

УДК 517.977.8

ББК 22.17

РЕШЕНИЕ УСРЕДНЕННОГО ДЕРЕВА В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ*

АННА В. ТУР

ЛЕОН А. ПЕТРОСЯН

Санкт-Петербургский Государственный университет

198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

e-mail: a.tur@spbu.ru, l.petrosyan@spbu.ru

В работе предлагается применение методов дифференциальных игр для нахождения оптимального решения в многоагентной системе с сетевой структурой. Описывается класс дифференциальных игр на графах без циклов. Используется характеристическая функция специального вида, учитывающая сетевую структуру игры. В качестве кооперативного принципа оптимальности исследуется решение усредненного дерева. Рассмотрен иллюстративный пример.

Ключевые слова: многоагентные системы, дифференциальные игры, игры на сетях, кооперативные игры, значение усредненного дерева.

Поступила в редакцию: 16.01.23 *После доработки:* 20.02.23 *Принята к публикации:* 20.03.23

1. Введение

Задачи управления динамическими системами на сетях последнее время привлекают внимание большого числа исследователей. Это во многом объясняется активным применением многоагентных систем в различных областях. Системы, в которых происходит распределение пакета заданий между несколькими интеллектуальными

участниками, актуальны на практике. Участников в таких системах принято называть агентами. Агенты, обладая автономностью, преследуя некоторую цель, имеют возможность проявлять независимое поведение, а также взаимодействовать с другими объектами. Систему связей между агентами обычно задают сетью, агенты в которой отождествляются с узлами, а ребра определяют наличие и характер связей между ними. Поведение агентов при этом зависит от поведения участников, с которыми заданная сетевая структура допускает взаимодействие.

В данной работе многоагентная система описывается с помощью дифференциальной игры на сети. Предполагается, что несколько агентов объединены сетью, отражающей их возможность взаимодействия друг с другом. У каждого агента есть своя цель – максимизация функционала, значение которого зависит и от действия других агентов. При этом участники также объединены некоторой общей целью. В данном случае мы будем предполагать, что рассматривается кооперативная игра и агенты максимизируют суммарный выигрыш. Важным является предположение о возможности агентов действовать автономно. Допускается, что агенты могут разрывать связи сети, исключая при этом взаимодействие с какими-то или всеми другими участниками. В связи с этим в рассматриваемой задаче уравнения движения агентов зависят только от их собственных действий, другие агенты могут повлиять только на значение функционала.

В таких задачах помимо достижения общей цели – максимизации суммарного выигрыша, возникает также проблема дальнейшего распределения выигрыша между агентами. Для решения таких вопросов успешно используются методы теории кооперативных игр. Кооперативные принципы оптимальности обычно предполагают использование характеристической функции для справедливого распределения суммарного максимального выигрыша между участниками процесса.

В играх с описанной структурой возможность агентов разрывать связи позволила ввести новый способ построения характеристической функции, учитывающий сетевую структуру игры [7]. В дальнейшем в работах [6], [8],[11] были построены различные кооперативные принципы оптимальности при использовании этой характеристической функции.

Целью данной работы является построение такого кооперативного принципа оптимальности, как решение усредненного дерева, предложенного в [4], при использовании характеристической функции специального вида.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана исходная модель кооперативной дифференциальной игры на сети. В разделе 3 исследуются кооперативные принципы оптимальности для рассматриваемого класса игр. Раздел 4 посвящен иллюстративному примеру. В разделе 5 приведены выводы.

2. Кооперативная дифференциальная игра с сетевой структурой

Рассмотрим дифференциальную игру n агентов на сети. Пусть задан неориентированный граф (N, L) , где $N = \{1; 2; \dots; n\}$ – множество вершин, отождествляемых с агентами, а $L \in N \times N$ – множество ребер. Если $(i, j) \in L$, то существует ребро, соединяющее агентов $i \in N$ и $j \in N$.

Последовательность различных вершин $\{i_1, \dots, i_m\} \subset N$ задает путь в графе, если $(i_k, i_{k+1}) \in L$ для любого $k = 1, \dots, m - 1$. Длиной пути будем называть количество ребер, входящих в этот путь.

Будем говорить, что игрок j находится на расстоянии m от игрока i , если длина кратчайшего пути между ними равна m .

Для $m = 1, \dots, n - 1$ через $K^m(i)$ обозначим множество агентов, которые находятся на расстоянии m от i . Тогда $K^1(i) = \{j : (i, j) \in L\}$ – множество непосредственных соседей игрока i . Для удобства будем считать, что $K^0(i) = \{i\}$.

Путь называется циклом, если начальная и конечная вершины пути совпадают. В данной работе будем рассматривать только игры на графах без циклов.

Предположим, что каждый агент $i \in N$ может разорвать связь с любым другим агентом из множества $K^1(i)$ в любой момент времени.

Пусть $x_i(t) \in R^m$ – переменная состояния агента $i \in N$ в момент времени t , и $u_i(t) \in U_i \subset R^k$ – управляющая переменная агента $i \in N$.

Уравнения движения агентов имеют вид:

$$\dot{x}_i(\tau) = f_i(x_i(\tau); u_i(\tau)); \quad x_i(t_0) = x_i^0; \quad \text{при } \tau \in [t_0; T], i \in N, \quad (2.1)$$

где функции $f_i(x_i; u_i)$ непрерывно дифференцируемы по x_i и u_i .

Выигрыш агента i определяется по правилу:

$$H_i(x_i^0, u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T h_i(x_i(\tau); u_i(\tau)) d\tau + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \in K^m(i)} \delta^{m-1} \int_{t_0}^T h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau)) d\tau. \quad (2.2)$$

Здесь $\int_{t_0}^T h_i(x_i(\tau); u_i(\tau)) d\tau$ – выигрыш агента i , который он получает самостоятельно, $\delta^{m-1} \int_{t_0}^T h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau)) d\tau$ – выигрыш агента i , который он может получить при взаимодействии с игроком j , находящимся на расстоянии m от него. Предположим, что $h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau)) \geq 0$ для любых i и j . $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент, показывающий, что чем больше расстояние между агентами на сети, тем меньшее влияние они оказывают друг на друга. Через $x(t)$ обозначим вектор $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$.

Предположим, что агенты могут кооперироваться с целью достижения максимального суммарного выигрыша:

$$\sum_{i \in N} H_i(x_i^0, u_1, \dots, u_n). \quad (2.3)$$

Оптимальные кооперативные стратегии агентов $\bar{u}(t) = (\bar{u}^1(t), \dots, \bar{u}^n(t))$, для $t \in [t_0; T]$ определим по правилу

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{u^1(t), \dots, u^n(t)} \sum_{i \in N} H_i(x_i^0, u_1, \dots, u_n). \quad (2.4)$$

Траектория $\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \bar{x}^2(t), \dots, \bar{x}^n(t))$, соответствующая оптимальным стратегиям $\bar{u}^1(t), \dots, \bar{u}^n(t)$, – оптимальная кооперативная траектория. Тогда максимальный совместный выигрыш игроков имеет вид:

$$\sum_{i \in N} \int_{t_0}^T h_i(\bar{x}_i(\tau); \bar{u}_i(\tau)) d\tau + \\ + \sum_{i \in N} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \in K^m(i)} \delta^{m-1} \int_{t_0}^T h_i^j(\bar{x}_i(\tau); \bar{x}_j(\tau); \bar{u}_i(\tau); \bar{u}_j(\tau)) d\tau. \quad (2.5)$$

Обозначим исходную игру через $\Gamma(x_0, T - t_0)$, а подыгру, начинающуюся в момент t из точки $\bar{x}(t)$, через $\Gamma(\bar{x}(t), T - t)$.

Введем также дополнительные обозначения и определения.

Пусть $S \subset N$, тогда (S, L_S) – подграф графа (N, L) , который содержит только вершины из S и ребра из L , у которых обе концевые вершины лежат в S .

Вершины $i, j \in N$ называются связными в графе (N, L) , если найдется путь в (N, L) , соединяющий эти вершины. Граф (N, L) называется связным, если две любые вершины $i, j \in N$ связны в (N, L) . Подмножество $K \subset N$ называется связной компонентой графа (N, L) , если подграф (K, L_K) является связным, но для любого $j \in N \setminus K$ подграф $(K \cup j, L_{K \cup j})$ не является связным. Через $C^L(N)$ обозначим множество всех связных компонент графа (N, L) .

3. Кооперативные принципы оптимальности

Для построения кооперативных принципов оптимальности будем использовать характеристическую функцию, предложенную в работе [7] для дифференциальных игр на сетях:

$$\begin{aligned} V(\{i\}; x_0, T - t_0) &= \int_{t_0}^T h_i(x_i(\tau); u_i(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, \\ V(S; x_0, T - t_0) &= \sum_{i \in S} V(\{i\}; x_0, T - t_0) + \\ &+ \sum_{i \in S} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \in K_S^m(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau); \bar{x}^j(\tau); \bar{u}^i(\tau); \bar{u}^j(\tau)) d\tau \right), \quad S \subset N. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $K_S^m(i)$ – множество агентов, которые находятся на расстоянии m от i в подграфе (S, L_S) . Поскольку игроки имеют возможность разорвать связи (ребра) с другими игроками в любой момент времени, а мгновенные выигрыши h_i^j неотрицательны, в формуле (3.1) нет операции минимизации по оставшимся игрокам (минимизации по управлениям игроков из $N \setminus S$, как в классическом варианте характеристической функции [12]), поскольку минимизация и заключается в том, чтобы разорвать связь с игроками из S . При этом при вычислении $V(S; x_0, T - t_0)$ для агентов из коалиции S используются

оптимальные кооперативные стратегии, что существенно упрощает построение характеристической функции. В работе [11] было показано, что при отсутствии циклов на графе в рассматриваемом классе игр такая характеристическая функция выпукла.

3.1. Решение усредненного дерева

После построения характеристической функции можно выбрать любой известный кооперативный принцип оптимальности для получения оптимальных дележей.

Обозначим через $L(x_0, T - t_0)$ множество всех дележей игры:

$$\begin{aligned} L(x_0, T - t_0) = \{ \xi(x_0, T - t_0) = (\xi_1(x_0, T - t_0), \dots, \xi_n(x_0, T - t_0)) : \\ \sum_{i \in N} \xi_i(x_0, T - t_0) = V(N; x_0, T - t_0), \\ \xi_i(x_0, T - t_0) \geq V(\{i\}; x_0, T - t_0), i \in N. \} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Одним из популярных кооперативных принципов оптимальности является С-ядро.

Определение 3.1 ([3]). *С-ядром кооперативной дифференциальной игры называется подмножество дележей вида*

$$\begin{aligned} C(x_0, T - t_0) = \{ \xi(x_0, T - t_0) \in L(x_0, T - t_0) : \\ \sum_{i \in S} \xi_i(x_0, T - t_0) \geq V(S; x_0, T - t_0), S \subset N \}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

В работе [11] для рассматриваемого класса игр при использовании характеристической функции, построенной по правилу (3.1), были получены необходимые и достаточные условия принадлежности дележа С-ядру. Для удобства приведем это утверждение здесь.

Пусть $D^m(i)$ – множество пар вершин, которые находятся на расстоянии m друг от друга и агент i лежит на пути между ними (i может быть концевой вершиной пути). Для пары вершин $\{p, q\}$, расстояние между которыми равно m , обозначим через $\Phi^{p,q}$ множество векторов вида $\phi^{p,q} = (\phi_{i_1}^{p,q}, \dots, \phi_{i_{m+1}}^{p,q})$, таких, что $\sum_{j=1}^{m+1} \phi_{i_j}^{p,q} = 1, 0 \leq \phi_{i_j}^{p,q} \leq 1$, для всех $j = \overline{1, m+1}$.

Для удобства обозначим

$$\begin{aligned}\bar{h}_i^j(t) &= h_i^j(\bar{x}_i(t); \bar{x}_j(t); \bar{u}_i(t); \bar{u}_j(t)), \\ \bar{h}_{i,j}(t) &= \bar{h}_i^j(t) + \bar{h}_j^i(t).\end{aligned}$$

Теорема 3.1 ([11]). *Если характеристическая функция в кооперативной дифференциальной игре (2.1)–(2.2) на сети определена по правилу (3.1), то делёж $\xi(x_0, T - t_0)$ принадлежит С-ядру тогда и только тогда, когда его можно представить в следующем виде*

$$\xi_i(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^T \bar{h}_i^i(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^r \delta^{m-1} \sum_{\{p,q\} \in D^m(i)} \int_{t_0}^T \phi_i^{p,q} \left(\bar{h}_q^p(\tau) + \bar{h}_p^q(\tau) \right) d\tau, \quad (3.4)$$

для всех $i \in N$, где $\phi^{p,q} \in \Phi^{p,q}$ для каждой пары вершин $p \in N$, $q \in N$.

Теорема (3.1) говорит о том, что в дележах из С-ядра выигрыш $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$, который получают два агента p и q от взаимодействия друг с другом должен делиться между агентами, которые находятся на кратчайшем пути между p и q . Коэффициент $\phi_i^{p,q}$ показывает какую долю от величины $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$ получает агент i , лежащий на пути из p в q . Это можно интерпретировать следующим образом: каждый агент пути из p в q может разорвать ребро, принадлежащее этому пути, тем самым нарушив взаимодействие p и q , а значит, он вправе рассчитывать на некоторую долю от выигрыша, который является результатом взаимодействия этих агентов.

В работе [11] также получены формулы для вычисления двух делёжей из С-ядра: вектора Шепли [10] и позиционного значения [5], [2]. При построении вектора Шепли выигрыш $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$ делится поровну между всеми агентами, лежащими на пути из p в q . В позиционном значении учитывается сколько ребер рассматриваемого пути инцидентно каждому агенту пути. И доля $\phi_i^{p,q}$, которую получает агент i , пропорциональна числу таких ребер. Таким образом, конечные вершины пути p и q получают в два раза меньше от $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$, чем промежуточные.

В данной работе в качестве кооперативного принципа оптимальности рассмотрим решение усредненного дерева $AT(V, L) = (AT_1(V, L), \dots, AT_n(V, L))$, предложенное в [4]. Это решение для рассматриваемого класса игр позволит учесть то, что агент, разрывая связь на некотором пути, нарушает взаимодействие агентов не только на этом пути, но и может отрезать их от агентов, не лежащих на этом пути. Отличительной особенностью этого решения, согласно [4], является свойство компонентой справедливости. Это свойство заключается в том, что при удалении ребра (i, j) из графа, две компоненты, на которые распадается компонента, содержащая это ребро, имеют одинаковые средние изменения выигрыша. Пусть ребро (i, j) принадлежит компоненте связности K . При удалении (i, j) компонента K распадается на две компоненты связности. Пусть K_i – компонента в графе $N, L \setminus (i, j)$, содержащая i , а K_j – содержащая j , тогда свойство компонентой справедливости имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K_i|} \sum_{p \in K_i} (AT_p(V, L) - AT_p(V, L \setminus (i, j))) &= \\ &= \frac{1}{|K_j|} \sum_{p \in K_j} (AT_p(V, L) - AT_p(V, L \setminus (i, j))). \end{aligned}$$

В [4] также показано, что если характеристическая функция выпукла, то решение усредненного дерева принадлежит С-ядру.

Введем необходимые обозначения для определения значения усредненного дерева.

Пусть $K \in C^L(N)$. Любая вершина $i \in K$ индуцирует ориентированное дерево $T(i)$ с корнем в вершине i следующим образом. Для любого $j \in K \setminus i$ на единственном пути в (K, L_K) от i к j неориентированные ребра заменяются на ориентированные так, что первой вершиной в любом ориентированном ребре является вершина, появляющаяся первой на пути из i в j .

$S_{T(i)}(j)$ – множество последователей j в $T(i)$, т.е. множество вершин, которые могут быть достигнуты из j в $T(i)$ по ориентированному пути. Пусть $S_{T(i)}^c(j) = S_{T(i)}(j) \cup j$. $P_{T(i)}(j) = \{h \in K : (j, i) \in T(i)\}$ – множество непосредственных последователей j в $T(i)$.

Пусть

$$t_j^i(V, L) = V(S_{T(i)}^c(j); x_0, T - t_0) - \sum_{h \in P_{T(i)}(j)} V(S_{T(i)}^c(h); x_0, T - t_0).$$

Определение 3.2 ([4]). *Решением усредненного дерева называется вектор $AT(V, L) = (AT_1(V, L), \dots, AT_n(V, L))$, где*

$$AT_j(V, L) = \frac{1}{|K|} \sum_{i \in K} t_j^i(V, L), \quad j \in K, \quad K \in C^L(N). \quad (3.5)$$

Для произвольной пары вершин p, q рассмотрим путь из p в q . Поставим в соответствие каждой вершине i этого пути подграф $K_{p,q}(i)$ по следующему правилу. В исходном графе удаляются ребра, принадлежащие пути из p в q (или ребро, если вершина крайняя), для которых вершина i является концевой. В качестве $K_{p,q}(i)$ выбираем связный подграф, которому принадлежит вершина i , после удаления указанных ребер.

Обозначим через $i_{p,q}^-$ вершину, которая предшествует вершине i на пути из p в q , через $i_{p,q}^+$ вершину, которая стоит после i на пути из p в q . Тогда подграф $K_{p,q}(i)$ можно получить удалением из K вершин $S_{T(i)}^c(i_{p,q}^-) \cup S_{T(i)}^c(i_{p,q}^+)$ и инцидентных им ребер. Таким образом

$$|K_{p,q}(i)| = |K| - |S_{T(i)}^c(i_{p,q}^-)| - |S_{T(i)}^c(i_{p,q}^+)|.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть игрок j принадлежит связной компоненте K . Если характеристическая функция в кооперативной дифференциальной игре на сети (2.1)–(2.2) определена по правилу (3.1), то решение усредненного дерева имеет следующий вид*

$$AT_j(V, L) = V(\{j\}; x_0, T - t_0) + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{\{p,q\} \in D^m(j)} \frac{|K_{p,q}(j)|}{|K|} \int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau.$$

Доказательство. В [4] было показано, что решение усредненного дерева в выпуклых играх принадлежит С-ядру. Согласно Теореме 3.1 в дележах из С-ядра выигрыш $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$, который получают два игрока p и q при взаимодействии друг с другом должен делиться между

игроками, которые находятся на кратчайшем пути между этими игроками.

Тогда

$$AT_j(V, L) = V(\{j\}; x_0, T - t_0) + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{\{p,q\} \in K^m(j)} \phi_{p,q}^j \int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau,$$

где $\phi_{p,q}^j \in [0, 1]$ – некоторый коэффициент, который определяет какую долю величины $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$ получит игрок j .

Для того, чтобы найти значение $\phi_{p,q}^j$ определим в каких слагаемых выражения (3.5) встречается $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$.

Заметим, что в $t_j^i(V, L)$ значение $\int_{t_0}^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau$ присутствует, если все вершины пути из p в q полностью лежат в $S_{T(i)}^c(j)$, но при этом не лежат полностью ни в одном из $S_{T(i)}^c(h)$ для всех $h \in P_{T(i)}(j)$. А это выполняется только для вершин из множества $K_{p,q}(j)$.

Таким образом, мы получаем, что $\phi_{p,q}^j = \frac{|K_{p,q}(j)|}{|K|}$, и теорема доказана. $\square$

Заметим, что полученная формула позволяет построить решение усредненного дерева без вычисления значения характеристической функции от каждой коалиции, что существенно упрощает решение.

Еще одним привлекательным свойством полученного решения является его динамическая устойчивость [1]. Пусть $AT(V(\bar{x}(t), T-t), L)$ – значение усредненного дерева в подыгре $\Gamma(\bar{x}(t), T-t)$, тогда

$$\begin{aligned} AT_i(V(\bar{x}(t), T-t), L) &= \\ &= \int_t^T h_i(\bar{x}_i(\tau); \bar{u}_i(\tau)) d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{\{p,q\} \in K^m(j)} \frac{|K_{p,q}(j)|}{|K|} \int_t^T \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Значит, справедлива следующая формула, подтверждающая динамическую устойчивость полученного решения

$$\begin{aligned}
 AT_i(V, L) = & \\
 = & \int_{t_0}^t h_i(\bar{x}_i(\tau); \bar{u}_i(\tau)) d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{\{p,q\} \in K^m(j)} \frac{|K_{p,q}(j)|}{|K|} \int_{t_0}^t \bar{h}_{p,q}(\tau) d\tau + \\
 & + AT(V(\bar{x}(t), T-t), L), \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

4. Пример

Рассмотрим простой пример дифференциальной игры на сети для иллюстрации полученного решения.

Пусть уравнения движения агентов имеют вид:

$$\dot{x}_i(t) = -ax_i(t) + u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0. \quad (4.1)$$

Имеются ограничения на управления агентов:

$$u_i \geq 0,$$

$$\sum_{i \in N} u_i(t) \leq u_{max}, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Выигрыш игрока i имеет вид

$$\begin{aligned}
 H_i(x_i^0, u_1, \dots, u_n) = & \\
 = & \int_{t_0}^T u_i(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \in K^m(i)} \delta^{m-1} \int_{t_0}^T \alpha u_j(\tau) d\tau - cx_i(T). \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Здесь $\int_{t_0}^T u_i(\tau) d\tau - c_i x_i(T)$ – выигрыш игрока i , который он может получить самостоятельно, $c \in (0, 1)$, а $\delta^{m-1} \int_{t_0}^T u_j(\tau) d\tau$ – выигрыш игрока i , который он получает при взаимодействии с игроком $j \in K^m(i)$, $\delta \in (0, 1)$.

Рассмотрим игру четырех лиц на сети, структура которой показана на Рис. 1.

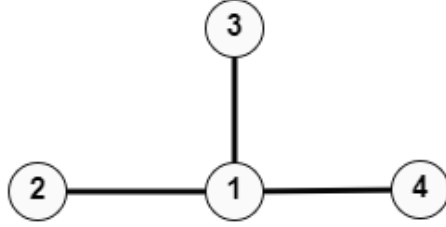


Рисунок 1. Игра четырёх лиц на сети

Предположим, что игроки имеют возможность кооперироваться с целью получения максимального суммарного выигрыша

$$\max_{u^1, \dots, u^4} \sum_{i \in N} \left(\int_{t_0}^T u_i(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^2 \sum_{j \in K^m(i)} \delta^{m-1} \int_{t_0}^T \alpha u_j(\tau) d\tau - c x_i(T) \right). \quad (4.3)$$

Воспользуемся принципом максимума [9] для определения оптимальных кооперативных стратегий.

Гамильтониан имеет вид:

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i \in N} \left(u_i(t) + \sum_{m=1}^2 \sum_{j \in K^m(i)} \delta^{m-1} \alpha u_j(t) \right) + \sum_{i \in N} \psi_i (-a x_i(t) + u_i(t)). \quad (4.4)$$

Необходимо найти максимум линейной относительно $u_1, \dots, u_4$ функции. При ограничениях

$$u_i \geq 0,$$

$$\sum_{i \in N} u_i \leq u_{max}.$$

Обозначим через d_i коэффициенты перед u_i в этой функции, при этом $d_i = 1 + \sum_{m=1}^2 \sum_{j: i \in K^m(j)} \delta^{m-1} + \psi_i$. Учитывая сетевую структуру игры, получаем, что

$$d_1 = 1 + 3\alpha + \psi_1,$$

$$d_2 = 1 + \alpha(1 + 2\delta) + \psi_2,$$

$$d_3 = 1 + \alpha(1 + 2\delta) + \psi_3,$$

$$d_4 = 1 + \alpha(1 + 2\delta) + \psi_4.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = a\psi_i, \quad i \in N.$$

Найдем решение этой системы, удовлетворяющее условиям трансверсальности:

$$\psi_i(T) = -c.$$

Получаем

$$\psi_i(t) = -ce^{a(t-T)}, \quad i \in N.$$

Тогда

$$d_1(t) = 1 + 3\alpha - ce^{a(t-T)},$$

$$d_2(t) = d_3(t) = d_4(t) = 1 + \alpha(1 + 2\delta) - ce^{a(t-T)}.$$

Поскольку $c \in (0, 1)$, $d_i(t) > 0$ для любого $t \in [t_0, T]$. Учитывая ограничения на управления, линейность гамильтониана относительно управлений и то, что $d_1(t) = \max\{d_1(t), d_2(t), d_3(t), d_4(t)\}$ для любого $t \in [t_0, T]$, получаем оптимальные управления в следующем виде:

$$\bar{u}_1 = u_{max}, \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = \bar{u}_4 = 0.$$

Найдем значения характеристической функции:

$$V(N, x_0, T - t_0) =$$

$$= u_{max}(1 + 3\alpha)(T - t_0) + \frac{cu_{max}}{a}(e^{-a(T-t_0)} - 1) - ce^{-a(T-t_0)} \sum_{i=1}^4 x_i^0,$$

$$V(\{i\}, x_0, T - t_0) = -ce^{-a(T-t_0)} x_i^0, \quad i = 2, 3, 4,$$

$$V(\{1\}, x_0, T - t_0) = u_{max}(T - t_0) + \frac{cu_{max}}{a}(e^{-a(T-t_0)} - 1) - ce^{-a(T-t_0)} x_1^0,$$

$$V(\{i, j\}, x_0, T - t_0) = -ce^{-a(T-t_0)}(x_i^0 + x_j^0), \quad 1 < i < j,$$

$$V(\{i, j, k\}, x_0, T - t_0) = -ce^{-a(T-t_0)}(x_i^0 + x_j^0 + x_k^0), \quad 1 < i < j < k,$$

$$V(\{1, i\}, x_0, T - t_0) = -ce^{-a(T-t_0)}(x_1^0 + x_i^0) + u_{max}(1 + \alpha)(T - t_0) + \frac{cu_{max}}{a}(e^{-a(T-t_0)} - 1), \quad 1 < i,$$

$$V(\{1, i, j\}, x_0, T - t_0) = -ce^{-a(T-t_0)}(x_1^0 + x_i^0 + x_j^0) + u_{max}(1 + 2\alpha)(T - t_0) + \frac{cu_{max}}{a}(e^{-a(T-t_0)} - 1), \quad 1 < i < j.$$

Найдем решение усредненного дерева в данной игре. Агент 1 лежит на путях, между парами вершин $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$. Рассмотрим путь $\{1, 2\}$. Заметим, что, разрывая связь $(1, 2)$, агент 1 отрезает доступ агента 2 к вершинам $\{1, 3, 4\}$, т.е. в подграф $K_{1,2}(1)$ входят вершины $\{1, 3, 4\}$, значит $\phi_{1,2}(1) = \frac{3}{4}$. Аналогично, $\phi_{1,3}(1) = \phi_{1,4}(1) = \frac{3}{4}$. В подграф $K_{2,3}(1)$ входят вершины $\{1, 4\}$, значит $\phi_{1,2}(1) = \frac{2}{4}$. Аналогично, $\phi_{2,4}(1) = \phi_{3,4}(1) = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} AT_1(V, L) &= V(\{1\}, x_0, T - t_0) + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^4 \int_{t_0}^T \bar{h}_{1,i}(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \delta \left(\int_{t_0}^T \bar{h}_{2,3}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T \bar{h}_{3,4}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T \bar{h}_{2,4}(\tau) d\tau \right) = \\ &= u_{max} \left(1 + \frac{9}{4} \alpha \right) (T - t_0) + \frac{cu_{max}}{a} (e^{-a(T-t_0)} - 1) - ce^{-a(T-t_0)} x_1^0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Аналогично для остальных агентов:

$$AT_i(V, L) = -ce^{-a(T-t_0)} x_i^0 + \frac{u_{max} \alpha (T - t_0)}{4}, \quad i = 2, 3, 4.$$

Интересно сравнить полученный результат с вектором Шепли в данной игре. Учитывая, что выигрыш от взаимодействия любой пары агентов должен делиться поровну между агентами, лежащими на пути между ними, нетрудно получить выигрыши игроков согласно вектору Шепли:

$$Sh_i(V, L) = -ce^{-a(T-t_0)} x_i^0 + \frac{u_{max} \alpha (T - t_0)}{2}, \quad i = 2, 3, 4,$$

$$Sh_1(V, L) = u_{max} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \right) (T - t_0) + \frac{cu_{max}}{a} (e^{-a(T-t_0)} - 1) - ce^{-a(T-t_0)} x_1^0.$$

Заметим, что в рассматриваемом примере агент 1 получает меньше согласно вектору Шепли по сравнению с решением усредненного дерева. Остальные же игроки получают больше. Это связано с тем, что решение усредненного дерева для определения веса агента на каждом пути учитывает не только принадлежность агента этому пути, но и возможность агента, разорвав инцидентные ему ребра, нарушить взаимодействие вершин пути с вершинами, не лежащими на этом пути.

5. Заключение

В работе многоагентная система рассмотрена как дифференциальная игра с сетевой структурой. Для построения кооперативного решения использована характеристическая функция специального вида, учитывающая сетевую структуру игры. В качестве кооперативного принципа оптимальности исследовано решение усредненного дерева. Получена формула для этого дележа, которая позволяет не находить значение характеристической функции от каждой коалиции, что существенно упрощает вычисления. Полученные решения, а также их отличия от решений, рассмотренных ранее, проиллюстрированы на примере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник ЛГУ. 1977. № 4. С. 46–52.
2. Borm P.E.M., Owen G., Tijs S.H. *On the position value for communication situations* // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 1992. Vol. 5(3). P. 305–320.
3. Gillies D.B. *Solutions to general non-zero-sum games* // In: Tucker A.W., Luce R. D. (eds.) *Contributions to the Theory of Games IV*, Annals of Mathematics Studies 40. Princeton: Princeton University Press. 1959. P. 47–85.

4. Herings J.J., van der Laan G., Talman D. *The average tree solution for cycle-free graph games* // Games and Economic Behavior. 2008. Vol. 62. P. 77–92.
5. Meessen R. *Communication games*. Master's thesis. Department of Mathematics. University of Nijmegen, The Netherlands (in Dutch). 1988.
6. Petrosyan L., Yeung D. *Shapley value for differential network games: Theory and application* // Journal of Dynamics and Games. 2021. V. 8(2). P. 151–166.
7. Petrosyan L., Yeung D. *Construction of dynamically stable solutions in differential network games* // In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020.
8. Petrosyan L., Yeung D.W.K., Pankratova Y. *Cooperative differential games with partner sets on networks*. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. Vol. 27(3). P. 286–295.
9. Pontryagin, L., Boltyanskii, V., Gamkrelidze, R., Mishchenko, E. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*; Interscience: New York, NY, USA, 1962.
10. Shapley L.S. *A value for n -person games* // In: Contributions to the Theory of Games, vol. 2, Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
11. Tur A. and Petrosyan L. *The core of cooperative differential games on networks*. In: Pardalos P., Khachay M., Mazalov V. (eds.). Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13367. Springer, Cham.
12. Von Neumann J. and Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press. 1953.

AVERAGE TREE SOLUTION IN MULTI-AGENT SYSTEMS WITH NETWORK STRUCTURE

Anna V. Tur, Saint Petersburg State University, Cand.Sc., associated prof. (a.tur@spbu.ru),

Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (l.petrosyan@spbu.ru).

Abstract: The paper proposes the use of methods of differential games to find the optimal solution in a multi-agent system with a network structure. A class of differential games on cycle-free graphs is described. A characteristic function of a special form is used, which takes into account the network structure of the game. The average tree solution is considered as a cooperative optimality principle. An illustrative example is considered.

Keywords: multi-agent systems, differential games, games on networks, cooperative game, average tree solution.