад настоящей статьи состоит в следующем:

- построены и аналитически исследованы модели олигополии Курно в форме цепи поставок, с учётом «зелёного» эффекта и заботы о справедливости;

- для симметричных моделей олигополии Курно при различных способах организации экономических агентов аналитически получены совпадающие структуры общественных и индивидуальных предпочтений;

- проведено численное исследование моделей олигополии Курно в различных формах с несимметричными агентами, получены соответствующие структуры общественных и индивидуальных предпочтений.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Раздел 2 посвящён построению и аналитическому исследованию симметричных моделей олигополии Курно в различных формах с двумя типами затрат. В разделе 3 проводится аналитическое сравнение эффективности способов организации экономических агентов в указанных моделях. В разделе 4 представлены результаты численной имитации для несимметричных моделей и получены соответствующие структуры общественных и индивидуальных предпочтений. Заключительные замечания приведены в разделе 5.

2. Модели и их аналитическое исследование

2.1. Базовая модель олигополии Курно

2.1.1. Независимое поведение экономических агентов

В этом случае модель олигополии Курно описывает конкуренцию n экономических агентов (производителей, фирм и т.д.), производящих однородный товар. Обозначим x_i – объём выпуска продукции i-м агентом, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$. При построении модели используются два основных элемента: обратная функция спроса и функция затрат.

Обратная функция спроса $Q(x)$ общая для всех агентов и берётся в виде $Q(x) = a - \overline{x}$, где a – максимально возможный объём суммарного выпуска продукции. Величина $Q(x)$ показывает цену единицы продукции. Функцию затрат $C_i(x_i)$ будем рассматривать в двух видах. При постоянных затратах $C_i(x_i) = c_i x_i$ параметр c_i показывает затраты на производство единицы продукции. При затратах, зависящих от масштаба производства, $C_i(x_i) = c_i x_i - d_i x_i^2$, тогда с увеличением выпуска продукции затраты на производство единицы продукта уменьшаются, что отражает параметр d_i. В целом, выигрыш (прибыль) i-го агента есть $u_i(x) = Q(x)x_i - C_i(x_i)$. Тогда при постоянных затратах получаем модель

$$u_i(x) = (a - c_i - \overline{x})x_i \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

а при зависящих от масштаба производства затратах

$$u_i^d(x) = (a - c_i - \overline{x})x_i - d_i x_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Каждая из моделей (2.1) и (2.2) определяет игру n агентов в нормальной форме, решением которой считается равновесие Нэша. Для аналитического исследования моделей олигополии Курно здесь и далее будем принимать

Предложение 2.1. *$c_i = c$, $d_i = d$, $i = 1, \ldots, n$.*

Это предположение порождает симметричные игры

$$\begin{aligned} u_i(x) &= (a - c - \overline{x})x_i \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, && (2.3) \\ u_i^d(x) &= (a - c - \overline{x})x_i - d x_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, && (2.4) \end{aligned}$$

решения которых могут быть найдены аналитически. Будем считать для удобства, что $a > c > 0$. Решая систему уравнений $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, получаем для модели (2.3)

$$x_i^{NE} = x_{NE} = \frac{a - c}{n + 1}, i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Поскольку $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = -2 < 0$, $|H| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, то формула (2.5) действительно определяет равновесие Нэша в игре (2.3). Выигрыш каждого агента при этом равен

$$u^{NE} = \frac{(a - c)^2}{(n + 1)^2}, i = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Для модели (2.4) аналогично получаем

$$x_d^{NE} = \frac{a - c}{n + 1 + 2d}, \; u_d^{NE} = \frac{(1 + d)(a - c)^2}{(n + 1 + 2d)^2}.$$

2.1.2. Кооперативное поведение экономических агентов

В этом случае экономические агенты олигополии объединяются (например, образуют картель) и совместно максимизируют суммарный выигрыш (утилитаристскую функцию общественного благосостояния) $\overline{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ по всем управляющим переменным x_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда модель (2.3) принимает вид

$$\overline{u}(x) = (a - c - \overline{x})\overline{x} \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

а модель (2.4) – вид

$$\overline{u}^d(x) = (a - c - \overline{x})\overline{x} - d\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \tag{2.8}$$

Симметричное кооперативное решение модели (2.7) имеет вид

$$x^C = \frac{a-c}{2n};\ \overline{x}^C = \frac{a-c}{2},$$

при этом

$$u^C = \frac{(a-c)^2}{4n};\ \overline{u}^C = \frac{(a-c)^2}{4}.$$

Для модели (2.8) аналогично получаем

$$x_d^C = \frac{a-c}{2(n+d)};\ \overline{x}_d^C = \frac{n(a-c)}{2(n+d)};\ u_d^C = \frac{(a-c)^2}{4(n+d)};\ \overline{u}_d^C = \frac{n(a-c)^2}{4(n+d)}.$$

2.1.3. Наличие фирмы-лидера

Пусть агент 1 – лидер. Он выбирает и сообщает остальным агентам свой объём выпуска x_1. Зная x_1, остальные агенты находят равновесие Нэша в своей игре в нормальной форме. Это равновесие считается оптимальной реакцией на стратегию x_1. Тогда на самом деле фирма 1 выбирает значение x_1 так, чтобы максимизировать свой выигрыш на множестве равновесий Нэша в игре остальных агентов. Полученные исходы образуют множество равновесий Штакельберга $ST1$ в олигополии Курно с первой фирмой-лидером. Решение системы $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ даёт

$$2x_i + \sum_{j=2 (j \neq i)}^{n} x_j = a - c - x_1, i = 2, \ldots, n,$$

откуда получаем

$$x_i = x, i = 2, \ldots, n,$$
$$2x + (n-2)x = a - c - x_1,$$
$$x^{NE}(x_1) = \frac{a - c - x_1}{n};$$
$$u_1(x_1, x_{-1}^{NE}(x_1)) = \frac{1}{n}(a - c - x_1)x_1; \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{n}(a - c - 2x_1) = 0;$$
$$x_1^{ST1} = \frac{a-c}{2}; x_i^{ST1} = \frac{a-c}{2n}, i = 2, \ldots, n; \overline{x}^{ST1} = \frac{(2n-1)(a-c)}{2n};$$
$$u_1^{ST1} = \frac{(a-c)^2}{4n}; u_i^{ST1} = \frac{(a-c)^2}{4n^2}, i = 2, \ldots, n; \overline{u}^{ST1} = \frac{(2n-1)(a-c)^2}{4n^2};$$

Для модели с зависящими от масштаба затратами аналогично получаем

$$x_{1d}^{ST1} = \frac{a-c}{2(1+d)};\ x_{id}^{ST1} = \frac{(1+2d)(a-c)}{2(1+d)(2d+n)}, i = 2, \ldots, n;$$
$$\overline{x}_d^{ST1} = \frac{(2n - 1 + d(1+n))(a-c)}{2(1+d)(2d+n)};$$
$$u_{1d}^{ST1} = \frac{(a-c)^2(2d^2+4d-dn+1))}{4(1+d)^2(2d+n))}; u_{id}^{ST1} = \frac{(a-c)^2(2d+1)^2}{4(1+d)(2d+n)^2}, i = 2, \ldots, n;$$
$$\overline{u}_d^{ST1} = \frac{(a-c)^2(4d^3n + 8d^2 + 8d^2n - dn^2 + 9dn + 6d + 2n + 1)}{4(1+d)^2(2d+n)^2}.$$

2.2. Олигополия Курно с учётом «зелёного» эффекта

2.2.1. Независимое поведение экономических агентов

Под «зелёным» эффектом в модели олигополии Курно будем понимать выделение агентами дополнительных ресурсов на повышение экологичности выпускаемой продукции (или, например, её инновационности). Обозначим соответствующие «зелёные» усилия i-го агента через g_i, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $\overline{g} = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$. Пусть α – коэффициент повышения спроса за счёт «зелёного» эффекта, β_i – коэффициент затрат i-го агента на «зелёные» усилия. Тогда модель (2.1) принимает вид

$$u_i^G(x, g) = (a - c_i - \overline{x} + \alpha\overline{g})x_i - \beta_i g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Для исследования олигополии Курно с «зелёным» эффектом рассмотрим симметричную модель, принимая наряду с Предположением 1 также

Предложение 2.2. $\alpha = \beta_i = 1, i = 1, \ldots, n.$

Тогда

$$u_i^G(x,g) = (a-c-\overline{x}+\overline{g})x_i - g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \quad (2.9)$$

Теорема 2.1. *В модели (2.9) равновесные по Нэшу стратегии агентов имеют вид*

$$x^{GNE} = \frac{2(a-c)}{n+2},\ g^{GNE} = \frac{a-c}{n+2},$$

а выигрыш каждого агента равен

$$u^{GNE} = \frac{3(a-c)^2}{(n+2)^2}.$$

Доказательство Утверждения 2.1 приведено в Приложении 1.

Теорема 2.2. *В модели олигополии Курно с зависящими от масштаба производства затратами и «зелёным» эффектом*

$$u_{id}^G(x,g) = (a-c-\overline{x}+\overline{g})x_i - dx_i^2 - g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

равновесные по Нэшу стратегии и соответствующие выигрыши агентов имеют вид

$$x_d^{GNE} = \frac{2(a-c)}{n+2+4d}, g_d^{GNE} = \frac{a-c}{n+2+4d}, u_d^{GNE} = \frac{(3+4d)(a-c)^2}{(n+2+4d)^2}.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Утверждения 2.1.

2.2.2. Кооперативное поведение экономических агентов

В случае кооперации агентов при «зелёном» эффекте получаем при постоянных затратах модель

$$u_i^{GC}(x,g) = (a-c-\overline{x}+\overline{g})x_i - \sum_{j=1}^{n} g_j^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \quad (2.10)$$

а при зависящих от масштаба затратах – модель

$$u_{id}^{GC}(x,g) = (a-c-\overline{x}+\overline{g})x_i - d\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} g_j^2 \to \max, \quad (2.11)$$
$$x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 2.3. *В модели (2.10) оптимальные кооперативные стратегии агентов и их суммарный выигрыш равны соответственно*

$$x^{GC}=\begin{cases}\frac{2(a-c)}{n(4-n)}, & n<4,\\ 0, & \text{иначе};\end{cases}\quad g^{GC}=\begin{cases}\frac{a-c}{4-n}, & n<4,\\ 0, & \text{иначе};\end{cases}\quad u^{GC}=\begin{cases}\frac{(a-c)^2}{n(4-n)}, & n<4,\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

Теорема 2.4. *В модели (2.11) оптимальные кооперативные стратегии агентов и их суммарный выигрыш равны*

$$x_d^{GC}=\frac{2(a-c)n)}{n(4-n)+4d)},\ g_d^{GC}=\frac{(a-c)n}{n(4-n)+4d},$$
$$u_d^{GC}=\frac{(a-c)^2(4d+4n-4dn-n^2)}{(n(4-n)+4d)^2}$$

при $n\le 2+2\sqrt{1+d}$.

Доказательство Утверждения 2.4 аналогично доказательству Утверждения 2.3. При $n>4$ «зелёное» производство невыгодно.

2.2.3. Наличие фирмы-лидера

Пусть в модели (2.9) агент 1 – лидер. Регламент игры такой же, как в подразделе 2.1.3, при этом все фирмы одинаково заботятся о «зелёном» эффекте. Каждый из агентов, кроме лидера, решает задачу

$$u_k(x,g)=\left(a-c-x_1+g_1-\sum_{j=2}^{n}x_j+\sum_{j=2}^{n}g_j\right)x_k-g_k^2\to\max, k=2,\dots,n.$$

Решение системы $\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial g_k}=0$, $k=2,\dots,n$ даёт

$$g=\frac{a-c-x_1+g_1}{n+1};\ x=\frac{2(a-c-x_1+g_1)}{n+1}.$$

Подставляя найденные значения в u_1, получаем

$$u_1(x_1,g_1)=\frac{1}{n}(a-c-x_1+g_1)x_1-g_1^2.$$

Решение системы $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial g_1}=0$ даёт

$$g_1^{ST1G}=\frac{a-c}{3}; g_i^{ST1G}=\frac{2(a-c)}{3(n+1)};$$
$$x_1^{ST1G}=\frac{2(a-c)}{3};\ x_i^{ST1G}=\frac{4(a-c)}{3(n+1)}, i=2,\dots,n.$$

Наконец, непосредственной подстановкой получаем

$$u_1^{ST1G} = \frac{8(a-c)^2}{9(n+1)}; u_i^{ST1G} = \frac{16(a-c)^2}{9(n+1)^2}, i = 2, \ldots, n;$$
$$\overline{u}^{ST1G} = \frac{8(3n-1)(a-c)^2}{9(n+1)^2}.$$

Случай зависящих от масштаба затрат опускаем в силу громоздкости.

2.3. Олигополия Курно с учётом «зелёного» эффекта в цепи поставок

Рассмотрим олигополию Курно в форме цепи поставок (рис. 1).

$$1 \to 2 \to \ldots \to n \to$$

Рисунок 1. Олигополия Курно в форме цепи поставок

Связь между агентами в линейной структуре цепи поставок осуществляется за счёт «зелёного» эффекта для каждого агента. При этом действие эффекта одностороннее и тем сильнее, чем ближе расположены соответствующие агенты. Эти соображения приводят к модели

$$u_i(x,g) = \left(a - c_i - \overline{x} + \sum_{j=2}^{n} \alpha^{i-j} g_j\right) x_i - \beta_i g_i^2 \to \max, \qquad (2.12)$$
$$x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Как и ранее, для аналитического исследования примем Предположения 2.1 и 2.2 при произвольном $\alpha > 0$ и $n = 2$. Тогда для постоянных затрат модель (2.12) принимает вид

$$u_1^{SG}(x,g) = (a - c - x_1 - x_2 + g_1)\, x_1 - g_1^2 \to \max, x_1 \geq 0, g_1 \geq 0, \qquad (2.13)$$
$$u_2^{SG}(x,g) = (a - c - x_1 - x_2 + g_2)\, x_2 - g_2^2 \to \max, x_2 \geq 0, g_2 \geq 0, \qquad (2.14)$$

а для зависящих от масштаба затрат

$$u_{1d}^{SG}(x,g) = (a - c - x_1 - x_2 + g_1)\, x_1 - dx_1^2 - g_1^2 \to \max, \quad x_1 \geq 0, g_1 \geq 0, \tag{2.15}$$

$$u_{2d}^{SG}(x,g) = (a - c - x_1 - x_2 + \alpha g_1 + g_2)\, x_2 - dx_2^2 - g_2^2 \to \max, \quad x_2 \geq 0, g_2 \geq 0. \tag{2.16}$$

Теорема 2.5. *В модели (2.13)-(2.14) равновесные по Нэшу стратегии и выигрыши агентов имеют вид*

$$x_1^{SCNE} = \frac{2(a-c)}{5+2\alpha};\ x_2^{SCNE} = \frac{2(a-c)(1+\alpha)}{5+2\alpha};$$
$$g_1^{SCNE} = \frac{(a-c)}{5+2\alpha};\ g_2^{SCNE} = \frac{(a-c)(1+\alpha)}{5+2\alpha};$$
$$u_1^{SCNE} = \frac{3(a-c)^2}{(5+2\alpha)^2};\ u_2^{SCNE} = \frac{3(a-c)^2(1+\alpha)^2}{(5+2\alpha)^2}.$$

Теорема 2.6. *В модели (2.15)-(2.16) равновесные по Нэшу стратегии и выигрыши агентов имеют вид*

$$x_{1d}^{SCNE} = \frac{2(a-c)(1+4d)}{16d^2+24d+5+2\alpha};\ x_{2d}^{SCNE} = \frac{2(a-c)(1+4d+\alpha)}{16d^2+24d+5+2\alpha};$$
$$g_{1d}^{SCNE} = \frac{(a-c)(1+4d)}{16d^2+24d+5+2\alpha};\ g_{2d}^{SCNE} = \frac{(a-c)(1+4d+\alpha)}{16d^2+24d+5+2\alpha};$$
$$u_{1d}^{SCNE} = \frac{(3+16d+16d^2)(1+4d)(a-c)^2}{(16d^2+24d+5+2\alpha)^2};$$
$$u_{2d}^{SCNE} = \frac{(3(1+\alpha)+4d(4-\alpha+4d))(a-c)^2(1+4d+\alpha)^2}{(16d^2+24d+5+2\alpha)^2}.$$

Доказательства Утверждений 2.5 и 2.6 аналогичны доказательствам предыдущих утверждений.

2.4. Иерархическое управление олигополией Курно для достижения «зелёного» эффекта

2.4.1. Базовая иерархическая модель

Предположим теперь, что в достижении «зелёного» эффекта заинтересован внешний по отношению к олигополии Курно агент. Назовём этого агента Центром (P – Principal). Для обеспечения «зелёного» эффекта Центр может устанавливать остальным агентам обязательные нормативы затрат на повышение экологичности (инновационности) продукции g_i, $i = 1, \dots, n$. Будем считать, что Центр заинтересован в максимизации суммарного выигрыша агентов (общественного благосостояния). Управляющими переменными агентов остаются объёмы выпуска x_i, $i = 1, \dots, n$. Отношения между Центром и агентами показаны на рис. 2. При постоянных затратах мо-

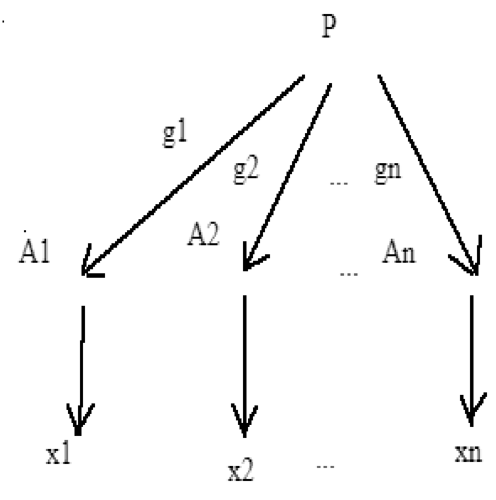

Рисунок 2. Иерархическая система управления «зелёным» эффектом

дель принимает вид

$$U(g, x) = \overline{u}(x, g) \to \max, g_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \quad (2.17)$$

$$u_i^{ST}(g, x) = (a - c - \overline{x} + \overline{g})x_i - g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Иерархическая игра (2.17)-(2.18) имеет следующую информационную структуру. Первый ход делает Центр, выбирая и сообщая остальным агентам значения нормативов g_i, $i = 1, \dots, n$. Зная эти величины, агенты одновременно и независимо выбирают значения своих управляющих переменных x_i, $i = 1, \dots, n$. Оптимальной реакцией агентов на стратегию Центра считается равновесие Нэша в их игре в нормальной форме. Поэтому Центр на самом деле выбирает при своём ходе такую стратегию, которая максимизирует его выигрыш на множестве равновесий Нэша. Полученный исход образует равновесие Штакельберга в игре (2.17)-(2.18).

Теорема 2.7. *Равновесные по Штакельбергу стратегии игроков и соответствующие выигрыши агентов в игре (2.17)-(2.18) имеют вид*

$$g^{ST} = \frac{n(a-c)}{2n+1};\ x^{ST} = \frac{(n+1)(a-c)}{2n+1};\ u^{ST} = \frac{(a-c)^2}{2n+1}.$$

Доказательство Утверждения 2.7 приводится в Приложении 1. В случае зависящих от масштаба затрат функция (2.18) принимает вид

$$u_{id}^{ST}(g,x) = (a-c-\overline{x}+\overline{g})x_i - dx_i^2 - g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \quad (2.19)$$

Теорема 2.8. *Равновесные по Штакельбергу стратегии игроков и соответствующие выигрыши агентов в игре (2.17), (2.19) имеют вид*

$$g_d^S T = \frac{n(1+d)(a-c)}{2n+1+d(4(d+n+1)-n^2)}; x_d^S T = \frac{(n+1+2d)(a-c)}{2n+1+d(4(d+n+1)-n^2)};$$
$$u_d^S T = \frac{(4d^3+8d^2+4dn+5d+2n+1+4d^2n-dn^2-d^2n^2)(a-c)^2}{(2n+1+d(4(d+n+1)-n^2))^2}.$$

Доказательство Утверждения 2.8 аналогично доказательству Утверждения 2.7.

2.4.2. Забота Центра о справедливости

Теперь предположим дополнительно, что в модели (2.17)-(2.18) Центр заботится о справедливости. Ограничимся случаем $n = 2$. Если $u_1 \approx u_2$, то заботиться о справедливости нет смысла, поэтому без ограничения общности предположим, что $u_1 \gg u_2$. Тогда функция выигрыша Центра принимает вид

$$U(g,x) = \overline{u}(g,x) - \delta(u_1(g,x) - u_2(g,x)), \quad (2.20)$$

где $\delta \in (0,1)$ - параметр заботы о справедливости.

Теорема 2.9. *В модели (2.18), (2.20) при $n = 2$ и $\delta < \sqrt{\frac{41}{81}}$ равновесие по Штакельбергу имеет вид*

$$g_1^{STFC} = \frac{2(1+\delta)(a-c)}{5-9\delta^2};\ g_2^{STFC} = \frac{2(1-\delta)(a-c)}{5-9\delta^2};$$
$$x_1 = x_2 = x^{STFC} = \frac{3(1-\delta)^2(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2},$$

а соответствующие выигрыши агентов равны

$$u_1^{STFC} = \frac{(1+\delta)^2(5-18\delta+\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2};$$
$$u_2^{STFC} = \frac{(1-\delta)^2(5-18\delta+\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2}.$$

Если $\delta \geq \sqrt{\frac{41}{81}}$, то оптимальные стратегии Центра $g_1 = g_2 = 0$, тогда $u_1 = u_2$ и забота о справедливости не требуется. Доказательство Утверждений 2.1, 2.3 и 2.9 приводится в Приложении 1. Поскольку в симметричных моделях $\overline{u} = nu$, то показаны только значения выигрышей агентов u.

3. Сравнительный анализ решений симметричных моделей

Для сравнения эффективности различных способов организации экономических агентов в симметричных моделях естественно использовать показатель

$$\frac{u^A}{u^B}, \tag{3.1}$$

где u^A,u^B — выигрыши агентов при способах организации A и B соответственно. Например, A – независимое поведение равноправных агентов, B – такое же поведение с учётом «зелёного» эффекта. Если A – независимое поведение агентов, а B – их кооперация, то показатель (3.1) для симметричных моделей эквивалентен известному показателю цены анархии.

Значения показателя (3.1) для рассмотренных моделей собраны в Табл. 1-2. Там, где это возможно, показаны результаты сравнения величины (3.1) с единицей, в остальных случаях проводилось численное исследование в зависимости от параметров.

Таблица 1. Сравнительный анализ эффективности в симметричных моделях с постоянными затратами

	C	G	GC	ST
NE	$\frac{4n}{(n+1)^2} < 1$	$\frac{(n+2)^2}{3(n+1)^2} < 1$	$\frac{n(4-n)}{(n+1)^2} < 1, n < 4$ $+\infty$, иначе;	$\frac{4n^3}{(n+1)^2(2n-1)} > 1$
C		$\frac{(n+2)^2}{12n}$ $< 1, n \le 7$ > 1, n>7;	$\frac{4-n}{4} < 1, n < 4$ $+\infty$, иначе;	$\frac{n^2}{2n-1} > 1$
G			$\frac{3n(4-n)}{(n+2)^2} < 1, n < 4,$ $+\infty$, иначе;	$\frac{4n^3}{(n+1)^2(2n-1)} > 1$
GC				$\frac{12n^3}{(n+2)^2(2n-1)} > 1,$ $n < 4,$ 0, иначе;

Таблица 2. Сравнительный анализ эффективности в симметричных моделях с затратами, зависящими от масштабов производства

	C_d	G_d	GC_d
NE_d	$\frac{4(n+d)(1+d)}{(n+1+2d)^2} < 1$	$\frac{(n+2+4d)^2(1+d)}{(3+4d)(n+1+2d)^2} < 1$	$\frac{(4n-n^2+4d)(1+d)}{(n+1+2d)^2}, n < 2+2\sqrt{1+d}$ $+\infty$, иначе;
C_d		$\frac{(n+2+4d)^2}{4(3+4d)(n+d)} < 1$	$\frac{4n-n^2+4d}{4(n+d)}, n < 2+2\sqrt{1+d}$ $+\infty$, иначе;
G_d			$\frac{(4n-n^2+4d)(3+4d)}{(n+2+4d)^2}, n < 2+2\sqrt{1+d},$ $+\infty$, иначе;

Непосредственные вычисления на основе приведённых данных приводят к следующим основным выводам.

Теорема 3.1. *При постоянных затратах таблица предпочтений следующая при разном количестве участников системы:*

	n=2,3	*n=4,5,6,7*	*n>7*
Равноправные игроки	$GC \succ G \succ C$ $\succ NE \succ ST$	$C \succ G \succ NE$ $\succ ST \succ GC$	$C \succ NE \succ ST$ $\succ G \succ GC$
Игрок-лидер	$ST \succ GC \succ C$ $\succ G \succ NE$	$ST \succ C \succ G$ $\succ NE \succ GC$	$ST \succ C \succ NE$ $\succ G \succ GC$
Общество в целом	$GC \succ G \succ C$ $\succ NE \succ ST$	$C \succ G \succ NE$ $\succ ST \succ GC$	$C \succ NE \succ ST$ $\succ G \succ GC$

а при затратах, зависящих от масштабов производства

	n=2,3	*n=4,5,6,7*	*n>7*
Равноправные игроки	$G \succ C \succ NE \succ ST$	$C \succ G \succ NE \succ ST$	$C \succ NE \succ ST \succ G$
Игрок-лидер	$ST \succ C \succ G \succ NE$	$ST \succ C \succ G \succ NE$	$ST \succ C \succ NE \succ G$
Общество в целом	$G \succ C \succ NE \succ ST$	$C \succ G \succ NE \succ ST$	$C \succ NE \succ ST \succ G$

Таким образом, в рамках рассмотренных моделей олигополии Курно с постоянными затратами в случае малого количества агентов (до четырех) наиболее выгодный способ организации экономических агентов с точки зрения общества в целом – это их кооперация с установлением нормативов по достижению «зелёного» эффекта. Далее следуют кооперация агентов, самостоятельное обеспечение «зелёного» эффекта, независимое поведение агентов и лидерство некоторого агента.

При $n > 4$ заботиться о достижении «зелёного» эффекта участникам невыгодно.

При наличии агента-лидера его выигрыш отличается от выигрышей ведомых агентов. Для него лучшим вариантом является иерархия.

Теорема 3.2. *В моделях с затратами, зависящими от масштаба производства, при* $n < 4$ *и* $d > \frac{1}{24}$
$u_d^{GC} \geq u_d^{GC} \geq u_d^{GC} \geq u_d^{GC}$, *или* $GC_d \succ C_d \succ G_d \succ NE_d \succ ST1_d$.

Таким образом, структура предпочтений не зависит от вида функции затрат.

Теорема 3.3. $C \succ C_d$, *то есть кооперация агентов в модели с постоянными затратами выгоднее, чем в модели с зависящими от масштаба затратами.*

4. Модели с несимметричными агентами

Все предыдущие результаты относятся к случаю симметричных агентов, производящих один и тот же товар, реализуемый по одной и той же цене, и несущих одни и те же затраты. Это сильное упрощение, которое оправдано в некоторых случаях. Но как изменится система предпочтений агентов и общества, если учесть неоднородность агентов?

4.1. Базовая модель олигополии Курно с несимметричными агентами

Построение модели описано в п. 2.1.1. Рассмотрим некоторые постановки.

4.1.1. Независимое поведение экономических агентов

При постоянных затратах получаем модель

$$u_i(x) = (a - c_i - \overline{x})x_i \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

а при зависящих от масштаба производства затратах

$$u_i^d(x) = (a - c_i - \overline{x})x_i - dx_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Найдем равновесие по Нэшу в этих играх.

Решая систему уравнений $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, получаем для модели (4.1)

$$x_i^{NE} = \frac{a + \sum\limits_{j \neq i} c_j - nc}{n+1}, i = 1, \dots, n. \tag{4.3}$$

Поскольку $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = -2 < 0$, $|H| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, то формула (4.3) действительно определяет равновесие Нэша в игре (4.1). Выигрыш каждого агента при этом равен

$$u_i^{NE} = \frac{(a + \sum\limits_{j \neq i} c_j - nc)^2}{(n+1)^2}, i = 1, \dots, n.$$

Для модели (4.2) аналогично получаем

$$x_{id}^{NE} = \frac{a - c_i - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a - c_j}{1 + 2d_j}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + 2d_j}}}{1 + 2d_i}.$$

Замечание 4.1. Заметим, что даже в относительно простой модели Курно с несимметричными агентами результат находится аналитически, но он достаточно громоздкий. Дальнейшее его использование для нахождения u_i и $\overline{u}$ теоретически возможно, но затруднительно. Поэтому начиная с этого момента и далее результаты аналитического исследования будут описаны следующим образом.

1. Аналитически находится величина $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Она тоже имеет достаточно громоздкий, но, тем не менее, обозримый вид.

2. Далее приводится зависимость $x_i(\overline{x})$. Считается, что если величина $\overline{x}$ известна, то с помощью этой зависимости можно вычислить x_i.

3. Зная x_i и $\overline{x}$, можно вычислить u_i и $\overline{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$.

Используя пункты 1-3, легко составить вычислительную схему для нахождения всех нужных величин.

Применим эту последовательность действий к текущей постановке. Аналитическое исследование позволило найти

$$\overline{x_d^{NE}} = \sum_{i=1}^{n} x_{id}^{NE} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a-c_j}{1+2d_j}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{1+2d_j}},$$

благодаря чему можно найти зависимость

$$x_{id}^{NE}(\overline{x_d^{NE}}) = \frac{a - c_i - \overline{x_d^{NE}}}{1 + 2d_i}.$$

4.1.2. Кооперативное поведение экономических агентов с несимметричными агентами

В этом случае модель (2.3) принимает вид

$$\overline{u}(x) = \sum_{i=1}^{n}(a - c_i - \overline{x})x_i =$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \quad (4.4)$$

а модель (2.4) – вид

$$\overline{u}^d(x) = \sum_{i=1}^{n}(a - c_i - \overline{x})x_i - d\sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - d\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. (4.5)$$

Кооперативное решение модели (4.4) имеет вид

$$\overline{x}^C = \frac{a - c_k}{2},$$

где k – номер агента, чья себестоимость выпуска продукции минимальна. Отсюда можно найти

$$x_i^C = \begin{cases} \dfrac{a - c_k}{2}, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Для модели (4.5) аналогично получаем

$$\overline{x_d^C} = \frac{a \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j} - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{c_j}{d_j}}{2(1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j})},$$

благодаря чему можно найти зависимость

$$x_{id}^C(\overline{x_d^C}) = \frac{a - c_i - \overline{x_d^C}}{2d_i}.$$

4.1.3. Наличие фирмы-лидера в модели с несимметричными агентами

Пусть агент 1 – лидер. Найдем равновесие по Штакельбергу. Решение системы $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$, даёт

$$x_i^{ST} = \frac{a - c_1 n + \sum\limits_{j=2}^{n} c_j}{2}, \sum_{i=2}^{n} x_i^{ST} = \frac{(n-1)a - \sum\limits_{j=2}^{n} c_j - x_1^{ST}(n-1)}{n},$$

благодаря чему можно найти зависимость

$$x_{i>2}^{ST}\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^{ST}\right) = a - c_i - x_1^{ST} - \sum_{i=2}^{n} x_i^{ST}.$$

Для модели с зависящими от масштаба затратами аналогично получаем

$$x_{1d}^{ST} = \frac{a - c_1 - c_1 \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{1+2d_j} + \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{c_j}{1+2d_j}}{2 + 2d_1 + (2d_1 - 1) \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{1+2d_j}},$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{id}^{ST} = \frac{a \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{1+2d_j} - \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{c_j}{1+2d_j} - x_{1d}^{ST} \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{1+2d_j}}{1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{1+2d_j}},$$

благодаря чему можно найти зависимость

$$x_{i>2,d}^{ST}\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^{ST}\right) = \frac{a - c_i - x_1 - \sum_{i=2}^{n} x_{1d}^{ST}}{1 + 2d_i}.$$

4.2. Олигополия Курно с учётом «зелёного» эффекта

4.2.1. Независимое поведение экономических агентов с несимметричными агентами

Найдем равновесие по Штакельбергу в случае учета «зелёного» эффекта в модели олигополии Курно с несимметричными агентами. Пусть α – коэффициент повышения спроса за счёт «зелёного» эффекта, β_i – коэффициент затрат i-го агента на «зелёные» усилия. Тогда модель (2.1) принимает вид

$$u_i^G(x, g) = (a - c_i - \overline{x} + \alpha\overline{g})x_i - \beta_i g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Для начала найдем равновесие по Нэшу. В случае учёта «зелёного» эффекта результаты аналитического исследования будут описаны следующим образом.

1. Аналитически находится величина $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ или другая величина, которую можно использовать в качестве базиса для нахождения величин из п. 2-4. Она имеет достаточно громоздкий, но тем не менее обозримый вид.

2. Далее приводится зависимость $x_i(\overline{x})$. Считается, что если величина $\overline{x}$ известна, то с помощью этой зависимости можно вычислить x_i.

3. Далее находятся зависимости $g_i(x_i)$ и, возможно, $\overline{g} = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$.

4. Зная x_i и $\overline{x}$, g_i и $\overline{g}$, можно вычислить u_i и $\overline{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$.

Теорема 4.1. *Вместо величины $\overline{x}$ находится величина*

$$z = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i} - 1\right) x_i^{GNE} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i} - 1\right)(a - c_i)}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i} - 1\right)},$$

откуда выявляется зависимость

$$x_i^{GNE}(z) = a - c_i + z, g_i^{GNE} = \frac{x_i^{GNE}}{2\beta_i}.$$

Теорема 4.2. *В модели олигополии Курно с зависящими от масштаба производства затратами и «зелёным» эффектом*

$$u_{id}^G(x,g) = (a - c_i - \overline{x} + \overline{g})x_i - dx_i^2 - \beta_i g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$$

имеем:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i} - 1 \right) x_{id}^{GNE} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i} - 1 \right) \frac{a - c_i}{1 + 2d_i}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i} - 1 \right)}{1 + 2d_i}},$$

откуда выявляется зависимость

$$x_{id}^{GNE}(z) = \frac{a - c_i + z}{1 + 2d_i}, g_{id}^{GNE} = \frac{\alpha x_{id}^{GNE}}{2\beta_i}.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Утверждения 4.1 и содержится в приложении 4.2.

4.2.2. Кооперативное поведение экономических агентов

В случае кооперации агентов при «зелёном» эффекте получаем при постоянных затратах модель

$$\overline{u}^{GC}(x,g) = a \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n} g_i \sum_{i=1}^{n} x_i - \\ - \sum_{i=1}^{n} \beta_j g_j^2 \to \max,\ x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \quad (4.6)$$

а при зависящих от масштаба затратах – модель

$$\overline{u}_d^{GC}(x,g) = a \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n} g_i \sum_{i=1}^{n} x_i - \\ - \sum_{i=1}^{n} \beta_j g_j^2 - \sum_{i=1}^{n} d_j x_j^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \quad (4.7)$$

Теорема 4.3. *В модели (4.6) имеем*

$$\overline{x}^{GC} = \frac{a - c_k}{2 - \frac{\alpha^2}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_j}},$$

где k – номер агента, чья себестоимость выпуска продукции минимальна, отсюда

$$x_i^{GC} = \begin{cases} \frac{a-c_k}{2-\frac{\alpha^2}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_j}}, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad g_i^{GC} = \frac{\alpha\overline{x}^{GC}}{2\beta_i}$$

Теорема 4.4. *В модели (4.7) имеем*

$$\overline{x_d^{GC}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{a-c_j}{d_j}}{2(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{d_j} - \frac{\alpha^2}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{d_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_j})},$$

благодаря чему можно найти зависимость

$$x_{id}^{G}(\overline{x_d^{GC}}) = \frac{a - c_i - 2\overline{x_d^{GC}} + \frac{\alpha^2\overline{x_d^{GC}}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_j}}{2}}{2d_i}, g_{id}^{GC} = \frac{\alpha\overline{x_d^{GC}}}{2\beta_i}.$$

Доказательство Утверждения 4.4 аналогично доказательству Утверждения 4.3.

4.2.3. Олигополия Курно с учётом «зелёного» эффекта в цепи поставок

Рассмотрим олигополию Курно в форме цепи поставок

$$u_i(x,g) = (a - c_i - \overline{x} + \sum_{j \leq i}\alpha^{i-j}g_j)x_i - \beta_i g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, g_i \geq 0, i = 1,\ldots,n. \tag{4.8}$$

Для аналитического исследования положим $n = 2$. Тогда для постоянных затрат модель (4.8) принимает вид

$$u_1^{SC}(x,g) = (a - c_1 - x_1 - x_2 + g_1)x_1 - \beta_1 g_1^2 \to \max, x_1 \geq 0, g_1 \geq 0, \tag{4.9}$$

$$u_2^{SC}(x,g) = (a - c_2 - x_1 - x_2 + \alpha g_1 + g_2)x_2 - \beta_2 g_2^2 \to \max, \tag{4.10}$$

$$x_2 \geq 0, g_2 \geq 0,$$

а для зависящих от масштаба затрат

$$u_{1d}^{SC}(x,g) = (a-c_1-x_1-x_2+g_1)x_1-\beta_1 g_1^2 - d_1 x_1^2 \to \max, \quad (4.11)$$
$$x_1 \geq 0, g_1 \geq 0,$$
$$u_{2d}^{SC}(x,g) = (a-c_2-x_1-x_2+\alpha g_1+g_2)x_2-\beta_2 g_2^2 - d_2 x_2^2 \to \max, \quad (4.12)$$
$$x_2 \geq 0, g_2 \geq 0.$$

Теорема 4.5. *В модели (4.9)-(4.10) равновесные по Нэшу стратегии агентов имеют вид*

$$x_1^{SCNE} = \frac{a-c_2+\left(\frac{1}{2\beta_2}-2\right)(a-c_1)}{\left(1-\frac{1}{2\beta_1}\right)-\left(\frac{1}{2\beta_2}-2\right)\left(\frac{1}{2\beta_1}-2\right)};$$
$$x_2^{SCNE}(x_1^{SCNE}) = a-c_1+x_1^{SCNE}\left(\frac{1}{2\beta_1}-2\right);\ g_i^{SCNE} = \frac{x_i^{SCNE}}{2\beta_i}.$$

Теорема 4.6. *В модели (4.11)-(4.12) равновесные по Нэшу стратегии агентов имеют вид*

$$x_{1d}^{SCNE} = \frac{a-c_2+\left(\frac{1}{2\beta_2}-2-2d_2\right)(a-c_1)}{\left(1-\frac{1}{2\beta_1}\right)-\left(\frac{1}{2\beta_2}-2-2d_2\right)\left(\frac{1}{2\beta_1}-2-2d_1\right)};$$
$$x_{2d}^{SCNE}(x_{1d}^{SCNE}) = a-c_1+x_{1d}^{SCNE}\left(\frac{1}{2\beta_1}-2-2d_1\right); g_{id}^{SCNE} = \frac{x_{id}^{SCNE}}{2\beta_i}.$$

Доказательства Утверждений 4.5 и 4.6 аналогичны доказательствам предыдущих утверждений.

4.3. Иерархическое управление олигополией Курно для достижения «зелёного» эффекта

4.3.1. Базовая иерархическая модель

Предположим теперь, что в достижении «зелёного» эффекта заинтересован внешний по отношению к олигополии Курно агент, которого назовём Центром. Для обеспечения «зелёного» эффекта Центр может устанавливать остальным агентам обязательные нормативы затрат на повышение экологичности (инновационности) продукции $g_i, i = 1, \ldots, n$. Будем считать, что Центр заинтересован в максимизации суммарного выигрыша агентов (общественного благосостояния).

Управляющими переменными агентов остаются объёмы выпуска x_i, $i = 1, \ldots, n$.

При постоянных затратах модель принимает вид

$$U(g,x) = \overline{u}(x,g) \to \max, g_i \geq 0, i = 1, \ldots, n; \quad (4.13)$$
$$u_i^{ST}(g,x) = (a - c_i - \overline{x} + \alpha\overline{g})x_i - \beta_i g_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \quad (4.14)$$

Или

$$u_{id}^{ST}(g,x) = (a - c_i - \overline{x} + \alpha\overline{g})x_i - \beta_i g_i^2 - d_i x_i^2 \to \max, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \quad (4.15)$$

Иерархическая игра (4.13)-(4.14) имеет следующую информационную структуру. Первый ход делает Центр, выбирая и сообщая остальным агентам значения нормативов g_i, $i = 1, \ldots, n$. Зная эти величины, агенты одновременно и независимо выбирают значения своих управляющих переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$. Оптимальной реакцией агентов на стратегию Центра считается равновесие Нэша в их игре в нормальной форме. Поэтому Центр на самом деле выбирает при своём ходе такую стратегию, которая максимизирует его выигрыш на множестве равновесий Нэша. Полученный исход образует равновесие Штакельберга в игре (4.13)-(4.14).

Теорема 4.7. *Равновесные по Штакельбергу стратегии игроков агентов в игре (4.13)-(4.14) имеют вид*

$$\overline{g^{ST}} = \frac{\alpha(an - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i) \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}}{(n+1)^2 - n\alpha^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}}; \; g_i^{ST} = \frac{\alpha(an - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + n\alpha\overline{g^{ST}}}{\beta_i (n+1)^2},$$

$$\overline{x^{ST}} = \frac{an - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + n\alpha\overline{g^{ST}}}{n+1}; \; x_i^{ST} = a - c_i - \overline{x^{ST}} + \alpha\overline{g^{ST}}.$$

Доказательство Утверждения 4.7 приводится в Приложении 2.

Теорема 4.8. *Равновесные по Штакельбергу стратегии игроков в игре (4.13), (4.15) имеют вид*

$$\overline{g_d^{ST}} = \frac{\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}}{\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i}\right)^2 - \alpha^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1+d_i}{(1+2d_i)^2}} \times$$

$$\times(a \sum_{i=1}^{n} \frac{1+d_i}{(1+2d_i)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(1+d_i)}{(1+2d_i)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i d_i}{(1+2d_i)^2} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1+2d_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{(1+2d_i)^2}); \; g_{id}^{ST} = \frac{\alpha}{\beta_i \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i}\right)^2} \times$$

$$\times(a \sum_{i=1}^{n} \frac{1+d_i}{(1+2d_i)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(1+d_i)}{(1+2d_i)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i d_i}{(1+2d_i)^2} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1+2d_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{(1+2d_i)^2} + \alpha \overline{g_d^{ST}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1+d_i}{(1+2d_i)^2}),$$

$$\overline{x_d^{ST}} = \frac{a \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1+2d_i} + \alpha \overline{g_d^{ST}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+2d_i}}; \; x_{id}^{ST} = \frac{a - c_i - \overline{x_d^{ST}} + \alpha \overline{g_d^{ST}}}{1+2d_i}.$$

Доказательство Утверждения 4.8 аналогично доказательству Утверждения 4.7.

4.3.2. Забота Центра о справедливости

Теперь предположим дополнительно, что в модели (4.13)-(4.14) Центр заботится о справедливости. Ограничимся случаем $n = 2$. Если $u_1 \approx u_2$, то заботиться о справедливости нет смысла, поэтому без ограничения общности предположим, что $u_1 \gg u_2$. Тогда функция выигрыша Центра принимает вид

$$U(g, x) = \overline{u}(g, x) - \delta(u_1(g, x) - u_2(g, x)), \tag{4.16}$$

где $\delta \in (0, 1)$ - параметр заботы о справедливости.

Теорема 4.9. *В модели (4.16), (4.14) при равновесие по Штакельбергу имеет вид*

$$g_1^{STFC} = \frac{2a-(1-3\delta)c_1-(1+3\delta)c_2}{\frac{9(1-\delta)\beta_1}{\alpha}-2\alpha\left(\frac{(1-\delta)\beta_1}{(1+\delta)\beta_2}+1\right)}; g_2^{STFC}(g_1^{STFC}) = \frac{(1-\delta)\beta_1}{(1+\delta)\beta_2}g_1^{STFC};$$

$$x_i^{STFC} = \frac{a-2c_i+c_{3-i}+\alpha(g_1^{STFC}+g_2^{STFC})}{3},$$

Доказательство Утверждения 4.9 приводится в Приложении 2.

5. Численная имитация

В силу громоздкости аналитического решения игры, дальнейшее исследование шло при помощи применения компьютерного исследования.

Рассмотрим пример производства одноразовой посуды, в частности, производство пластиковых одноразовых стаканчиков. Допустим, что производители рассматривают вопрос перехода к экологическому производству одноразовой посуды, а именно производству съедобной одноразовой посуды, например, вафельных стаканчиков. Случаи постоянных затрат и затрат, зависящих от количества выпущенной продукции, будут обусловлены закупкой сырья по твердым ценам или по оптовым ценам, снижающимся при увеличении покупки большего количества сырья.

Для исследования модели были взяты 27 агентов, у всех них были неповторяющиеся отношения параметров c_i, d_i и β_i. Каждая из трёх перечисленных величин имеет значения, которые можно отнести к разряду «большое, маленькое, среднее». Комбинируя три величины в трёх вариантах, получаем $3^3 = 27$ комбинаций. Но при большом количестве агентов оказалось невыгодным «зелёное» производство. Пропала необходимость в учёте различных соотношений величины β_i, в силу чего комбинировать нужно лишь две величины, что даёт возможность рассмотреть только девять случаев.

Для исследования учета «зелёного эффекта» дополнительно были рассмотрены случаи с двумя и тремя агентами.

В случае девяти агентов, результаты исследования даны в приложении 3, откуда можно сделать следующие выводы.

Производство вафельных стаканчиков не выгодно ни сильным, ни слабым участникам конкурентного сообщества.

Предпочтения для любого рядового игрока (не ведущего) с любым соотношением входных величин в случае постоянных затрат:

$$NE \succ ST \succ C,$$

а в случае зависящих от масштабов производства затрат

$$C_d \succ NE_d \succ ST_d.$$

Здесь, как видно, для случая зависящих от масштабов производства затрат предпочтения совпадают со случаем симметричных агентов. Для случая несимметричных агентов с постоянными затратами не сохраняется только результат выгодности кооперации. Это можно объяснить тем, что при кооперации выигрыш получают только те агенты, которые имеют минимальную себестоимость выпуска продукции. Остальные агенты ничего не производят и ничего не получают. В случае же симметричных агентов цена одинакова для всех них, поэтому все получают выигрыш, больший, чем при остальных постановках.

Предпочтения общества:

$$C \succ NE \succ ST,$$

в случае постоянных затрат, и аналогично для случая зависящих от масштабов производства затрат

$$C_d \succ NE_d \succ ST_d.$$

Как видно, результаты полностью совпадают со случаем с симметричными агентами.

Предпочтения игрока-лидера:

$$ST \succ NE \succ C,$$

что совпадает со случаем несимметричных агентов.

В случае двух игроков (один из которых экономически сильный, а другой экономически слабый) результаты исследования приведены в таблицах приложения 4, система предпочтений имеет следующий вид.

Предпочтения для сильного агента в случае постоянных затрат:

$$GNE \succ GC \succ ST \succ C \succ SCST \succ NE \succ STFC \succ SCNE,$$

и в случае зависящих от масштабов производства затрат:

$$GNE_d \succ GC_d \succ C_d \succ ST_d \succ ST1_d \succ NE_d \succ SCNE_d \succ SCST_d.$$

Предпочтения для слабого агента в случае постоянных затрат:

$$GNE \succ STFC \succ NE \succ ST \succ SCST \succ C \succ CNE \succ SCNE,$$

и в случае зависящих от масштабов производства затрат:

$$SCST_d \succ GNE_d \succ NE_d \succ ST1_d \succ GC_d \succ C_d \succ CNE_d \succ GCd.$$

Предпочтения общества в случае постоянных затрат:

$$GNE \succ (C = GC) \succ (NE \sim SCST) \succ ST \succ STFC \succ SCNE,$$

и в случае зависящих от масштабов производства затрат:

$$GNE_d \succ (C_d = GC_d) \succ NE_d \succ ST_d \succ SCNE_d \succ SCST_d,$$

откуда можно сделать вывод о том, что конкурентному сообществу из двух фирм выгоден учёт «зелёного» эффекта (производство съедобной посуды выгодно), но невыгодно «справедливое» распределение доходов. Каждому из участников тоже выгодно «зелёное» производство.

В случае трёх игроков результаты исследования приведены в таблицах приложения 4, система предпочтений имеет следующий вид.

Предпочтения для рядового игрока в случае постоянных затрат:

$$GNE \succ SCST \succ NE \succ C \succ ST,$$

и в случае зависящих от масштабов производства затрат:

$$SCST_d \succ GNE_d \succ C_d \succ NE_d \succ ST_d \succ GC_d.$$

Кроме того, при малых d_i и больших и средних c_i (агент несёт небольшие затраты, но получает большую прибыль) агенту при «зелёном» производстве невыгодно объединяться в коалиции,

$$GNE_d \succ GC_d,$$

в остальных же случаях объединяться в коалиции выгодно именно для «зелёного» производства.

$$GC_d \succ C_d.$$

Предпочтения общества в случае постоянных затрат:

$$GNE \succ C \succ NE \succ ST,$$

и в случае зависящих от масштабов производства затрат:

$$SCST_d \succ GC_d \succ NE_d \succ ST_d.$$

Предпочтения агента-лидера в случае постоянных затрат:

$$ST \succ GC \succ C \succ NE,$$

и в случае зависящих от масштабов производства затрат:

$$GC_d \succ NE_d \succ SCST_d.$$

Как видно, в случае трёх агентов «зелёное» производство выгодно, но все чаще встречаются ситуации без «зелёного» производства, которые иногда выгоднее.

Следует прокомментировать ситуацию, при которой кооперация для общества оказывается менее выигрышной, чем другие ситуации. Дело в том, что для общества выгодна более высокая степень экологичности производства (т.е. более высокое значение величины g_i), но для отдельных агентов такой уровень является невыгодным, и он отказывается от производства совсем, что влияет на целевую функцию всего общества. А чем меньше агентов в системе, тем существеннее для нее отказ одного агента от производства.

6. Заключение

Проблема сравнительного анализа способов организации экономических (и иных активных) агентов представляется чрезвычайно важной. Действительно, если некоторое решение выгодно для общества в целом (и представляющего общество органа централизованного управления), но невыгодно для отдельных агентов, которые должны это решение выполнять, то на практике оно выполнено не будет, соответствующие примеры хорошо известны.

Между тем полученные результаты показывают, что системы предпочтений для общества в целом и для отдельных агентов далеко не всегда совпадают. Имеется также множество тонкостей, связанных с различиями между ведущими и ведомыми игроками, сильными и слабыми экономическими агентами, учётом дополнительных эффектов структуры, расходов на охрану окружающей среды и инновационную деятельность, социальную ответственность бизнеса, соображений справедливости при распределении выигрышей.

Приведённые результаты следует рассматривать скорее как эмпирический материал, поскольку пока трудно сделать какие-то выводы о сравнительной эффективности в общем виде. Тем не менее, для каждого конкретного случая в рамках соответствующей модели эти результаты представляются полезными для анализа и поддержки решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Algorithmic Game Theory.* Ed. byN. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirany. Cambridge: University Press, 2007.

2. Azevedo S.G., Carvalho H., Machado V.C. *The influence of green practices on supply chain performance: A case study approach* // Transp. Res. Part E: Logist.Transp. Rev. 2011. Vol. 47(6). P. 850–871.

3. Basar T., Olsder G.Y. *Dynamic Non-Cooperative Game Theory.* SIAM, 1999.

4. Burgess K., Singh P.J., Koroglu R. *Supply chain management: A structured literature review and implications for future research* // Int. J. Operat. Product.Manag. 2006. Vol. 26(7). P. 703–729.

5. Cachon G.P., Netessine S. *Game theory in supply chain analysis* // Simchi-Levi D., Wu S.D., Shen Z.M. (ed.) Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the E-Business Era. Kluwer Academic Publishers, 2004.

6. Dubey P. *Inefficiency of Nash equilibria* // Math. Oper. Res. 1986. Vol. 11(1). P. 1–8.

7. Estampe D. *Supply Chains: Performance and Evaluation.* Wiley, 2018.

8. Fahimnia B., Sarkis J., Davarzani H. *Green supply chain management: A review and bibliometric analysis* // Int. J. Product. Econ. 2015. Vol. 162. P. 101–114.

9. Fehr E., Schmidt K.M. *A theory of fairness, competition, and cooperation* // Quart. J. Econ. 1999. Vol. 114(3). P. 817–868.

10. Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory.* MIT Press, 2002.

11. Ivanov D., Dolgui A. *Viability of Intertwined Supply Networks: Extending the Supply Chain Resilience Angles towards Survivability. A Position Paper Motivated by COVID-19 Outbreak* // Int. J. of Production Research. 2020. Vol. 58 (10). P. 2904–2915.

12. Ivanov D., Sokolov B. *Adaptive Supply Chain Management.* Springer, 2010.

13. Johari R., Tsitsiklis J.N. *Efficiency loss in a network resource allocation game* // Math. Oper. Res. 2004. Vol. 29(3). P. 407–435.

14. Jorgensen S., Zaccour G. *Differential Games in Marketing.* Kluwer Academic Publishers, 2004.

15. Govindan K., Kaliyan M., Kannan D., Haq A.N. *Barriers analysis for green supply chain management implementation in Indian industries using analytic hierarchy process* // Int. J. Product. Econ. 2014. Vol. 147. P. 555–568.

16. Gunasekaran A., Subramanian N., Rahman S. *Green supply chain collaboration and incentives: Current trends and future directions* // Transp. Res. E: Logist.Transp. Rev. 2015. Vol. 74. P. 1–10.

17. Kannan D., Govindan K., Rajendran S. *Fuzzy axiomatic design approach based green supplier selection: A case study from Singapore* // J. Clean. Product. 2015. Vol. 96. P. 194–208.

18. Katok E., Olsen T., Pavlov V. *Wholesale pricing under mild and privately known concerns for fairness* // Product. Operat. Manag. 2014. Vol. 23(2). P. 285–302.

19. Katok E., Pavlov V. *Fairness in supply chain contracts: A laboratory study* // J. Operat. Manag. 2013. Vol. 31(3). P. 129–137.

20. Mas-ColellA., Whinston M.D., Green J.R. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995.

21. Moulin H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique.* Paris: Hermann, 1981.

22. Moulin H., Shenker S. *Strategy proof sharing of submodular costs: Budget balance versus efficiency* // Econ. Theory. 2001. Vol. 18(3). P. 511–533.

23. Nagarajan M.,Sosic G. *Game-theoretic analysis of cooperation among supply chain agents: Review and extensions* // Europ. J. Operat. Res. 2008. Vol. 187(3). P. 719–745.

24. Narahari Y. *Game Theory and Mechanism Design.* World Scientific, 2014.

25. Nie T., Du S. *Dual-fairness supply chain with quantity discount contracts* // Europ. J. Oper. Res. 2017. Vol. 258(2). P. 491–500.

26. Osborne M. J., Rubinstein A. *A Course in Game Theory.* MIT Press, 1994.

27. Papadimitriou C.H. *Algorithms, games, and the Internet* // Proc. 33rd Symp. Theory of Computing. 2001 P. 749–753.

28. Roughgarden T. *Selfish Routing and the Price of Anarchy.* MIT Press, 2005.

29. Sarkis J., Zhu Q., Lai K.H. *An organizational theoretic review of green supply chain management literature* // Int. J. Product. Econ. 2011. Vol. 130(1). P. 1–15.

30. Sharma A., Jain D. *Game-Theoretic Analysis of Green Supply Chain Under Cost-Sharing Contract with Fairness Concern* // Int. Game Theory Review. 2021. Vol. 23(2). P. 2050017.

31. Sharma A., Nandi S. *A review of behavioral decision making in the newsvendor problem* // Operat. Supply Chain Management Int. J. 2018. Vol. 11(4). P. 200–213.

32. Srivastava S.K. *Green supply-chain management: A state-of-the-art literature review* // Int. J. Manag. Rev. 2007. Vol. 9(1). P. 53–80.

33. Tian Y., Govindan K., Zhu Q. *A system dynamics model based on evolutionary game theory for green supply chain management diffusion among Chinesemanufacturers* // J. Clean. Product. 2014. Vol. 80. P. 96–105.

34. Vives X. *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. MIT Press, 1999.

35. Zhu Q., Cote R.P. *Integrating green supply chain management into an embryonic eco-industrial development: A case study of the Guitang group* // J. Clean.Product. 2004. Vol. 12(8–10). P. 1025–1035.

36. Zhu Q., Geng Y., Fujita T., Hashimoto S. *Green supply chain management in leading manufacturers: Case studies in Japanese large companies* // Management Res.Rev. 2010. Vol. 33(4). P. 380–392.

Приложение 1.

Доказательство теоремы 2.1.

$$\frac{\partial u_i^G}{\partial x_i} = a - c - 2x_i - \sum_{j\neq i} x_j + \sum_{i=1}^{n} g_j = 0, i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial u_i^G}{\partial g_i} = x_i - 2g_i = 0, i = 1, \dots, n;$$

$$x_i = 2g_i, i = 1, \dots, n;$$

$$a - c - 4g_i - 2\sum_{j\neq i} g_j + \sum_{j=1}^{n} g_j = 0; a - c - 3g_i - \sum_{j\neq i} g_j = 0;$$

$$3g_i + \sum_{j\neq i} g_j = a - c, i = 1, \dots, n;$$

$$g_i = g, i = 1, \dots, n; 3g + (n-1)g = a - c;$$

$$g = \frac{a-c}{n+2}, x = \frac{2(a-c)}{n+2},$$

значение u находится непосредственной подстановкой. $\square$

Доказательство теоремы 2.3.

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = -\overline{x} + a - c - \overline{x} + \overline{g} = a - c + \overline{g} - 2\overline{x} = 0, i = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial g_i} = \overline{x} - 2g_i = 0, i = 1, \ldots, n;$$

$$g_i = g, x_i = x, i = 1, \ldots, n; \overline{x} = nx, \overline{g} = ng,$$

$$\overline{x} = 2g; a - c + ng - 4g = 0;$$

$$g = \begin{cases} \frac{a-c}{4-n}, & n < 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $g = 0$ имеем $x = x^C$ – оптимальное решение кооперативной задачи без «зелёного» эффекта. Тогда

$$x = \begin{cases} \frac{2(a-c)}{n(4-n)}, & n < 4, \\ x^C, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \overline{u} = \begin{cases} \frac{(a-c)^2}{4-n}, & n < 4, \\ u^C, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$\square$

Доказательство теоремы 2.7. Оптимальная реакция агентов на стратегию Центра, или равновесие Нэша в игре агентов, определяется из решения системы

$$\frac{\partial u_i^{ST}}{\partial x_i} = a - c - 2x_i - \sum_{j \neq i} x_j + \overline{g} = 0, i = 1, \ldots, n;$$

откуда

$$2x_i + \sum_{j \neq i} x_j = a - c + \overline{g}, i = 1, \ldots, n;$$

$$x_i = x^{ST}, i = 1, \ldots, n;$$

$$x^{ST} = \frac{a - c + \overline{g}}{n+1}; \overline{x}^{ST} = \frac{n(a - c + \overline{g})}{n+1}.$$

Подстановка найденного оптимального ответа в функцию выигрыша Центра даёт

$$\overline{u}(g, x^{ST}) = (a - c - \overline{x}^{ST} + \overline{g})\overline{x}^{ST} - \sum_{i=1}^{n} g_i^2 =$$

$$= \left(a - c + \overline{g} - \frac{n(a - c + \overline{g})}{n+1}\right) \frac{n(a - c + \overline{g})}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} g_i^2 =$$

$$= \frac{n(a-c+\overline{g})^2}{(n+1)^2} - \sum_{i=1}^{n} g_i^2.$$

Далее,

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial g_i} = \frac{2n(a-c+\overline{g})}{(n+1)^2} - 2g_i = 0, i = 1, \ldots, n;$$
$$g_i = g^{ST}, i = 1, \ldots, n; \overline{g}^{ST} = ng^{ST};$$
$$n(a-c+ng^{ST}) - (n+1)^2 g^{ST} = 0;$$
$$g^{ST} = \frac{n(a-c)}{2n+1},$$

откуда находим $x^{ST} = \frac{(n+1)(a-c)}{2n+1}$, $u^{ST} = \frac{(a-c)^2}{2n+1}$. □

Доказательство теоремы 2.9. Оптимальная реакция агентов по-прежнему определяется выражением (при $n = 2$)

$$x^{STFC} = \frac{a-c+\overline{g}}{3}; \overline{x}^{STFC} = \frac{2(a-c+\overline{g})}{3}.$$
$$x^{ST} = \frac{a-c+\overline{g}}{n+1}; \overline{x}^{ST} = \frac{n(a-c+\overline{g})}{n+1}.$$

Функция выигрыша Центра есть

$$U^{FC}(g,x) = (a-c+\overline{g}-\overline{x})\overline{x} - \delta(u_1 - u_2) - g_1^2 - g_2^2.$$

Заметим, что

$$u_1(g,x^{STFC}) - u_2(g,x^{STFC}) = Q(g,x^{STFC})(x^{STFC} - x^{STFC}) - g_1^2 + g_2^2 = g_2^2 - g_1^2.$$

Тогда подстановка x^{STFC} в U^{FC} даёт

$$U^{FC}(g,x^{STFC}) =$$
$$= (a-c+\overline{g} - \frac{2}{3}(a-c+\overline{g}))\frac{2}{3}(a-c+\overline{g}) - \delta(g_2^2 - g_1^2) - g_1^2 - g_2^2 =$$
$$= \frac{2}{9}(a-c+\overline{g})^2 - (1-\delta)g_1^2 - (1+\delta)g_2^2.$$

Далее, решаем систему

$$\frac{\partial U^{FC}}{\partial g_1} = \frac{4}{9}(a-c+\overline{g}) - 2(1-\delta)g_1 = 0,$$
$$\frac{\partial U^{FC}}{\partial g_2} = \frac{4}{9}(a-c+\overline{g}) - 2(1+\delta)g_2 = 0,$$

откуда

$$g_1 = \frac{2(1+\delta)(a-c)}{5-9\delta^2}, g_2 = \frac{2(1-\delta)(a-c)}{5-9\delta^2}.$$

Эти выражения положительны при $\delta < \frac{\sqrt{5}}{3}$. Пара (g_1^{STFC}, g_2^{STFC}) действительно максимизирует U^{FC} при условиях $\frac{\partial^2 U^{FC}}{\partial g_1^2} = \frac{4}{9} - 2(1-\delta) < 0$, или $\delta < \frac{7}{9}$ и $|H| = \begin{vmatrix} \frac{4}{9} - 2(1-\delta) & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} - 2(1+\delta) \end{vmatrix} > 0$, или $\delta < \sqrt{\frac{41}{81}}$. Сравнивая три полученных неравенства, находим окончательное условие $\delta < \sqrt{\frac{41}{81}}$. Далее непосредственными вычислениями получаем

$$x_1 = x_2 = x^{STFC} = \frac{3(1-\delta^2)(a-c)}{(5-9\delta^2)^2};$$

$$u_1^{STFC} = \frac{(1+\delta)^2(5-18\delta+\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2},$$

$$u_2^{STFC} = \frac{(1-\delta)^2(5-18\delta+\delta^2)(a-c)^2}{(5-9\delta^2)^2}.$$

$\square$

Приложение 2.

Доказательство теоремы 4.1.

$$\frac{\partial u_i^G}{\partial x_i} = -x_i + a - c_i - \sum_{j=1}^{n} x_j + \alpha \sum_{i=1}^{n} g_j = 0, i = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial u_i^G}{\partial g_i} = \alpha x_i - 2\beta_i g_i = 0, i = 1, \ldots, n.$$

Из последнего соотношения

$$g_i = \frac{\alpha x_i}{2\beta_i}, i = 1, \ldots, n;$$

Подставляя полученную зависимость в первое равенство, получим:

$$x_i = a - c_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha^2}{2\beta_j} - 1 \right) x_j, i = 1, \ldots, n.$$

Умножим обе части равенства на выражение в скобках:

$$\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)x_i=\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)(a-c_i)+\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_j}-1\right)x_j.$$

Просуммировав полученное равенство по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)(a-c_i)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_j}-1\right)x_j.$$

откуда выразим $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)x_i$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)x_i^{GNE}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)(a-c_i)}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^2}{2\beta_i}-1\right)}.$$

$\square$

Доказательство теоремы 4.3.

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}=-2\overline{x}+a-c_i+\alpha\overline{g}=0, i=1,\dots,n; \frac{\partial\overline{u}}{\partial g_i}=\alpha\overline{x}-2\beta_i g_i=0, i=1,\dots,n;$$

Из последнего соотношения

$$g_i=\frac{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{2\beta_i}, i=1,\dots,n;$$

Подставляя полученную зависимость в первое равенство, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{a-c_i}{2-\frac{\alpha^2}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_j}}, i=1,\dots,n.$$

Подставив полученный результат в целевую функцию кооперации, увидим, что она тем больше, чем меньше c_i, отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{a-c_k}{2-\frac{\alpha^2}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_j}},$$

где k – номер агента, у которого c_k минимально. Отсюда,

$$x_k = \frac{a - c_k}{2 - \frac{\alpha^2}{2} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j}},$$

$$x_{i \neq k} = 0.$$

□

Доказательство теоремы 4.7. Оптимальная реакция агентов на стратегию Центра $(g_1, \ldots, g_n)$, или равновесие Нэша в игре агентов, определяется из решения системы

$$\frac{\partial u_i^{ST}}{\partial x_i} = a - c_i - x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j + \alpha \overline{g},$$

откуда

$$x_i = a - c_i - \sum_{j=1}^{n} x_j + \alpha \sum_{j=1}^{n} g_j,$$

просуммируем обе части неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = na - \sum_{i=1}^{n} c_i - n \sum_{j=1}^{n} x_j + \alpha n \sum_{j=1}^{n} g_j,$$

откуда выразив $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{na - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + \alpha n \sum\limits_{j=1}^{n} g_j}{1 + n}.$$

Подставив полученную сумму в выражение для x_i, получим

$$x_i^{ST} = \frac{a - (1 + n) c_i + n \alpha \overline{g}}{n + 1}$$

Подстановка найденного оптимального ответа в функцию выигрыша Центра даёт

$$\overline{u}(g, x^{ST}) = \frac{na^2 - a \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + \alpha a n \sum\limits_{j=1}^{n} g_j}{1 + n} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (c_i a - (1 - n) c_i^2 + c_i \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + \alpha c_i \sum\limits_{j=1}^{n} g_j)}{1 + n} +$$

$$+\alpha\sum_{i=1}^{n} g_j\left(\frac{na-\sum\limits_{i=1}^{n} c_i+\alpha n\sum\limits_{j=1}^{n} g_j}{1+n}\right)-$$
$$-\left(\frac{na-\sum\limits_{i=1}^{n} c_i+\alpha n\sum\limits_{j=1}^{n} g_j}{1+n}\right)^2-2\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i^2.$$

Далее,

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial g_i}=\frac{a\alpha n}{1+n}-\frac{\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}{1+n}+\alpha\frac{na-\sum\limits_{i=1}^{n} c_i+\alpha n\sum\limits_{i=1}^{n} g_j}{1+n}+\alpha^2\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} g_j}{1+n}-$$
$$-\frac{2n\alpha}{(n+1)^2}\left(na-\sum_{i=1}^{n} c_i+\alpha n\sum_{j=1}^{n} g_j\right)-2\beta_i g_i=0, i=1,\ldots,n;$$

откуда

$$g_i^{ST}=\frac{\alpha(na-\sum\limits_{i=1}^{n} c_i+\alpha n\sum\limits_{j=1}^{n} g_j)}{\beta_i(n+1)^2},$$

а просуммировав по индексу, получим

$$\sum_{i=1}^{n} g_i^{ST}=\frac{\alpha(na-\sum\limits_{i=1}^{n} c_i)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}}{(n+1)^2-n\alpha^2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}},$$

□

Доказательство теоремы 4.9. Оптимальная реакция агентов по-прежнему определяется выражением (при $n=2$)

$$x_1^{STFC}=\frac{a-2c_1+c_2+\alpha\overline{g}}{3}; x_2^{STFC}=\frac{a-2c_2+c_1+\alpha\overline{g}}{3}.$$

Функция выигрыша Центра есть

$$U^{FC}(g,x)=(1-\delta)(a-c_1-x_1-x_2+\alpha\overline{g})x_1-(1-\delta)\beta_1 g_1^2+$$
$$+(1+\delta)(a-c_2-x_1-x_2+\alpha\overline{g})x_2-(1+\delta)\beta_2 g_2^2.$$

Подставив оптимальные реакции агентов в функцию Принципала, получим: Тогда подстановка x^{STFC} в U^{FC} даёт

$$U^{FC}(g, x^{STFC}) = \frac{1-\delta}{9}(a - 2c_1 + c_2 + \alpha\overline{g})^2 - (1-\delta)\beta_1 g_1^2 + \\ + \frac{1+\delta}{9}(a - 2c_2 + c_1 + \alpha\overline{g})^2 - (1+\delta)\beta_2 g_2^2.$$

Далее, условия первого порядка дают систему

$$\frac{\partial U^{FC}}{\partial g_1} = \frac{2\alpha(1-\delta)}{9}(a - 2c_1 + c_2 + \alpha\overline{g})x_2 - 2(1-\delta)\beta_1 g_1 + \\ + \frac{2\alpha(1+\delta)}{9}(a - 2c_2 + c_1 + \alpha\overline{g})x_2 = 0,$$

$$g_2 = \frac{(1-\delta)\beta_1}{(1+\delta)\beta_2} g_1,$$

откуда

$$g_1^{STFC} = g_2^{STFC} = \frac{2a - (1-3\delta)c_1 - (1+3\delta)c_2}{\frac{9(1-\delta)\beta_1}{\alpha} - 2\alpha\left(\frac{(1-\delta)\beta_1}{(1+\delta)\beta_2} + 1\right)},$$

а все остальные величины находятся подстановкой найденных величин. □

Приложение 3.

Таблица 3.1. Решение модели Курно с несимметричными девятью агентами (при a=3000)

№	c_i	d_i	u^{NE}	u_d^{NE}	u^C	u_d^C	u^{ST}	u_d^{ST}
1	1	1	129000	598000	$25{\cdot}10^6$	1690000	936000	451000
2	1	3	129000	220000	0	565000	34700	193000
3	1	5	129000	133000	0	339000	34700	117000
4	3	1	127000	596000	0	1690000	33900	523000
5	3	3	127000	219000	0	565000	33900	192000
6	3	5	127000	133000	0	339000	33900	117000
7	5	1	126000	595000	0	1690000	33200	522000
8	5	3	126000	218000	0	565000	33200	192000
9	5	5	126000	133000	0	339000	33200	116000
ИТОГО			1146000	2845000	$25{\cdot}10^6$	7782000	1206700	2423000

Приложение 4.

Таблица 4.1. Решение модели Курно с несимметричными двумя агентами (при a=10, $c_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\beta_1 = 100$, $c_2 = 5$, $d_2 = 1$, $\beta_2 = 100$

	x_1	u_1	g_1	x_2	u_2	g_2	x	u	g
NE	4,33	18,8	-	0,33	0,11	-	4,66	18,91	-
NEd	2,07	8,54	-	0,73	1,08	-	2,8	9,62	-
C	4,5	20,2	-	0	0	-	4,5	20,2	-
Cd	2,17	9,8	-	0,17	0,4	-	2,34	10,2	-
ST (лидер 1)	6,5	21,1	-	0,75	0,6	-	7,25	21,7	-
ST (лидер 2)	0,5	0,125	-	4,25	18,1	-	4,75	18,225	-
STd (лидер 1)	2,38	8,53	-	0,654	0,855	-	3,034	9,38	-
GNE	6,51	75	0,0325	2,51	18,9	0,0125	9,02	93,8	0,0451
$GNEd$	2,58	19,8	0,0125	1,25	6,27	0,00625	3,84	26,1	0,0192
GC	4,51	20,3	0,226	0	0	0	4,51	20,3	0,226
GCd	2,17	0,0117	9,8	0,171	0,0117	0,4	2,34	10,2	0,0234
$SCNE$	0,00563	0,000028	0,0000316	0	0	0	0,00563	0,000028	0,0000316
$SCNEd$	0,0146	0,000428	0	0	0	0	0,0146	0,000428	0
$STFC$	4,34	18,8	0,0156	0,34	0,0938	0	4,69	18,8938	0,0156
STd	0	0	0	29,8	1,52	1580	29,8	1,52	1580
STd	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4.2. Решение модели Курно с несимметричными тремя агентами при малых коэффициентах затрат и$c_1 = 1$, $d_1 = 1$, $c_2 = 3$, $d_2 = 1$, $c_3 = 5$, $d_3 = 1$ без учета «зеленого» эффекта (при a=100)

	x_1	u_1	x_2	u_2	x_3	u_3	x	u
NE	26,2	689	24,2	588	22,2	495	72,8	1770
NEd	16,8	567	16,2	523	15,5	480	48,5	1570
C	49,5	2450	0	0	0	0	49,5	2450
Cd	13,1	650	12,1	588	11,1	528	36,4	1770
ST (лидер $i = 1$)	52,5	919	15,5	240	13,5	182	81,5	1341
ST (лидер $i = 2$)	18,2	330	48,5	784	14,2	201	80,8	1310
ST (лидер $i = 3$)	18,8	355	16,8	283	44,5	660	80,2	1300
STd (лидер $i = 1$)	21,6	562	15,2	462	14,5	423	51,4	1450

Таблица 4.3. Решение модели Курно с несимметричными тремя агентами (при a=100) при средних коэффициентах затрат и $c_1 = 1$, $d_1 = 3$, $c_2 = 3$, $d_2 = 3$, $c_3 = 5$, $d_3 = 3$

	x_1	u_1	x_2	u_2	x_3	u_3	x	u
NE	26,2	689	24,2	588	22,2	495	72,8	1770
NEd	9,99	399	9,7	376	9,41	355	29,1	1130
C	49,5	2450	0	0	0	0	49,5	2450
Cd	8,42	417	8,08	392	7,75	368	24,2	1180
ST (лидер $i = 1$)	52,5	919	15,5	240	13,5	182	81,5	1341
ST (лидер $i = 2$)	18,2	330	48,5	784	14,2	201	80,8	1310
ST (лидер $i = 3$)	18,8	355	16,8	283	44,5	660	80,2	1300
STd (лидер $i = 1$)	10,6	399	9,63	371	9,35	349	29,6	1120

Таблица 4.4. Решение модели Курно с несимметричными тремя агентами (при a=100) при больших коэффициентах затрат и $c_1 = 1$, $d_1 = 5$, $c_2 = 3$, $d_2 = 5$, $c_3 = 5$, $d_3 = 5$

	x_1	u_1	x_2	u_2	x_3	u_3	x	u
NE	26,2	689	24,2	588	22,2	495	72,8	1770
NEd	7,11	303	6,93	288	6,75	273	20,8	864
C	49,5	2450	0	0	0	0	49,5	2450
Cd	6,26	310	6,06	294	5,86	278	18,2	882
ST (лидер $i = 1$)	52,5	919	15,5	240	13,5	182	81,5	1341
ST (лидер $i = 2$)	18,2	330	48,5	784	14,2	201	80,8	1310
ST (лидер $i = 3$)	18,8	355	16,8	283	44,5	660	80,2	1300
STd (лидер $i = 1$)	7,3	303	6,91	287	6,73	272	20,9	862

Таблица 4.5. Решение модели Курно с несимметричными тремя агентами (при a=100) при $n = 3$, $c_1 = 1$, $d_1 = 1, \beta_1 = 100$, $c_2 = 3$, $d_2 = 1, \beta_2 = 100$, $c_3 = 5$, $d_3 = 5$, $\beta_3 = 100$

	x_1	u_1	g_1	x_2	u_2	g_2	x_3	u_3	g_3	x	u	g
GNE	35,1	5730	0,176	33,1	5340	0,166	31,1	4960	0,156	99,3	16400	0,497
$GNEd$	20,2	2370	0,102	19,6	2270	0,0979	18,9	2170	0,0945	58,7	6810	0,294
GC	49,7	2460	0,249	0	0	0	0	0	0	49,7	2460	0,249
$GCdE$	13,2	653	0,183	12,2	591	0,183	11,2	531	0,183	36,6	1720	0,549
$SCST$	26,4	693	0,183	24,4	591	0,183	22,2	498	0,183	73,2	1782	0,549
$SCSTd$	0	0	0	24,8	649	2,66	25	722	2,43	49,8	1371	5,09

Таблица 4.6. Решение модели Курно GNE с несимметричными тремя агентами (при a=100) при $n = 3$, $c_1 = 1$, $d_1 = 1$, $c_2 = 3$, $d_2 = 1$, $c_3 = 5$, $d_3 = 5$ и различных коэффициентах β_i

	x_1	u_1	g_1	x_2	u_2	g_2	x_3	u_3	g_3	x	u	g
$\beta_i = 100$	35,1	5730	0,176	33,1	5340	0,166	31,1	4960	0,156	99,3	16400	0,497
$\beta_i = 1$	51	10600	25,5	49	10100	24,5	47	9620	23,5	147	30300	73,5
$\beta_i = 0,08$	57,9	13100	36,2	55,9	12600	34,9	53,9	12100	33,7	168	37800	105

GAME-THEORETIC ANALYSIS OF THE INTERACTION OF ECONOMIC AGENTS IN THE COURNOT OLIGOPOLY, TAKING INTO ACCOUNT THE LINEAR STRUCTURE, THE ”GREEN” EFFECT AND CONCERN FOR FAIRNESS

Olga I. Gorbaneva, South Federal University, Dr.Sc., assosiated prof. (oigorbaneva@sfedu.ru),
Gennady A. Ougolnitsky, South Federal University, Dr.Sc., prof. (gaugolnickiy@sfedu.ru).

Abstract: A comparative analysis of the effectiveness of various ways of organizing economic agents is carried out, taking into account the structure and regulations of their interaction in the models of the Cournot oligopoly. Cournot oligopoly models in the form of a supply chain are constructed and analytically investigated, taking into account the ”green” effect and concern for fairness. For symmetric models of Cournot oligopoly with different ways of organizing economic agents, the matching structures of social and individual preferences are analytically obtained. A numerical study of Cournot oligopoly models in various forms with asymmetric agents has been carried out, and the corresponding structures of social and individual preferences have been obtained.

Keywords: Cournot oligopoly, supply chain, fairnessconcern, green effect, symmetrical and asymmetrical agents.