Математическая Теория Игр и её Приложения, т.15, в.1, с. 48–72

УДК 518.83
ББК 185.1

РАВНОВЕСИЕ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ КАК РАЗВИТИЕ КОНЦЕПЦИИ РАВНОВЕСИЯ НЭША

Михаил Б. Искаков
Алексей Б. Искаков
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
e-mail: mih_iskakov@mail.ru , isk_alex@mail.ru

В качестве своей главной цели статья отстаивает идею рациональности концепции равновесия в безопасных стратегиях (РБС) и органической близости логики этой концепции к логике, лежащей в основе классического подхода к решению игровых задач через равновесие Нэша. В статье подробно разбирается система определений РБС через призму концепции равновесия Нэша. На основе этой аналогии устанавливается связь между существованием РБС и существованием равновесия Нэша.

Ключевые слова: равновесие в безопасных стратегиях, равновесие Нэша, соревновательные отклонения, несоревновательные отклонения, теория рациональности, теоремы существования решения.

Поступила в редакцию: 20.09.22 *После доработки*: 18.01.23 *Принята к публикации*: 20.03.23

1. Введение

Общая цель статьи – обоснование тезиса, что понятие РБС отражает принцип рационального поведения. Для этого в статье проводятся параллели между являющейся эталонным образцом рационального поведения концепцией равновесия Нэша (РН) и отстаиваемой концепцией игрового решения – РБС.

©2023 М.Б. Искаков, А.Б. Искаков

Понятие РБС было впервые предложено в [1], и в наиболее продвинутом на сегодня изложении в [19]. РБС – концепция решения для некооперативных игр, обобщающая подход Нэша-Курно, описывающая поведение субъектов по отношению игровой неопределенности, то есть неопределённости поведения других игроков. В качестве исходных определяются понятия угрозы и безопасного профиля. Согласно этой концепции, равновесие в безопасных стратегиях есть такой игровой профиль, в котором стратегия каждого игрока определяется двумя условиями: (1) игрок не может потерять в результате одностороннего и выгодного отклонения любого другого игрока (то есть для него отсутствуют угрозы или профиль безопасен) и, (2) выгодно отклоняясь сам, он может потерять больше в результате последующего одностороннего и выгодного отклонения какого-либо другого игрока (то есть нет безопасных выгодных отклонений). Или, выражая это немного по-другому, в равновесии нет угроз, и никто не может улучшить своё положение, не подставляя себя под угрозу.

В рамках РБС предполагается, что стремление к осторожности относительно возможного поведения партнеров является базовым свойством любого рационального субъекта, а также предлагается конкретная формальная модель такой осторожности. В рамках теории рациональности концепцию РБС можно рассматривать как модель стратегической рефлексии в ряду других моделей этого класса (смотри далее обзор в разделе 2). Модель РБС естественно трактовать как модель ограниченной рациональности, которая расширяет рассмотрение игровой ситуации введением принципа осторожности, наряду с другими возможными расширениями, учитывающими дальновидность, рефлексию, информированность, ограниченность возможностей игроков находить решения, социальные ограничения, обучаемость и так далее. При этом формально РБС является реализацией некоторой стратегической рефлексии игроков, предполагающих конкретную модель рационального поведения партнеров. Если рассматривать РБС с позиции стратегической динамики, то данная модель рефлексивных предположений о поведении игроков включает двухшаговую динамику отклонений игроков (угрозы и контругрозы). Тем не менее, РБС не сводится ни к одному из ранее предлагавшихся подходов или их совокупности и представляет собой оригинальную

концепцию.

Понятие РБС обобщает определение равновесия по Нэшу, а в ряде важных моделей позволяет найти новые содержательные решения, не обнаруженные ранее другими методами. Эти новые решения в известных задачах побудили интерес сначала к поиску задач, в которых такие решения существуют. А далее возникла необходимость охарактеризовать класс игровых задач, для которых применим данный подход, и сравнить его результаты с альтернативными подходами. По своему содержательному смыслу предлагаемый метод хорошо применим к играм с небольшим количеством игроков (олигополистические игры), в которых игроки могут просчитывать стратегии друг друга индивидуально, а также исключены кооперативные стратегии и возможности образования коалиций, стратегии наказания и т.п. Но наибольший интерес представляют задачи, в которых нет равновесий Нэша, а РБС существуют. Как правило, это игры с разрывными целевыми функциями или функциями наилучшего ответа. С другой стороны, такие игры не должны быть антагонистичны, то есть в них должны быть области безопасных профилей, в которых игроки не представляют угроз друг для друга, чего, например, нет в играх «чет-нечет» или «семейный спор», которые естественно решать в смешанных стратегиях, или через договоренность между игроками.

В качестве тестового набора исследуемых задач был взят ряд примеров из классической статьи Дасгупты и Маскина [14, 15], посвященной наиболее известным задачам без равновесия Нэша. Сравнивая подход РБС с альтернативными подходами, мы протестировали его на этом наборе задач: конкуренция на пространственно распределенном рынке Хотеллинга, модель олигополии Бертрана-Эджворта, модель страхового рынка Ротшильда-Стиглица-Вильсона. К этим задачам была добавлена аналогичная по типу модель состязания за ренту Таллока. Для этих задач были найдены равновесия РБС, которые сравнивались с решениями в рамках других подходов, при этом выявлялись достоинства и недостатки метода.

В качестве РБС-решений были найдены принципиально новые решения с убедительными интерпретациями, причем другие методы не давали таких решений. Сравнительно с решениями в смешанных стратегиях, достоинством РБС является простота и возможность по-

лучить решение в явном виде. Сравнительно с народными теоремами – единственность равновесий или их небольшое количество (однодва). Сравнительно с ad hoc методами – универсальная применимость к многим разным задачам. Сравнительно с методами решения в угрозах и контругрозах (которые кажутся наиболее близкими по идеологии к РБС) – получались совершенно другие решения, которые проявили различие в подходе к возникающим игровым угрозам. Решения в угрозах и контругрозах, использующие стратегии наказания в повторяющихся играх, сильно повышают устойчивость профилей изначально неустойчивых в одноразовой игре. Поэтому получающиеся решения имеют тенденцию приближаться к оптимальным по Парето не очень устойчивым профилям, которые становятся устойчивыми при введении дополнительных правил взаимодействия. Подход РБС стремится найти устойчивые профили не на основе стратегий наказания, а через введение дополнительных правил индивидуального поведения игроков, следующих принципу осторожности. Таким образом, получаются другие решения, которые менее выгодны для игроков, но более устойчивы.

Итак, концепция РБС может претендовать на свое место в ряду качественно различных подходов к решению разрывных игровых задач. Этот подход имеет перспективу применения для тех задач, где имеется неопределенность в форме угроз, а также непустая область неантагонистичности игроков. Прежде всего это такие задачи, где РБС удается найти и дать им убедительную интерпретацию.

Сделаем несколько замечаний о предположениях, заложенных в основу подхода. Во-первых, в РБС не предполагается кооперативное поведение участников, создание коалиций и так далее. Предполагается, что игроки действуют независимо друг от друга, не договариваясь, и строго рационально, эгоистически, исходя из критерия максимизации своей полезности при условии соблюдения осторожности, которую мы также включаем в представление о рациональном поведении. Во-вторых, не используется принцип смешанных стратегий, при помощи которого часто решается проблема отсутствия равновесий в чистых стратегиях. Равновесия в смешанных стратегиях, хоть и существуют всегда, но их, как правило, не удаётся найти в явном виде, и они трудно интерпретируются в играх с континуальными

множествами стратегий игроков. В-третьих, так же как и равновесие Нэша, РБС является статической концепцией, которая сохраняет основной принцип исключения в ситуации равновесия определённых отклонений. Но РБС также апеллирует к динамической интуиции, допуская в равновесии возможность существования некоторых выгодных отклонений, которые блокируются встречными отклонениями, наказывающими отклонившегося игрока. Тем не менее, развёрнутой логики стратегий наказания, как в динамических многошаговых играх, в явном виде не предполагается и, следовательно, нельзя реализовать слишком большое множество равновесий за счёт угрозы стратегий экстремального наказания «нарушителя».

В разделе 2 статьи приводится обзор литературы, посвященной различным трактовкам рациональности. Следующая часть статьи посвящена анализу системы определений РБС, которое даётся в два прохода. Сначала система определений приводится кратко и формально в разделе 3, чтобы можно было легче следить за рассуждениями в следующем разделе. В разделе 4 эта же система определений РБС интерпретируется подробно в терминах соревновательных и несоревновательных отклонений и сравнивается с такой же интерпретацией определения равновесия Нэша. Раздел 5 посвящен вопросу о том, каким формальным конструкциям в терминах равновесия Нэша соответствует РБС. В качестве развития подхода, разобранного в определениях, формулируются теоремы, устанавливающие связь между ситуациями существования равновесия Нэша и существования РБС. Таким образом устанавливается связь между этими равновесиями уже не на уровне определений, а на основе утверждений о существовании решения. Вводятся вспомогательные понятия игры угроз и безопасного выигрыша. Основной результат сформулирован и доказан в теореме 3. В заключительном разделе сделаны выводы.

2. Обзор литературы и сравнение подходов

РБС является моделью ограниченной рациональности. Самый очевидный аргумент в пользу этого – тот факт, что РБС может содержать строго доминируемые стратегии. Например, в матричной игре

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (1,1) \\ (4,2) & (2,3) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

первый игрок выбирает в РБС строго доминируемую стратегию 1 с выигрышами (1,1), так как она не содержит угрозы, а переход к доминирующей стратегии 2 содержит угрозу потерять больше, чем приобрести. Аналогичная ситуация возникает в классическом примере дилеммы заключенного, в котором пара стратегий (не сознаваться, не сознаваться) является РБС. Возникает этот парадокс, с точки зрения неоклассической модели рациональности, потому что в концепции РБС осторожный рациональный игрок, моделируя игровую неопределенность, то есть поведение других игроков, отказывается от принципа максимизации. То есть он не считает, что конкуренты всегда будут играть наилучший ответ. Он предполагает, что опасный для него случай, когда они могут играть просто не ухудшающий ответ, содержащий угрозу, тоже следует рассматривать в качестве реальной возможности. Именно эта логика заложена в определении безопасного отклонения. Чтобы обосновать основной тезис статьи, сделаем краткий обзор литературы по теории рациональности, который дополняет обзор в [2].

Опираясь на общий обзор ограничено рациональных моделей (ОРМ) в [36, 37], можно сказать, что существует определенная классическая модель рациональности, а все отклонения, которые не вмещаются в это ядро, рассматриваются как ОРМ. Представления о рациональности восходят к классическим традициям европейской философии и политэкономии, среди которых можно упомянуть таких мыслителей как Джон Локк, Адам Смит и Джон Стюарт Милль. Математические основания моделей рациональности в XIX веке разрабатывали великие французские экономисты Леон Вальрас, Антуан Курно и Джозеф Бертран. В современной неоклассической теории модели рациональности, сложившейся в середине XX века, хотелось бы выделить три момента. Во-первых, концепция экономически рационального субъекта формулирует его полезность в терминах выявленных предпочтений, предложенных Самуэльсоном [31] и аксиоматической теории ожидаемой полезности фон Неймана и Моргенштерна [26]. Этот подход позволяет свести предпочтения субъекта к его функции полезности, а внешнюю неопределенность моделировать как вероятностную неопределенность. Во-вторых, с теоретико-игровой точки зрения, базовая модель стратегического поведения игроков при

разрешении игровой неопределенности сводится к модели равновесия Нэша (РН) [13]. В-третьих, особо надо отметить предположение классической рациональности, ограничение которого приводит к ОРМ, что рациональные игроки оптимизируют свою полезность, обладая при этом полным знанием о функции полезности и поведении других игроков, а также бесконечными вычислительными возможностями при оценке игровой ситуации.

В классических теоретико-игровых моделях игроки выбирают РН [25], в котором ни один игрок не может увеличить свой выигрыш путем одностороннего изменения стратегии. При этом предполагается, что все игроки ведут себя рационально, т.е. каждый игрок максимизирует свой выигрыш и ожидает, что другие игроки также максимизируют свой выигрыш. Всем игрокам известны выигрыши других игроков и принципы принятия ими решений, а также то, что всем это известно, и т.д. (принцип общего знания). Последствия предположения об общем знании игроков привело к более общему понятию рационализируемости (rationalizability), введенному в работах [10, 27]. Оказалось, что рационализируемые стратегии можно получить в результате итерационного удаления строго доминируемых стратегий.

Хотя такое представление о рациональном поведении остается базовым в экономической теории, наблюдения и эксперимент показывают, что традиционные поведенческие предположения о рациональности игроков часто оказываются неверными [18]. Причины этого могут быть разными: при принятии решений игроки могут не обладать достаточной информацией, не иметь однозначных предпочтений, использовать разные упрощения или вообще другие правила принятия решения. Иногда РН оказывается слишком трудно вычислить или, наоборот, таких равновесий оказывается много [29]. Известными примерами нарушения рационального поведения служат: изменение предпочтений в зависимости от формы представления (preference reversal), спекулятивные пузыри на финансовых рынках, нерациональное поведение игроков на биржах и «проклятье победителя» на аукционах [18].

Альтернативный подход заключается в том, чтобы отказаться от построения точных функций выигрыша, которые максимизируют игроки, и признать, что точная модель рационального поведения игро-

ков слишком сложна, ослабляя или заменяя некоторые общепринятые классические предположения. Этот подход, предложенный в пионерских работах Саймона [33, 34], соответствует ограниченно рациональным моделям (ОРМ). В приближенной модели игроки больше не являются существенно рациональными (substantively rational), т.е. не имеют в качестве единственной цели максимизацию выигрыша, что вполне оправданно, поскольку этот выигрыш условный, а реальные функции выигрыша на самом деле неизвестны. Разные классы ОРМ, учитывают разные эффекты, выходящие за пределы неоклассической модели рациональности, а именно: неполноту знания, ограниченные возможности агентов, психологические особенности людей, неодновременность ходов игроков, изменение их целевых функций во времени, наличие поведенческих установок и внешних условий, меняющих правила игры. С теоретико-игровой точки зрения, характерным предположением ОРМ является то, что в силу разных причин игроки не обязательно играют РН или же не способны его найти (по крайней мере, в начале игры).

Когда игра имеет достаточную историю или носит повторяющийся характер, многие ОРМ используют подход процедурной рациональности (procedural rationality), т.е. предполагают, что игроки при выборе стратегии следуют набору некоторых «разумных» для данной игры правил. Ауман в статье [7] предложил провести различие между рациональностью действий (act-rationality) и рациональностью правил (rule-rationality). Во втором случае, вместо того, чтобы выбирать действия, которые непосредственно максимизируют выигрыш (например, отклоняться всегда, когда это выгодно), игроки следуют простым правилам поведения, которые увеличивают их выигрыш в среднем, но не всегда. Как заметил Ауман, такие правила не обязательно «выбираются сознательно», но могут являться результатом «эволюционных сил» и обычно осуществляются с помощью некоторого механизма. Эти правила могут ослаблять разные неоклассические предположения о рациональности. Например, в теории адаптации стремлений в [32] отсутствует полная упорядоченность предпочтений. Критерий достаточной удовлетворенности (satisfying) в [33] отказывается от полной оптимизации предпочтений и останавливает поиск решения при достижении достаточного уровня. Теория пер-

спектив (prospect theory) в [20] учитывает особенности игроков при оценке информации, которые нарушают предположения о точности их восприятия и свойствах их предпочтений. В [28] социальные предпочтения и взаимодействия включаются в ответы игроков. В других ОРМ эти правила могут носить адаптивный характер и опираться на историю прошлого. Сюда можно отнести модели обучения [17, 23] и эволюционные модели [35]. Одна из мотиваций для развития этих направлений может состоять в том, что в повторяющихся играх в соответствии с «народной теоремой» [16] оказывается огромное число РН, а потому сама концепция решения Нэша утрачивает предсказательную силу. Как теория эволюции, так и теория обучения отказываются от рациональной возможности бесконечно дальновидно предсказывать будущее и обращаются к истории прошлого взаимодействия игроков. Эволюция изменяет частоту распределения стратегий в популяции, а обучение изменяет распределение вероятности стратегий в репертуаре отдельных игроков. В обеих теориях вероятность случайных стратегий возрастает, если связанный с ними выигрыш превышает некоторое пороговое значение, и уменьшается в противном случае. Эволюционный подход предложил новую концепцию решения – эволюционно устойчивые стратегии (evolutionary stable strategies) [35]. Основными динамическими концепциями решений в теории обучения являются самокорректирующее и самозакрепляющее равновесия (self-correcting equilibrium, self-reinforcing equilibrium). Первое систематическое изложение теории обучения было сделано в [17]. В [21] можно найти простое изложение результатов теории обучения применительно к играм, в которых возникают смешанные мотивы (как, например, в дилемме заключенного). Новые теоретико-игровые подходы в отдельных случаях позволяют показать, что ОРМ упрощенно имитируют результат более сложных динамических игр, в которых принцип рациональности соблюдается точно. Например, в [24] удалось показать, что согласованные предположения в линейных дуополиях Курно и Бертрана могут быть результатом эволюционного отбора в повторяющейся динамической модели, т.е. на самом деле являются рациональными с позиции эволюционной теории.

С другой стороны, если игра не имеет явной истории и прецедентов, то решения игрока должны основываться на имеющейся у него модели поведения конкурентов, которая исследуется в классе ОРМ стратегической рефлексии (strategic thinking). Важный эмпирический факт, который нужно учитывать при построении таких моделей, состоит в том, что решения игроков в стационарных играх обычно чувствительны к величине их выигрышей за пределами точек равновесий. Концепция РН исключает такую чувствительность априори, поскольку в её рамках игрок считает свой ожидаемый выигрыш исходя из того, что конкуренты всегда будут выбирать равновесные положения [13]. В противоположность этому, модели стратегической рефлексии включают такую чувствительность и учитывают реакции других игроков не только в равновесных положениях. В таких ОРМ ослабляется предположение о том, что игроки всегда выбирают РН. Вместо этого, предполагается, что они просчитывают в уме возможные ответные действия конкурентов на несколько ходов вперед на основе той или иной модели или доступной им информации. Примерами таких подходов являются k-уровневые модели [12], когнитивная иерархия [11], равновесие квантовых ответов (quantal response equilibrium) в [22], интерактивная эпистемология (interactive epistemology) [8], которые изучают модели того, что игроки знают и предполагают о том, что знают и предполагают другие игроки. Наиболее известная в отечественной литературе модель информационной и стратегической рефлексии была предложена в [5]. Обзор более новых результатов, полученных на основе этой модели, приведён в [4, 6].

Как правило, ограничено рациональные подходы рассматриваются как описание разных отклонений в поведении людей от предположений совершенной рациональности [37], и обычно связываются с когнитивными ограничениями ума, недостатком времени и ресурсов [38]. В этой связи ОРМ критикуются как менее общие, более специфичные и более произвольные, то есть более частные по сравнению с классической моделью рациональности. С другой стороны, если саму концепцию «рациональности» рассматривать как набор специальных предположений [30], то их ослабление должно приводить к более общей теории. В этом смысле ограничено рациональные подходы

должны предлагать более общую и более точную теорию. Во многом такая дихотомия в оценке ОРМ является вопросом интерпретации, а не строгим аксиоматическим выводом. В действительности, в определении каждой конкретной ОРМ могут присутствовать тенденции как с «сужению», так и к «расширению» неоклассического подхода в зависимости от того, как и какие предположения в ней ослабляются, и какие предположения добавляются. В работе [18] перечисляются характерные проблемы, возникающие на пути создания достаточно общей теории ограниченной рациональности: недостаточная строгость и формализация, нечеткие границы применимости, трудности с выделением экономических факторов, отсутствие достаточно общей теории равновесий (сравнимых по умозрительной убедительности с концепцией РН), наличие неформализованных факторов, проблемы агрегации с другими ОРМ. На наш взгляд, чтобы претендовать на широкое обобщение ОРМ должна (i) в том или ином виде сохранять концепцию РН, и (ii) добавлять к ней возможность описания новых содержательных случаев, которые концепция РН не охватывает.

РБС, как модель стратегической рефлексии, вводит ограниченную рациональность в смысле отказа игроков всегда играть равновесие Нэша и наилучшие ответы без учета своей последующей безопасности. В то же время, мы покажем, что РБС напрямую выводится из концепции равновесия Нэша и всегда сохраняет все решения равновесные по Нэшу. Таким образом, РБС может рассматриваться как пример качественного синтеза неоклассической концепции рациональности и ограниченно-рационального подхода.

Несколько слов надо сказать об авторском понимании рациональности, которое, явно или неявно, лежит в основании концепции РБС. В рамках обоснования РБС предполагается, что рациональность – это не умозрительно построенные правила поведения, а некоторое объективное поведенческое свойство, присущее всем субъектам. Индивидуумам homo sapiens (физическим лицам, агентам) оно присуще «в чистом виде», как безусловный рефлекс (по академику Павлову, как собакам и прочим животным), а создаваемым ими организационным субъектам (фирма, юридическое лицо, центр) оно присуще в измененном, опосредованном виде. Поскольку безусловные рефлексы едины для всех людей, их можно описать единообразно, «рацио-

нально» (то есть умопостигаемо) и даже аксиоматически. С другой стороны, свойство разума проявляется непредсказуемым образом, в частности в том, что агент может оказаться умнее или хитрее центра и исследователя, и поэтому это свойство не может быть до конца промоделировано.

В упрощенном афористическом виде принцип рациональности был сформулирован в конце 1970-х годов В.Н. Бурковым: рациональный субъект (активный элемент) «лжив, ленив и жаден» [3]. К сожалению, такая непривычно резкая формулировка не вошла в тексты публикаций ее автора, но неоднократно упоминалась в устных версиях докладов и лекций. Поэтому удалось найти только косвенную ссылку на этот замечательный афоризм. В рамках концепции РБС к этому минимуму предлагается добавить свойство осторожности, так же как можно было бы дополнительно исследовать свойства разумности, дальновидности, рефлексии, обучаемости, социальности, альтруизма и морали и так далее. Осторожность понимается относительно игровой неопределенности (поведения других игроков), а не природных факторов (которые описываются вероятностно или как нечеткая неопределенность). Авторы полагают, что принцип осторожности, наряду с принципом «жадности» (максимизации целевой функции) является базовой мотивацией рационального поведения и коренится в инстинкте самосохранения даже в большей степени, чем другие импульсы. В концепции РБС сделана попытка описать его формально математически.

3. Система определений РБС

Основой этого и следующего раздела является анализ системы определений РБС в статье [19]. Сначала, сформулируем саму систему определений, чтобы далее по ней прослеживать общую логику с концепцией РН. Итак, рассматривается некооперативная игра n участников $G = (i \in \mathbb{N}, s_i \in S_i, u_i \in \mathbb{R})$ в нормальной форме. Базовыми понятиями, на которых построена вся конструкция, являются понятия угрозы и безопасной стратегии.

Определение 3.1. ***Угрозой*** *игрока j игроку i в профиле стратегий s называется такая пара профилей $\{s, (s'_j, s_{-j})\}$, что $u_j(s'_j, s_{-j}) > u_j(s)$ и $u_i(s'_j, s_{-j}) < u_i(s)$. Профиль стратегий s на-*

зывается ***содержащим угрозу****, а* s' *–* ***угрожающим*** *игроку* i *со стороны игрока* j*.*

Определение 3.2. *Стратегия* s_i *игрока* i *называется* ***безопасной стратегией*** *для этого игрока при заданных стратегиях* s_{-i} *всех других игроков, если профиль* s *не содержит угроз игроку* i*. Профиль стратегий* s *называется* ***безопасным профилем****, если все его стратегии безопасны.*

Иными словами, угроза означает ситуацию, когда существует игрок, такой, что некоторому другому игроку выгодно ухудшить его положение. В безопасном профиле никто не подвергается такой опасности и никто не может выиграть, ухудшая положение другого.

Определение 3.3. ***Безопасным отклонением*** *игрока* i *в профиле* s *называется такая стратегия* s'_i*, что* $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ *и* $u_i(s'_i, s'_j, s_{-ij}) \geq u_i(s)$ *для любой угрозы* $\{(s'_i, s_{-i}), (s'_i, s'_j, s_{-ij})\}$ *любого игрока* $j \neq i$ *игроку* i*.*

В этом определении два условия. Во-первых, безопасное отклонение увеличивает выигрыш игрока. Во-вторых, его выигрыш при безопасном отклонении покрывает потери, которые могут возникнуть в результате реализации ответных угроз другими игроками. Важно отметить, что безопасное отклонение является безопасным только относительно профиля s. После отклонения профиль (s'_i, s_{-i}) может содержать угрозы игроку i. Однако эти угрозы не могут сделать выигрыш игрока меньше, чем в исходном профиле s. Предполагается, что игрок, стремящийся максимизировать свой выигрыш безопасно, будет совершать только безопасные отклонения.

Определение 3.4. *Безопасный профиль стратегий называется* ***равновесием в безопасных стратегиях (РБС)****, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением.*

Таким образом, в определении РБС содержится два условия: в профиле не должно содержаться угроз, в нём не должно содержаться возможностей выгодных безопасных отклонений. Второе условие неявно означает, что игроки максимизируют выигрыши на множествах своих безопасных стратегий.

4. Вывод РБС из концепции РН

Чтобы показать, как можно естественным образом вывести определения РБС из определения равновесия Нэша, имеет смысл продублировать эквивалентно введённые выше понятия, сделав акцент именно на этом.

Главное предположение состоит в том, что игроки «осторожны» и стремятся к *безопасным* положениям, т.е. таким положениям, в которых им не могут угрожать другие игроки. Под этим подразумевается, что игроки не только максимизируют выигрыш, сравнивая в своем сознании возможные отклонения от первоначального гипотетического варианта стратегии, как в равновесии Курно-Нэша, но также, при выборе этих отклонений, они ограничиваются только такими выгодными отклонениями, которые *безопасны*, т.е. чтобы ни один другой игрок не мог сделать ответного *контр-отклонения*, которое является угрозой сделать отклонившемуся игроку хуже, чем до его отклонения. Таким образом, вместо того, чтобы определить равновесие как (безопасный) профиль стратегий, в котором ни один игрок не может сделать выгодного отклонения (Курно-Нэш), равновесие определяется как безопасный профиль стратегий, в котором ни один игрок не может сделать выгодного *безопасного отклонения*. Когда равновесие Нэша существует, оно по определению является Равновесием в Безопасных Стратегиях. Если эту концепцию рассмотреть с точки зрения *рациональности правил* Аумана, то здесь основное правило – избегать угроз со стороны других игроков, т.е. *быть осторожным*. Для выполнения этого правила соответствующий механизм содержит две простые инструкции: выбирай такую стратегию, чтобы никто тебе не угрожал и, когда возможно, увеличивай свой выигрыш, но только безопасными отклонениями.

Теперь определим эти качественные рассуждения формально. В равновесии Нэша в чистых стратегиях ни один игрок не может сделать выгодного одностороннего отклонения. Интересно заметить, что все выгодные односторонние отклонения игроков можно разделить на два существенно разных типа с точки зрения их влияния на других игроков. Один тип выгодных отклонений игрока, при которых происходит уменьшение выигрыша какого-либо игрока, можно назвать *соревновательными отклонениями*. При таких отклонениях

$s \xrightarrow{i} s'$ получается, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ для игрока i, и $u_j(s'_i, s_{-i}) < u_j(s)$ для некоторого другого игрока $j \neq i$. Соревновательные отклонения представляют естественную опасность для игроков, чей выигрыш при этих отклонениях уменьшается. Соответственно, другой тип отклонений, а именно те, при которых ни один игрок не уменьшает свой выигрыш, можно назвать *несоревновательными отклонениями*. При таких отклонениях $s \xrightarrow{i} s'$ получается, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ для игрока i, и $u_j(s'_i, s_{-i}) \geq u_j(s)$ для всех других игроков $j \neq i$. Такие отклонения не представляют непосредственной угрозы для других игроков. Никто не страдает, и в этом смысле, эти отклонения не только не являются угрозой и приемлемы для игроков, но могут оказаться выгодными для всех. Таким образом, с точки зрения взаимной безопасности игроков при односторонних отклонениях, равновесие Нэша можно охарактеризовать как профиль, в котором ***(а) ни один игрок не может сделать (выгодного) соревновательного отклонения***, и ***(б) ни один игрок не может сделать (выгодного) несоревновательного отклонения.***

Можно ли расширить концепцию равновесия, ослабив приведённую выше интерпретацию определения равновесия Нэша, если сузить в нём множество недопустимых отклонений? Все выгодные соревновательные отклонения являются провокационными со стороны отклоняющихся игроков и представляют «угрозы» не только для некоторых других игроков, но и для устойчивости такого профиля в целом. Возможность таких отклонений как раз и указывает на ситуацию, в которой одному игроку выгодно ухудшить положение другого, где существует конфликт интересов. Условие ***(а)*** означает, что равновесие Нэша всегда является безопасным профилем в том смысле, что никакие такого сорта угрозы в нём невозможны. Формально ситуацию угроз можно определить следующим образом.

Определение 4.1 (=3.1). ***Угрозой*** *игрока i против игрока j в профиле стратегий s называется такое отклонение s'_i, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s'_i, s_{-i}) < u_j(s)$. Отклонение игрока i в профиле стратегий s называется* ***соревновательным отклонением****, если оно является угрозой против какого-либо игрока в s.*

Здесь акцент в логически эквивалентной формулировке перенесён с игрока подвергающегося угрозе на игрока осуществляющего угро-

зу. Соревновательное отклонение (угроза) указывает на ситуацию, в которой одному игроку выгодно ухудшить положение другого. В этом отношении, важным свойством равновесной стратегии является избежание таких отклонений.

Определение 4.2 (=3.2). *Стратегия s_i игрока i называется* ***безопасной стратегией*** *в профиле стратегий s, если ни один игрок $j \neq i$ не имеет угроз против игрока i в s. Иначе она называется* ***небезопасной стратегией****. Профиль стратегий s называется* ***безопасным профилем****, если стратегии всех игроков в нём безопасны.*

Можно также сказать, переформулировав прежнее качественное описание, что профиль стратегий является безопасным, если ни один игрок не может сделать соревновательного отклонения. Введём теперь дополняющее понятие к соревновательному отклонению.

Определение 4.3. ***Несоревновательным отклонением*** *игрока i в профиле стратегий s называется такое отклонение s'_i, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s'_i, s_{-i}) \geq u_j(s)$ для всех других игроков $j \neq i$.*

Таким образом, все выгодные односторонние отклонения игроков разделяются на соревновательные и несоревновательные, в зависимости от влияния на других игроков. Несоревновательные отклонения – те, которые не представляют угроз для других игроков.

Кажется естественным, что в равновесии никаких соревновательных отклонений быть не должно. Поэтому предположим, что в равновесии условие ***(а)*** должно соблюдаться и никаких угроз быть не может. Рассмотрим теперь условие ***(б)*** в определении равновесия Нэша. Оно означает, что не существует «хороших» отклонений от равновесий Нэша, в которых один игрок строго увеличивает свой выигрыш, а другие игроки не уменьшают свои выигрыши. Таким образом, с точки зрения взаимной безопасности игроков при односторонних отклонениях равновесие Нэша можно охарактеризовать следующим образом.

Определение 4.4. *Безопасный профиль стратегий называется* ***равновесием Нэша****, если ни один игрок не может сделать несоревновательного отклонения.*

Если следовать «обоснованию возражений и контрвозражений» [9] и подчеркнуть стремление игроков к безопасности, то можно расширить применимость некооперативного равновесия, увеличив класс игр, в которых равновесие существует. Рассмотрим игроков в безопасном профиле. Их стратегии безопасны, и потому для них возможны только несоревновательные отклонения. Следующий логический шаг: некоторые из этих отклонений могут перестать быть выгодными, если учесть возможность последующих угроз со стороны других игроков. Если же существуют выгодные отклонения, в которых никаких угроз в новом профиле против отклонившегося игрока не возникает, то такие отклонения будут безопасными для него и сделают исходный профиль неустойчивым. Поэтому следует считать, что такие отклонения в равновесном профиле допускаться не должны. Другой случай, когда несоревновательное отклонение некоторого игрока может дать другому игроку возможность угрожать отклонившемуся в новом профиле стратегий. Тогда после этого несоревновательного отклонения возникают две возможности. Либо ***реализация угрозы может сделать положение игрока хуже, чем до отклонения.*** В этом случае будем считать отклонение небезопасным для отклонившегося игрока. Это должно побудить последнего, как осторожного рационального субъекта, воздержаться от отклонения. Либо ***реализация угрозы не может сделать положение игрока хуже, чем до отклонения.*** В этом случае отклонение может рассматриваться как безопасное. Это приводит к идее различать в безопасном профиле безопасные и небезопасные отклонения с позиций рациональности. Формально получаем следующее определение того случая, который должен быть исключен в равновесном профиле.

Определение 4.5 (=3.3). ***Безопасным несоревновательным отклонением*** *игрока i в профиле s называется такое несоревновательное отклонение s'_i, что $u_i(s'_i, s'_j, s_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s'_j любого игрока $j \neq i$ против игрока i в профиле (s'_i, s_{-i}).*

Важно ещё раз заметить, что безопасное отклонение не обязательно означает отклонение в безопасную стратегию. После безопасного отклонения в новом профиле (s'_i, s_{-i}) против игрока i могут возникнуть угрозы. Однако реализация этих угроз не может сделать его

выигрыш меньше, чем в начальном положении.

Разумеется, можно ввести и другие гипотезы для концепции безопасного отклонения, когда игроки делают более сложные предположения о поведении друг друга. Однако, целью является получить удобную модель для изучения игр, в которых угрозы других участников могут иметь серьёзные последствия, и поэтому игроки предпочитают обезопасить себя от всех угроз. Такие игры предполагают элемент неопределённости в поведении других игроков. Поэтому, следуя концепции ограниченной рациональности, предположим, что игроки не смогут с какой-либо долей уверенности предсказать дальнейшее развитие ситуации. В случае такой неопределённости, игроки прежде всего будут беспокоиться о том, чтобы не пострадать самим в результате действий других игроков, а не о том, будет ли наказан обидчик, и как это может произойти. Таким образом, предполагается, что игроки, стремящиеся максимизировать свой выигрыш, будут выбирать в безопасном профиле только безопасные отклонения.

Используя введённые определения безопасного профиля и безопасного отклонения, можно эквивалентно переформулировать определения равновесия Нэша как профиль, который ***(а) безопасен***, и ***(б) в котором ни один игрок не может увеличить свой выигрыш ни безопасным отклонением, ни небезопасным отклонением.*** Если рассмотреть концепцию равновесия в игре с осторожными игроками, то можно предположить, что такие игроки ***отказываются делать*** *небезопасные несоревновательные отклонения* в безопасном профиле ***сами по себе.*** Тогда в соответствующем определении ***достаточно исключить только*** *безопасные несоревновательные отклонения* в некооперативном равновесном профиле. Вместе с условием, что равновесие является безопасным профилем, это приводит к предлагаемому определению РБС.

Определение 4.6 (=3.4). *Безопасный профиль стратегий называется* ***равновесием в безопасных стратегиях (РБС)****, если ни один игрок не может сделать безопасное несоревновательное отклонение.*

Эта новая формулировка концепции РБС была опубликована в [19] (а первая формулировка в [1]).

5. Существование решения для РН и РБС

Для дальнейшего обоснования рациональности концепции РБС требуется не только установить общую логику с классическими общепринятыми подходами на уровне определений, но и развить эту логику в методах поиска соответствующих решений игровых задач уже на уровне утверждений о существовании решения. Необходимо, опираясь на разобранные аналогии, установить связь концепций между ситуациями существования равновесия Нэша и существования РБС. Этот путь также намечен в статье [19]. Первое важное свойство РБС вытекает непосредственно из его определения.

Теорема 5.1. *Любое равновесие Нэша является равновесием в безопасных стратегиях.*

Приведем один из подходов к проблеме существования. Как из имеющихся теорем существования равновесия Нэша получить теоремы существования РБС? Надо найти такую игру, в которой равновесие Нэша соответствовало бы РБС в исходной игре.

Обозначим множество безопасных стратегий при заданных стратегиях других игроков как $Q_i(s_{-i})$. Но, используя такие множества, можно только ответить на вопрос, есть ли в профиле s угрозы или он безопасен, но насколько существенны эти угрозы, безопасные множества не ловят. При рассмотрении проблемы существования решений в безопасных стратегиях для произвольной игры $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ необходимо построить такой инструмент, который отражал бы не только наличие угроз в профилях, но и их силу. Чтобы охарактеризовать угрозы количественно, можно поставить в соответствие исходной игре такую, в которой функции выигрышей учитывают ожидание наихудшей имеющейся в профиле угрозы.

Определение 5.1. ***Безопасный выигрыш*** *игрока i в профиле стратегий s равен его выигрышу при реализации наихудшей угрозы в небезопасном профиле и совпадает с его выигрышем в безопасном профиле, то есть:*

$$v_i(s) = \begin{cases} \inf\limits_{i \neq j,\, s'_j:\, u_j(s'_j, s_{-j}) > u_j(s)} u_i(s'_j, s_{-j}),\ s_i \notin Q_i(s_{-i})\,, \\ u_i(s),\ s_i \in Q_i(s_{-i})\,. \end{cases}$$

Соответствующей игре G ***игрой угроз*** *называется игра $\widetilde{G} = (S_i, v_i)_{i=1}^N$.*

Введённая функция $v_i(s)$ позволяет охарактеризовать безопасность профиля и безопасность отклонений простым способом.

Теорема 5.2. *Профиль s безопасен для игрока i $\iff$ $u_i(s) = v_i(s)$.*
Профиль s небезопасен для игрока i $\iff$ $u_i(s) > v_i(s)$.
Выгодное отклонение $s \xrightarrow{i} s'$ безопасно для игрока i $\iff$ $v_i(s') \geq u_i(s)$.
Выгодное отклонение $s \xrightarrow{i} s'$ небезопасно для игрока i $\iff$ $v_i(s') < u_i(s)$.

Доказательство. Проверяется непосредственно из определений. □

Теперь, охарактеризовав связь игры угроз с безопасностью профилей, естественно также установить соотношение между равновесиями в ней и в исходной игре.

Теорема 5.3. *Если безопасный профиль s^* является строгим равновесием Нэша в игре угроз $\widetilde{G}$, то он является РБС в исходной игре. Если s^* является РБС в исходной игре G, то s^* является равновесием Нэша в игре угроз $\widetilde{G}$.*

Доказательство. Пусть s^* является РБС в игре G. Для всех безопасных профилей, в том числе и для РБС s^* функции выигрыша и безопасного выигрыша равны: $u_i(s^*) = v_i(s^*)$. Предположим, что существует такое отклонение s'_i игрока i, что $v_i(s'_i, s^*_{-i}) > v_i(s^*)$. Это означает, что отклонение s'_i выгодно и безопасно для игрока i, по теореме 5.2. Значит, s^* не является РБС – противоречие. Поэтому наше предположение было ложным: $v_i(s'_i, s^*_{-i}) \leq v_i(s^*)$ для всех i и отклонений s'_i, т.е. s^* является равновесием Нэша в игре угроз $\widetilde{G}$.

Пусть s^* строгое равновесие Нэша в игре угроз, тогда $v_i(s') < u_i(s^*)$ $\iff$ выгодное отклонение s' не безопасно для i, по теореме 5.2. Безопасный профиль, не имеющий безопасных отклонений, является РБС. □

Таким образом, введенный инструментарий – безопасные множества, безопасный выигрыш, игра угроз – позволяет подойти к проблеме существования РБС. Это позволяет анализировать решения в безопасных стратегиях для некоторых важных прикладных задач, например, для задачи Хотеллинга о пространственно-распределенных рынках.

6. Заключение

Поскольку содержательное обсуждение концепции РБС и сравнение с другими методами было приведено в разделах 1 и 2, то здесь достаточно суммировать ряд преимуществ, которые такой подход имеет по сравнению с альтернативами:

- Сравнительно с равновесием в смешанных стратегиях подход позволяет получать решение в явном виде, которое можно легко интерпретировать в терминах осторожного поведения.
- Сравнительно с «ad hoc решениями», предлагаемыми для частных задач, РБС предлагает универсальный подход к сходным содержательно ситуациям.
- Сравнительно с эволюционными моделями, РБС позволяет существенно уменьшить множество искомых решений, вплоть до одного или нескольких, для рассмотренных задач.
- Сравнительно с моделями дальновидных решений, РБС позволяет строить сравнительно простые конструкции, которые можно исследовать до конца, до получения решений в явном виде.
- Сравнительно со статическими и динамическими моделями олигополистического поведения, РБС предлагает достаточно убедительное обоснование рациональности модельного поведения участников игры.

В качестве наиболее перспективного направления дальнейшего развития модели видится продолжение работы над теоремами существования. В теории, прежде всего, это разработка принципиального метода, подхода к конструированию таких теорем, опираясь на существующие наработки для других типов равновесий. При решении этой теоретической проблемы откроется путь для разработки практических приложений, конкретных теорем, применимых к еще более конкретным задачам.

Статья написана в соответствии с перспективными планами, возникшими в ходе работы над большой статьей [19], и авторы выражают глубокую признательность соавтору этой работы, К. Д'Апремону.

Основные положения статьи докладывались на семинарах: «Теория управления организационными системами» и «Экспертные оценки и анализ данных» в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова, авторы благодарны их руководителям Д.А. Новикову и Ф.Т. Алескерову за содержательное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Искаков М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях* // Автоматика и телемеханика. 2005. №3. С.139–153. (На английском: M.B. Iskakov. Equilibrium in Safe Strategies // Automation and Remote Control. 2005. V. 66, No. 3, P. 465–478.)

2. Искаков А.Б., Искаков М.Б. *В поисках обобщенной концепции рациональности* // Журнал новой экономической ассоциации. 2017. № 2 (34). С. 181–189.

3. Коргин Н.А. *Интервью с ведущим научным сотрудником лаб. 57*, 2018. https://www.ipu.ru/press-center/43106

4. Новиков Д.А. *Модели стратегической рефлексии.* // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 3–23.

5. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Рефлексивные игры.* М.: СИНТЕГ, 2003.

6. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели.* М.: Издательство физико-математической литературы, 2012.

7. Aumann, R.J. *Rule-Rationality versus Act-Rationality* // Discussion Paper 497. 2008. Center for the Study of Rationality, The Hebrew University of Jerusalem.

8. Aumann R., Brandenburger A. *Epistemic Conditions for Nash Equilibrium* // Econometrica, 1995, V. 63(5). P. 1161–1180.

9. Aumann R.J., Maschler M. *The bargaining set for cooperative games* // Advances in game theory, Ann. Math. Studies. 1964. 52. Princeton Univ. Press. P. 443–476.

10. Bernheim D. *Rationalizable Strategic Behavior* // Econometrica. 1984. V. 52. P.1007–1028.

11. Camerer C.F., Ho T.-H., and Chong J.-K. *Sophisticated Experience-Weighted Attraction Learning and Strategic Teaching in Repeated Games* // Journal of Economic Theory. 2002. V. 104(1). P.137–188.

12. Crawford V.P., Costa-Gomes M.A., Iriberri N. *Structural Models of Non-equilibrium Strategic Thinking: Theory, Evidence, and Applications* // Journal of Economic Literature. 2013. V. 51(1). P. 5–62.

13. Crawford, V.P. *Boundedly Rational versus Optimization-Based Models of Strategic Thinking and Learning in Games* // Journal of Economic Literature. 2013. V. 51(2). P. 512–527.

14. Dasgupta P., Maskin E. *The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory* // Rev. Econ. Stud. 1986. V. 53(1). P. 1–26.

15. Dasgupta P., Maskin E. *The existence of equilibrium in discontinuous economic games, II: Applications* // Rev. Econ. Stud. 1986. V. 53(1). P. 27–41.

16. Friedman J. *A non-cooperative equilibrium for supergames* // Review of Economic Studies. 1971. V. 38(1). P. 1–12.

17. Fudenberg D., Levine D. *The Theory of Learning in Games*. Cambridge: MIT Press. 1998.

18. Harstad R., Selten R. *Bounded-Rationality Models: Tasks to Become Intellectually Competitive* // Journal of Economic Literature. 2013. V. 51(2). P. 496–511.

19. Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont C. *Games for cautious players: the Equilibrium in Secure Strategies* // Games and Economic Behavior. 2018. V. 110. P. 58–70.

20. Kahneman D., Tversky A. *Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk* // Econometrica. 1979. V. 47(2). P. 263–291.

21. Macy M.W., Flache A. *Learning Dynamics in Social Dilemmas* // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2002. V. 99. P. 7229–7236.

22. McKelvey R.D., and Palfrey T.R. *A Statistical Theory of Equilibrium in Games* // Japanese Economic Review. 1996. V. 47(2). P. 186–209.

23. Milgrom P., Roberts J. *Adaptive and Sophisticated Learning in Normal Form Games* // Games and Economic Behavior. 1991. V. 3(1). P. 82–100.

24. Müller W., Normann H.T. *Conjectural Variations and Evolutionary Stability: A Rationale for Consistency* // Journal of Institutional and Theoretical Economics. 2005. V.?161(3). P.491–502.

25. Nash J. *Non-Cooperative Games* // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. P. 286–295.

26. Neumann J. and Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.

27. Pearce D. *Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection* // Econometrica. 1984. V. 52. P. 1029–1050.

28. Rabin M. *Incorporating Fairness into Game Theory and Economics* // American Economic Review. 1993. V. 83(5). P. 1281–1302.

29. Rubinstein A. *Modeling Bounded Rationality.* Cambridge: MIT Press. 1998.

30. Rubinstein A. *Modeling bounded rationality in economic theory: four examples* / Routledge handbook of bounded rationality. 2021. P. 423–436.

31. Samuelson P. *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1947.

32. Selton R. *Aspiration Adaptation Theory* // Journal of Mathematical Psychology. 1998. V. 42(2–3). P. 191–214.

33. Simon H.A. *A Behavioral Model of Rational Choice* // The Quarterly Journal of Economics. 1955. V. 69. P. 99–118.

34. Simon H.A. *Rational Choice and the Structure of the Environment* // Psychological Review. 1956. V. ?63. ?P.?129–138.

35. Smith J.M. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press. 1982.

36. Viale R. *Routledge handbook of bounded rationality*. London and New York: Routledge Taylor & Francis Group. 2021.

37. Wheeler G. *Bounded Rationality* // Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition). Stanford: The Metaphysics Research Lab, Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford University.

38. https://ru.wikipedia.org/wiki/Ограниченная_рациональность

EQUILIBRIUM IN SEQURE STRATEGIES AS A DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF NASH EQUILIBRIUM

M.B. Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Cand.Sc., senior researcher (mih_iskakov@mail.ru).
A.B. Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Cand.Sc., Senior researcher (isk_alex@mail.ru).

Abstract: As its main goal, the paper defends the rationality of the concept of equilibrium in secure strategies (EinSS) and the organic proximity of the logic of this concept to the logic underlying the classical approach to solving game problems through Nash equilibrium. The article deals in detail with the system of EinSS definitions through the prism of the Nash equilibrium concept. On the basis of this analogy the connection between the existence of EinSS and the existence of Nash equilibrium is established.
Keywords: equilibrium in secure strategies, Nash equilibrium, competitive deviations, noncompetitive deviations, rationality theory, existence theorems.