

УДК 519.17

ББК 22.176

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ ВЕРШИН ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА*

ВИТАЛИЯ А. ХИТРАЯ

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Институт математики и информационных технологий

Петрозаводский государственный университет

185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33

ВЛАДИМИР В. МАЗАЛОВ

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

e-mail: dobvitalia@yandex.ru, vmazalov@krc.karelia.ru

В работе рассмотрен теоретико-игровой подход к вычислению значения центральности вершин ориентированного графа, основанный на числе появления вершин в путях фиксированной длины. Предложено определять центральность вершины как решение кооперативной игры, где характеристическая функция задается как число простых путей фиксированной длины в подграфах, соответствующих коалициям. Вводится понятие интегральной центральности как значения определенного интеграла от функции дележа. Продемонстрировано, что данная мера центральности удовлетворяет аксиомам Boldi–Vigna.

©2023 В.А. Хитрая, В.В. Мазалов

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-11-20015, проводимого совместно с органами власти Республики Карелия с финансированием из Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК).

Ключевые слова: теория графов, центральность, ориентированный граф, кооперативная игра.

Поступила в редакцию: 17.07.23 *После доработки:* 30.08.23 *Принята к публикации:* 11.09.23

1. Введение

При решении большого числа прикладных задач необходим анализ сети, описывающей рассматриваемую систему. Сеть в этом случае представима в виде графа. Существует большой спектр методов, позволяющих исследовать структурные свойства графа; один из ключевых – вычисление значения центральности вершин графа. Центральность позволяет выявить наиболее значимые вершины, оценить, насколько удачно они расположены в графе, как они влияют на процессы, протекающие в сети.

Существуют различные подходы к вычислению центральности вершин в графе. Простейшей с точки зрения вычисления является степенная центральность (degree centrality) [22], которая в общем случае демонстрирует сколько соседей у вершины. При анализе ориентированных графов могут учитываться числа входящих и исходящих связей (in-degree centrality, out-degree centrality) [18]. Исторически одним из первых подходов является центральность по посредничеству (betweenness centrality) [5,10]. Данная мера центральности основана на вычислении числа кратчайших путей, соединяющих все пары вершин в графе. Центральность вершины в этом случае определяется количеством путей, проходящих через рассматриваемую вершину. Также одним из распространенных методов является центральность по близости (closeness centrality) [7,21,6], где наиболее центральная вершина находится ближе всех к другим вершинам сети.

В последние годы все более широкое распространение получают теоретико-игровые меры центральности [4,12–17], рассматривающие группы вершин в качестве коалиций игроков. Подобный подход позволяет учитывать групповое влияние вершин на систему.

В данной работе представлен теоретико-игровой подход к вычислению значения центральности вершин ориентированного графа, основанный на числе появлений вершины в направленных путях различной длины, включая циклы.

2. Значение Майерсона как мера центральности в ориентированных графах

Определим на ориентированном графе $G = (N, E)$, где N – множество вершин, E – множество ребер, кооперативную игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$. В данной игре N – множество игроков, на котором задана характеристическая функция $v(K)$, $K \subset N$, равная числу простых путей фиксированной длины $k = 1, 2, \dots$ в подграфе, порожденном множеством игроков K . Как показано в работе [14], для ранжирования вершин в неориентированном графе может быть использовано решение кооперативной игры в форме Шепли-Майерсона [17]. Но аналогичный подход можно применять и для ориентированных графов.

Теорема 2.1. *Значение Майерсона для игрока $i \in N$ в кооперативной игре на ориентированном графе G , где характеристическая функция $v(K)$ определяется как количество направленных простых путей фиксированной длины k в подграфе, порожденном множеством $K \subset N$, может быть найдено по формуле*

$$X_i = \frac{n_k(i)}{k + 1}, \quad (2.1)$$

где $n_k(i)$ есть число простых путей длины k , проходящих через вершину i .

Доказательство данной теоремы для ориентированных графов аналогично доказательству в случае неориентированных. Приведем его здесь. Для доказательства утверждения достаточно доказать выполнение двух аксиом [17].

Доказательство. Аксиома 1. Если S – связная компонента графа G и $v(S)$ – выигрыш коалиции S , то

$$\sum_{i=1}^{|S|} X_i = v(S).$$

Для простоты предположим, что граф G связный. В нашем случае $v(N)$ это количество путей (направленных) длины k в графе G . Перенумеруем все пути $l \in \{1, 2, \dots, v(N)\}$. Определим $\delta_l(i)$ следующим

образом. Будем считать $\delta_l(i) = 1$, если вершина i находится в пути l и 0, иначе.

Тогда

$$\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n n_k(i) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{v(N)} \delta_l(i) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{v(N)} \sum_{i=1}^n \delta_l(i).$$

Каждый путь состоит из $k+1$ разных вершин (i_1, \dots, i_{k+1}) . Отсюда $\sum_{i=1}^n \delta_l(i) = k+1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{v(N)} \sum_{i=1}^n \delta_l(i) = v(N).$$

Таким образом, Аксиома 1 верна. Перейдем к Аксиоме 2.

Аксиома 2. Для любой пары игроков $i, j \in N$ выигрыш изменится на одинаковую величину при добавлении или удалении ребра в графе G .

Пусть, например, $ij \in E(G)$. Удалим это ребро, в данном случае, направленное. Тогда все пути длины k , которые ранее проходили через ребро ij , будут вычтены при подсчете путей одновременно из $n_k(i)$ и $n_k(j)$ в новом графе $G - ij$. Отсюда,

$$X_i(G) - X_i(G - ij) = X_j(G) - X_j(G - ij).$$

Таким образом, аксиома 2 также верна, что доказывает теорему. \square

3. Примеры вычисления значения Майерсона для ориентированных графов

Как следует из теоремы 2.1, значение Майерсона определяется через число простых путей заданной длины. Задача вычисления числа простых путей, проходящих через вершину, является нетривиальной. Здесь мы покажем, как можно вычислить это число для путей длины 2 и 3. Ограничимся рассмотрением ориентированных графов, в которых нет двунаправленных ребер. Для вычислений нам понадобится матрица смежности и ее степени 2 и 3.

Утверждение 3.1. Пусть A – матрица смежности ориентированного графа G и A^2 – ее квадрат. Тогда число появлений вершины i в простых путях длины 2 $n_2(i)$ может быть вычислено по формуле

$$n_2(i) = \sum_{k=1}^n \left(a_{ik}^{(2)} + a_{ki}^{(2)} \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} a_{ij}.$$

Первое выражение соответствует числу всех простых путей длины 2, начинающихся или заканчивающихся в рассматриваемой вершине i . Второе выражение учитывает пути, в которых вершина i лежит в середине пути.

Утверждение 3.2. Пусть A – матрица смежности ориентированного графа G и A^2, A^3 – квадрат и куб матрицы A . Тогда число появлений вершины i в простых путях длины 3 $n_3(i)$ может быть вычислено по формуле

$$n_3(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(a_{ik}^{(3)} + a_{ki}^{(3)} \right) + \sum_{k=1}^n a_{ki} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}^{(2)} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(2)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}.$$

Здесь первое слагаемое соответствует числу всех простых путей длины 3, начинающихся или заканчивающихся в вершине i . Второе слагаемое учитывает пути, в которых вершина i лежит на второй позиции в пути, а третье учитывает пути, в которых вершина i лежит на третьей позиции в пути.

Пример 1. Проиллюстрируем приведенную формулу на примере ориентированного графа G_1 из 6 вершин (рис. 1) с матрицей смежности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем, например, пути длины $d = 3$, проходящие через вер-

шину 3. Всего таких путей 8:

3654 3612
1365 5361
6132 6134 6532 6534

В первой строке перечислены пути, начинающиеся в вершине 3. Во второй строке пути, в которых вершина 3 стоит на втором месте, и в третьей строке вершина 3 стоит на третьем месте. Других путей с вершиной 3 нет.

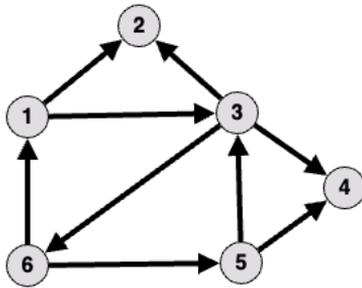


Рисунок 1. Граф G_1

Теперь вычислим квадрат и куб матрицы смежности.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

По формуле из утверждения 3.2 находим

$$\begin{aligned} n_3(3) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^6 (a_{3k}^{(3)} + a_{k3}^{(3)}) + \sum_{k=1}^6 a_{k3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 a_{3j}^{(2)} + \sum_{k=1}^6 a_{k3}^{(2)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 a_{3j} = \\ &= (a_{32}^{(3)} + a_{34}^{(3)}) + (a_{13}a_{35}^{(2)} + a_{53}a_{31}^{(2)}) + (a_{63}^{(2)}a_{32} + a_{63}^{(2)}a_{34}) = 2 + 2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Это совпадает с числом простых путей длины 3, проходящих через вершину 3.

4. Интегральная центральность

Выше мы рассмотрели на ориентированном графе $G = (N, E)$, $|N| = n$, кооперативную игру n лиц $\Gamma = \langle N, v(K) \rangle$, где характеристическая функция $v(K)$ определялась как число направленных путей фиксированной длины d , проходящих через рассматриваемую вершину, в подграфе, порожденном коалицией K . Варьируя длину пути d , можно определить характеристическую функцию в более общем виде как полином:

$$v(K) = \sum_{i \in K} \sum_{d=1}^{n-1} n_d(i) r^d, \quad r \in [0, 1],$$

где $n_d(i)$ есть число простых путей длины d , проходящих через вершину i .

Величина r может определяться по аналогии с подходом Джексона [11], где игроки получают r за создание прямой связи, коалиция получает r^2 за создание пути длины 2 и т.д. Здесь игроки, образующие связь, получают r за появление *пары* в путях длины 1, r^2 за появления *тройки* в путях длины 2 и т.д.

Аналогично разделу 2 можно показать (см. также [15]), что распределение выигрыша коалиции между игроками в соответствии с значением Майерсона имеет вид:

$$X_i(r) = \frac{n_1(i)}{2} r + \frac{n_2(i)}{3} r^2 + \dots + \frac{n_{n-1}(i)}{n} r^{n-1} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{d+1} r^d.$$

Выбирая конкретное значение r , можно получить значение функции дележа $X_i(r)$ для всех игроков. Для исключения шага с выбором значения r при ранжировании могут быть использованы значения определенного интеграла от функции, определяющей дележ, по переменной r на отрезке $[0, 1]$. Функции дележа представляют собой полиномиальные функции, что позволяет легко записать выражения для определения центральности:

$$I_i = \int_0^1 X_i(r) dr = \int_0^1 \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{d+1} r^d dr = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{(d+1)^2}. \quad (4.1)$$

Определение 4.1. Значение $I_i = \int_0^1 X_i(r) dr = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{(d+1)^2}$, где $X_i(r)$ – функция, задающая дележ в кооперативной игре Γ на графе, называется интегральной центральностью вершины i .

Пример 2. Рассмотрим в качестве примера фрагмент графа цитирования сети Math-Net (рис. 2). В данном случае наличие ориентированного ребра ij означает, что автор i ссылается на работу автора j .

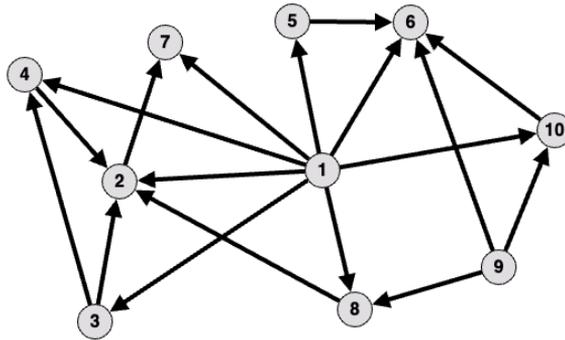


Рисунок 2. Фрагмент графа сети Math-Net

Найдем интегральную центральность вершин данного графа. Обозначим через n_k вектор числа появлений вершин графа в путях длины k .

$$\begin{aligned} n_1 &= (8, 5, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 3, 3), \\ n_2 &= (7, 9, 4, 4, 1, 3, 4, 3, 2, 2), \\ n_3 &= (4, 6, 3, 3, 0, 0, 5, 2, 1, 0), \\ n_4 &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

все остальные $n_k, k \geq 5$ равны нулю. Тогда значения интегральной центральности согласно определению равны:

$$\begin{aligned} I &= \frac{n_1}{4} + \frac{n_2}{9} + \frac{n_3}{16} + \frac{n_4}{25} = \\ &= (3.067, 2.665, 1.421, 1.421, 0.611, 1.333, 1.296, 1.208, 1.034, 0.972). \end{aligned}$$

В результате, наибольшей центральностью обладает вершина 1, также важна вершина 2.

Вычислим интегральную центральность вершин для цикла и полного графа. Очевидно в силу симметрии, что центральности всех вершин в этом случае одинаковы и достаточно вычислить центральность одной из них.

Для всех вершин p -цикла дележ определяется функцией:

$$X(r) = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{n_d}{d+1} r^d = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{d+1}{d+1} r^d = \sum_{d=1}^{p-1} r^d.$$

Тогда значение интегральной центральности запишется следующим образом:

$$I_p = \int_0^1 X(r) dr = \int_0^1 \sum_{d=1}^{p-1} r^d dr = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{1}{d+1}.$$

Для вершин k -кликки справедлива формула

$$n_d(k) = (d+1)! \binom{k-1}{d}.$$

Действительно, в пути длины d : $l = (i_1, \dots, i_{d+1})$ вершина i может находиться на первом, втором, ..., $d+1$ -ом месте. Остальные d из $k-1$ вершин могут быть выбраны

$$A_{k-1}^d = \binom{k-1}{d} \cdot d!$$

способами. Следовательно,

$$X(r) = \sum_{d=1}^{k-1} \frac{n_d(k)}{d+1} r^d = \sum_{d=1}^{k-1} d! \binom{k-1}{d} r^d,$$

и тогда интегральная центральность равна

$$\begin{aligned}
 I_k &= \int_0^1 X(r)dr = \int_0^1 \sum_{d=1}^{k-1} d! \binom{k-1}{d} r^d dr = \frac{1}{k} \sum_{d=1}^{k-1} d! \binom{k}{d+1} = \\
 &= \sum_{d=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(d+1)(k-d-1)!}.
 \end{aligned}$$

5. Аксиомы центральности

В статье Boldi – Vigna [8] описана система аксиом центральности, основанная на проверке изменения меры центральности при изучении клик и направленных циклов. Следует проверить следующее: все ли вершины k -клики имеют одинаковое значение центральности; все ли вершины направленного p -цикла имеют одинаковое значение центральности; важнее ли вершины k -клики по сравнению с вершинами направленного p -цикла. Приведем формулировки аксиом, как они представлены в [8], [3].

A1 (аксиома размера). Рассмотрим граф $S_{k,p}$ (рис. 3), состоящий из двух компонент: k -клики и p -цикла. Мера центральности удовлетворяет аксиоме размера, если для каждого k существует число P_k , такое, что для всех $p \geq P_k$ в графе $S_{k,p}$ центральность вершины в p -цикле строго больше центральности вершины в k -клике, а для каждого p существует K_p , такое, что для всех $k \geq K_p$ центральность вершины в k -клике строго больше центральности вершины в p -цикле.

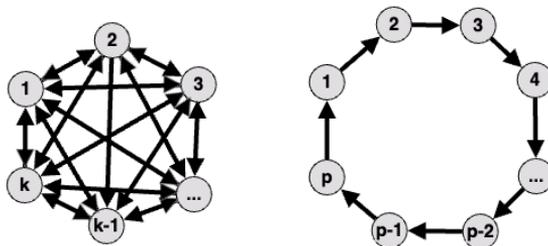


Рисунок 3. Граф $S_{k,p}$

А2 (*аксиома плотности*). Рассмотрим граф $D_{k,p}$ (рис. 4), состоящий из k -клик и p -цикла ($k, p \geq 3$), связанных двунаправленным мостом $x \longleftrightarrow y$, где x – вершина клики, а y – вершина цикла. Мера центральности удовлетворяет аксиоме плотности, если при $k = p$ центральность x строго больше центральности y .

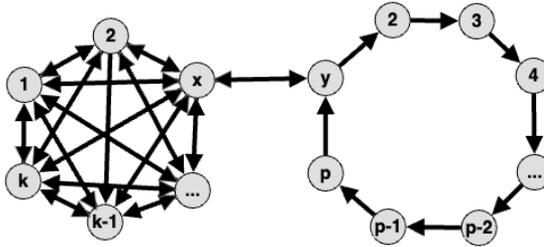


Рисунок 4. Граф $D_{k,p}$

А3 (*аксиома монотонности*). Мера центральности удовлетворяет аксиоме монотонности, если для любого графа G и каждой пары вершин x и y , таких, что ребро $x \rightarrow y$ не принадлежит множеству ребер E_G графа G , если добавить в G такое ребро, то центральность y возрастет.

Добавим к данной системе аксиому связности.

А4 (*аксиома связности*). Мера центральности удовлетворяет аксиоме связности, если для любого графа G и любых двух компонент связности G_1 и G_2 графа G , и каждой пары вершин $x \in G_1$ и $y \in G_2$, при добавлении ребра $x \rightarrow y$ центральность всех вершин в G_2 не убывает.

Докажем, что данные аксиомы выполняются для интегральной меры центральности.

А1. Для доказательства данной аксиомы достаточно показать, что центральности вершин как p -цикла, так и k -клик неограниченно возрастают при увеличении p и k . В предыдущем разделе было показано, что для всех вершин p -цикла интегральная центральность определяется функцией:

$$I_p^c = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{1}{d+1}.$$

Значение центральности вершин p -цикла можно оценить как $I_p = S_p - 1$, где S_p – сумма первых p членов гармонического ряда. Л. Эйлером было получено асимптотическое выражение для суммы первых n членов гармонического ряда:

$$S_p = \ln p + \gamma + \varepsilon_p,$$

где $\gamma = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера-Маскерони [23], ε_p – погрешность, $\varepsilon_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Тогда $I_p^c \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$.

Для вершин k -клик справедлива формула

$$I_k^q = \sum_{d=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(d+1)(k-d-1)!}.$$

Нетрудно заметить, что $I_k^q \geq I_k^c$, откуда следует неограниченный рост I_k^q , при $k \rightarrow \infty$.

A2. Выше мы отметили, что при $k = p$ $I_k^q(x) \geq I_k^c(y)$, т.е. центральность вершины x в клике больше центральности вершины y в цикле. При этом, для любого d число направленных путей длины d в клике $n_d^q(x)$ больше, чем число направленных путей длины d в цикле $n_d^c(y)$. Соединим вершину x из клики с вершиной y в цикле двуправленным мостом $x \longleftrightarrow y$. Тогда число путей любой длины d и в клике и в цикле увеличится на одну и ту же величину. Поэтому интегральная центральность вершины x по-прежнему будет больше центральности вершины y . Справедливость аксиомы A2 доказана.

A3. Аксиома A3 очевидно выполняется, т.к. после добавления ребра $x \rightarrow y$ вершина y будет встречаться в путях, оканчивающихся в ней, что увеличит значение центральности.

A4. Аксиома A4 выполняется, т.к. после добавления ребра $x \rightarrow y$ число направленных путей, проходящих через вершины из графа G_2 может только увеличиться.

Теорема 5.1. *Для интегральной центральности (4.1) аксиомы A1, A2, A3, A4 выполняются.*

Стоит отметить, что согласно [8] аксиомы A1, A2, A3 без каких-либо оговорок справедливы лишь для гармонической центральности [20].

6. Вычисление центральности вершин ориентированных графов с циклами

В предложенном подходе для определения центральности вершин в графе основной проблемой является вычисление числа простых путей (без циклов) фиксированной длины, проходящих через данную вершину. В работе [14] приведена модификация значения Майерсона на случай, когда кроме простых путей рассматриваются также и циклы. В этом случае удастся получить достаточно простые выражения для этой характеристики с использованием элементов матрицы смежности рассматриваемого графа. Для ранжирования в таком случае используется величина $\frac{s_i(k)}{k+1}$, где $s_i(k)$ – число появлений вершины i в путях длины k . Также в [14] приведены доказательства теорем о числе появления вершин в путях фиксированной длины, включая циклы, в неориентированных графах. Дальнейшее исследование показало, что аналогичная формула справедлива также и для числа появлений вершины в путях в ориентированных графах.

Теорема 6.1. Пусть A^d – матрица смежности ориентированного графа G , возведенная в степень d . Тогда число появлений вершины i в путях фиксированной длины d (включая циклы) $n_d(i)$ может быть вычислено по формуле

$$n_d(i) = \sum_{k=1}^n \left(a_{ik}^{(d)} + a_{ki}^{(d)} \right) + \sum_{l=1}^{d-1} \left[\sum_{k=1}^n a_{ki}^{(l)} \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(d-l)} \right]. \quad (6.1)$$

Доказательство. Первая сумма учитывает появления вершины i в начале и конце путей длины d . Величины $a_{ik}^{(d)}$ и $a_{ki}^{(d)}$ – элементы матрицы A^d – соответствуют числу путей длины d , начинающихся в вершине i и заканчивающихся в ней. Вторая сумма позволяет учесть появления рассматриваемой вершины и в середине путей длины d : $a_{ki}^{(l)}$ – элемент матрицы A^l , равный числу путей длины l , оканчивающихся в вершине i ; $a_{ij}^{(d-l)}$ – элемент матрицы A^{d-l} , описывающий число путей длины $d-l$, начинающихся в той же вершине. Складывая их произведения для всех допустимых l получим число появлений вершины i в середине путей фиксированной длины d . \square

Пример 3. Проиллюстрируем приведенную формулу на примере ориентированного графа G_2 из 6 вершин (рис. 5) с матрицей смежности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

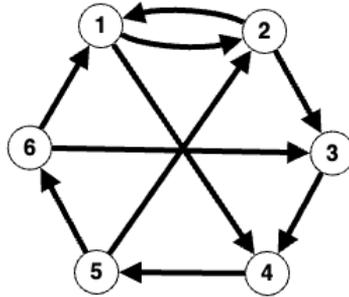


Рисунок 5. Граф G_2

Выпишем пути длины $d = 3$. Всего таких путей 25:

1212	2121	3456	4521	5212	6121
1234	2123	3452	4561	5612	6123
1452	2345		4523	5214	6345
1456	2145		4563	5614	6145
1214				5234	
				5634	

Вершина 2 встречается в путях длины 3 21 раз. Вычислим число появлений вершины 2 по формуле (6.1):

$$n_3(2) = \sum_{k=1}^6 \left(a_{2k}^{(3)} + a_{k2}^{(3)} \right) + \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{k=1}^6 a_{k2}^{(l)} \cdot \sum_{j=1}^6 a_{2j}^{(3-l)} \right].$$

Для вычислений нужны квадрат и куб матрицы смежности.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

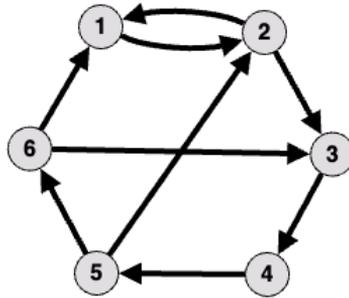
$$\begin{aligned} n_3(2) &= (2+2+1+1+2+1) + \left[\sum_{k=1}^6 a_{k2} \cdot \sum_{j=1}^6 a_{2j}^{(2)} + \sum_{k=1}^6 a_{k2}^{(2)} \cdot \sum_{j=1}^6 a_{2j} \right] = \\ &= 9 + [2 \cdot 3 + 3 \cdot 2] = 9 + 6 + 6 = 21. \end{aligned}$$

Для ориентированных ациклических графов, т.е. ориентированных графов без направленных циклов, но допускающих наличие параллельных путей, число появлений вершины в путях фиксированной длины совпадает с числом простых путей, проходящих через эту вершину. А значит величина, полученная с помощью формулы (6.1), может использоваться для нахождения значения Майерсона в ориентированном графе по формуле (2.1).

В случае произвольного ориентированного графа будем определять центральность вершин в виде

$$X_i(r) = \frac{n_1(i)}{2}r + \frac{n_2(i)}{3}r^2 + \dots + \frac{n_{n-1}(i)}{n}r^{n-1} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{d+1}r^d.$$

Дележ X очевидно удовлетворяет первой аксиоме Майерсона [17] (по способу построения дележа и заданию характеристической функции), но не удовлетворяет второй аксиоме (аксиоме справедливости), утверждающей, что оба игрока i и j должны одинаково получать выгоду или терять ее при создании или удалении связи ij . Данное условие не выполняется в связи с включением в рассмотрение циклов. В общем случае возможно появление путей вида $\dots ijijijij \dots$, что приводит к различному числу появлений вершин i и j в зависимости от четности длины пути.

Рисунок 6. Граф $G_1 - 14$

Проиллюстрируем это с помощью контрпримера. Для этого вернемся к графу G_2 (пример 3). Удалим из этого графа связь 1 – 4 (рис. 6).

Запишем выигрыши игроков 1 и 4 до удаления связи (X_1, X_4) и после (X'_1, X'_4):

$$X_1 = \frac{4}{2}r + \frac{10}{3}r^2 + \frac{21}{4}r^3 + \frac{42}{5}r^4 + \frac{82}{6}r^5,$$

$$X_4 = \frac{3}{2}r + \frac{8}{3}r^2 + \frac{18}{4}r^3 + \frac{36}{5}r^4 + \frac{70}{6}r^5,$$

$$X'_1 = \frac{3}{2}r + \frac{7}{3}r^2 + \frac{13}{4}r^3 + \frac{22}{5}r^4 + \frac{37}{6}r^5,$$

$$X'_4 = \frac{2}{2}r + \frac{5}{3}r^2 + \frac{11}{4}r^3 + \frac{19}{5}r^4 + \frac{34}{6}r^5.$$

Начиная со слагаемого, соответствующего числу появления вершин в путях длины 3, начинаются расхождения в разностях $X_1 - X'_1, X_4 - X'_4$, что нарушает условие аксиомы Майерсона:

$$X_1 - X'_1 = \frac{1}{2}r + \frac{3}{3}r^2 + \frac{8}{4}r^3 + \frac{20}{5}r^4 + \frac{45}{6}r^5,$$

$$X_4 - X'_4 = \frac{1}{2}r + \frac{3}{3}r^2 + \frac{7}{4}r^3 + \frac{17}{5}r^4 + \frac{36}{6}r^5.$$

Выбирая конкретное значение r , можно получить значение функции дележа $X_i(r)$ для всех игроков. В дальнейшем эти значения могут использоваться для ранжирования вершин графа, что позволяет ввести еще один подход к вычислению центральности.

На рис. 7 представлены графики функций дележа для игроков на графе G_2 . Выберем значение $r = \frac{1}{2}$, тогда дележ:

$$X = (3.44, 3.44, 2.09, 2.79, 2.79, 2.09).$$

Видно, что при таком подходе вершины 1 и 2 по-прежнему обладают наибольшими значениями центральности, наименьшая центральность у вершин 3, 6.

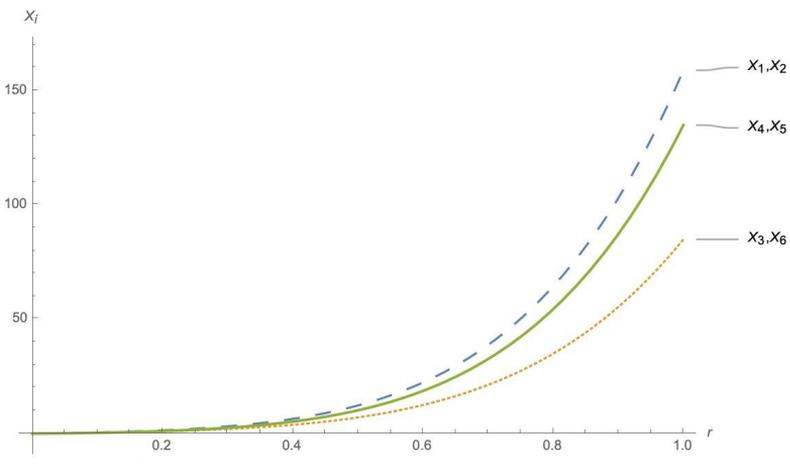


Рисунок 7. Графики функций, определяющих дележ

Для примера 3 можно записать вектор I интегральных центральностей вершин графа G_2 :

$$I(G_2) = (7.38, 7.38, 4.17, 6.14, 6.14, 4.17).$$

Порядок вершин при ранжировании сохраняется.

7. Центральность вершин графа на основе турнирной матрицы

В работе [2] была предложена двухэтапная процедура ранжирования вершин графа, где на первом этапе вершины ранжируются на основании абсолютных потенциалов узлов электрической цепи при последовательной подаче тока во все узлы. На втором этапе строится турнирная таблица и проводится окончательное ранжирование,

основанное на сумме ранее найденных рангов, по аналогии с правилом Борда [1].

В данном случае турнирная таблица может быть построена для значений $n_d(i)$ для различных d . Составим турнирную таблицу вершин графа G_2 (табл. 1). Оценка центральности на основе суммарного числа появления вершины в путях различной длины позволяет сделать вывод о наибольшей значимости вершин 1 и 2. Наименьшей центральностью обладают вершины 3 и 6.

Таблица 1: Турнирная таблица вершин графа G_2

Вершина	d					Σ
	1	2	3	4	5	
1	4	10	21	42	82	159
2	4	10	21	42	82	159
3	3	6	11	22	43	85
4	3	8	18	36	70	135
5	3	8	18	36	70	135
6	3	6	11	22	43	85

Сравним эти результаты со значениями степенной центральности. В табл. 2 приведены значения числа входящих и исходящих связей в графе. Наибольшей центральностью так же обладают вершины 1 и 2, при анализе наименее центральных вершин возможны различные трактовки в зависимости от решаемой прикладной задачи. Если не учитывать направленность ребер, ранги для степенной центральности будут совпадать с рангами вершин порядка 2. Если же направление учитывается, вершины 5 и 6 получают одинаковые оценки с точки зрения степенной центральности, однако, с точки зрения вовлеченности вершин в создание путей в графе, вершина 5 считается более важной.

Таблица 2: Оценка степенной центральности вершин графа G_2

Вершина	in-degree	out-degree
1	2	2
2	2	2
3	2	1
4	2	1
5	1	2
6	1	2

8. Транспортный граф города Петрозаводск

В работе [9] описано построение неориентированного графа транспортной сети г. Петрозаводск. Данный граф может рассматриваться как ориентированный, если учесть направление движения автомобильного транспорта на участках дорог, соответствующих ребрам графа. Он состоит из 1530 вершин и 3781 ребер. Значения в матрице смежности графа равны значениям, обратным длинам участков дорог между соответствующими парами вершин.



Рисунок 8. Тепловая карта значений n_3 вершин графа транспортной сети г. Петрозаводск

Вычислим число простых путей длины 3, проходящих через вершины графа, согласно утверждению 3.2. На рис. 8 представлена тепловая карта значений n_3 .

Далее вычислим значения интегральной центральности вершин. Поскольку при вычислении числа появлений вершины в путях необходимо возведение матрицы смежности в степень d , для упрощения процесса вычисления в графах с большим числом вершин для оценки центральности можно ограничиться рассмотрением путей длины меньшей, чем $n - 1$. На рис. 9 представлена тепловая карта вершин транспортного графа, для которых были вычислены значения интегральной центральности для длин путей до $d = 100$.



Рисунок 9. Тепловая карта значений интегральной центральности вершин графа транспортной сети г. Петрозаводск

Большему значению центральности на рисунке соответствуют узлы большего размера и более темной окраски. Результаты ранжирования соотносятся с полученными ранее в работе [9], где проводилось ранжирование с помощью метода PageRank [19] и модифицированного метода Майерсона [14].

9. Заключение

В работе предложен ряд подходов к вычислению значений центральности вершин ориентированных графов, основанных на числе появлений вершины в путях фиксированной длины. Показано, как значение Майерсона в кооперативной игре, где характеристическая функция определяется через количество простых путей фиксированной длины в подграфе, порожденном коалицией, может быть вычислено для вершин ориентированного графа. Приводятся формулы для нахождения числа простых путей длины 2 и 3 через матрицу смежности. Также, центральность вершины может быть найдена как решение кооперативной игры, где характеристическая функция задается в более общем виде для различных длин путей. Предлагается ввести понятие интегральной центральности как значения определенного интеграла от функции дележа. Продемонстрировано, что данная мера центральности удовлетворяет аксиомам Boldi–Vigna.

Кроме того, описано вычисление центральности вершин ориентированного графа с циклами.

Предложенный подход апробирован на графе транспортной сети г. Петрозаводск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алескеров Ф.Т., Хабина Е.Л., Шварц Д.А. *Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Примеры и задачи: учеб. пособие для вузов.* М.: Из-во Юрайт, 2023.
2. Мазалов В.В., Хитрая В.А. *Ранжирование вершин графа с использованием абсолютных потенциалов узлов электрической цепи* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, №2. С. 233—251.
3. Щербакова Н.Г. *Аксиоматика центральности в комплексных сетях* // Проблемы информатики. 2015. №3. С. 3–14.
4. Avrachenkov K.E., Kondratev A.Y., Mazalov V.V., Rybanov D.G.

- Network partitioning algorithms as cooperative games* // Computational Social Networks. 2018. V. 5. I. 11.
5. Bavelas A. *A mathematical model for group structures* // Human organization. 1948. V. 7, I. 3. P. 16–30.
 6. Bavelas A. *Communication patterns in task-oriented groups* // The journal of the acoustical society of America. 1950. V. 22. I. 6. P. 725–30.
 7. Beauchamp M.A. *An improved index of centrality* // Behavioral Science. 1965. V. 10. I. 2. P. 161–163.
 8. Boldi P., Vigna S. *Axioms for Centrality* // Internet Mathematics. 2014. V. 10, no. 3–4. P. 222–262.
 9. Ermolin N.A., Khitraya V.A., Khitryi A.V., Mazalov V.V. and Nikitina N.N. *Modeling of the City's Transport Network Using Game-Theoretic Methods on the Example of Petrozavodsk* // Contributions to Game Theory and Management. 2022. V. 15. P. 18–31.
 10. Freeman L.C. *A set of measures of centrality based on betweenness* // Sociometry. 1977. V. 1. P. 35–41.
 11. Jackson M.O. *Social and economic networks*. Princeton University Press. 2008.
 12. Li Ju., Tur A., Zavrjajnov M. *Importance of agents in networks: clique based game-theoretic approach* // Contributions to Game Theory and Management. 2022. V. 15. P. 189–199.
 13. Mazalov V. Chirkova J. *Networking Games*. Academic Press. 2019.
 14. Mazalov V.V., Khitraya V.A. *A modified Myerson value for determining the centrality of graph vertices* // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. Iss. 1. P. 145–159.
 15. Mazalov V.V., Trukhina L.I. *Generating functions and the myerson vector in communication networks* // Diskr. Mat. 2014. Vol. 26, no. 3. P. 65–75.

16. Michalak T.P., Aadithya K.V., Szczepanski P.L., Ravindran B., Jennings N.R. *Efficient computation of the Shapley value for game-theoretic network centrality* // J Artif. Intell. Res. 2013. V. 46. P. 607–650.
17. Myerson R.B. *Graphs and cooperation in games* // Mathematics of Operations Research. 1977. V. 2, №3. P. 225—229.
18. Nieminen J. *On the centrality in a directed graph* // Social Science Research. 1974. V. 2. I. 4. P. 371–378.
19. Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T. *The pagerank citation ranking: Bringing order to the Web* // Proceedings of the 7th International World Wide Web Conference. Brisbane, Australia. 1998. P. 161–172.
20. Rochat Y. *Closeness centrality extended to unconnected graphs: The harmonic centrality index* // Proc. of the Applications of Social Network Analysis (ASNA 2009).
21. Sabidussi G. *The centrality index of a graph* // Psychometrika. 1966. V. 31. P. 581–603.
22. Shaw M. *Communication networks* // Advances in Experimental Social Psychology. 1954. V. 1. P. 111–147.
23. Wolfram MathWorld *Euler-Mascheroni Constant* <https://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html>. 2023.

GAME THEORETIC CENTRALITY OF A DIRECTED GRAPH VERTICES

Vitalia A. Khitraya, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS; Institute of Mathematics and Information Technologies, Petrozavodsk State University (dobvitalia@yandex.ru),

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS, Dr.Sc., professor (vmazalov@krc.karelia.ru).

Abstract: The paper considers a game theory approach to calculating the centrality value of the vertices in a directed graph, based on the number of vertex occurrences in fixed length paths. It is proposed to define vertex centrality as a solution of a cooperative game, where the characteristic function is given as the number of simple paths of fixed length in subgraphs corresponding to coalitions. The concept of integral centrality is introduced as the value of a definite integral of the payoff function. It is shown that this centrality measure satisfies the Boldi–Vigna axioms.

Keywords: graph theory, centrality, directed graph, cooperative game.