

УДК 519.17

ББК 22.176

# ПОТЕНЦИАЛ В ИГРЕ ЗАПОЛНЕНИЯ С РАЗНЫМИ ТИПАМИ ТРАНСПОРТА\*

НАТАЛИЯ Н. НИКИТИНА

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

ВЛАДИМИР В. МАЗАЛОВ

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Новгородский государственный университет

им. Ярослава Мудрого

173003, Великий Новгород, ул. Б.С.-Петербургская, 41

e-mail: nikitina@krc.karelia.ru, vmazalov@krc.karelia.ru

Неоднородные игры заполнения позволяют моделировать дорожные ситуации с участием нескольких классов транспортных средств, имеющих различные предпочтения в выборе маршрутов. В представленной работе доказывается существование потенциала в дискретной игре заполнения с  $n$  классами игроков. Приводятся примеры вычисления равновесий и возникновения парадокса Браесса, а также применения построенной игры заполнения для анализа распределения транспортных средств в сети городских дорог города Петрозаводск.

---

©2023 Н.Н. Никитина, В.В. Мазалов

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-20015, проводимого совместно с органами власти Республики Карелия с финансированием из Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК), <https://rscf.ru/project/22-11-20015/>.

*Ключевые слова:* игра заполнения, игра маршрутизации, потенциал, равновесие по Нэшу, парадокс Браесса, транспортный граф.

*Поступила в редакцию:* 10.10.23 *После доработки:* 17.11.23 *Принята к публикации:* 01.12.23

## 1. Введение

В зависимости от функций выигрыша игроков, игры заполнения подразделяют на симметрические и персонифицированные. Применительно к играм маршрутизации, в литературе их называют однородными и неоднородными (многоклассовыми) [10, 7]. В однородных играх задержка на ребре одинакова для всех игроков. В неоднородных играх у разных игроков могут быть разные функции задержки.

В литературе представлено множество примеров применения неоднородных игр маршрутизации в моделировании транспортных систем. Это объясняется тем, что на практике участники дорожного движения руководствуются различными предпочтениями при выборе маршрутов в зависимости, например, от типа транспортного средства [9], наличия или отсутствия навигатора [17], типа используемого навигатора [19], объема доступной информации о дорожной ситуации [5], индивидуальной чувствительности к задержкам [16], дорожным сборам и субсидиям [12]. Растет также число работ, исследующих игру маршрутизации между традиционными и беспилотными транспортными средствами, имеющими различные предпочтения [14,13].

В прикладных задачах маршрутизации имеет важное значение как существование равновесия по Нэшу, так и алгоритм его достижения. В общем случае прийти к равновесию может быть сложно, и система будет долго функционировать в неоптимальном для игроков состоянии. В литературе рассматривались различные алгоритмы поиска равновесий. Так, в статьях [2,1] исследованы численные методы нахождения обычных и стохастических равновесных распределений транспортных потоков. В работе [6] исследована детерминированная логит-динамика в неоднородных играх маршрутизации для ограниченного класса графов. В статье [18] для неоднородных игр заполнения с отказами ресурсов предлагается контролировать подмножество игроков таким образом, чтобы гарантировать сходимость последовательности наилучших ответов к равновесию.

Наличие выпуклого потенциала в игре гарантирует существование равновесия по Нэшу и сходимость к нему последовательности

лучших или наилучших ответов игроков при произвольной топологии графа [15, 4]. Неоднородные потенциальные игры маршрутизации с произвольными задержками и разделяемым трафиком исследовались, например, в [10, 11, 3], с неделимым трафиком – в [9]. Было выведено необходимое условие существования потенциала для произвольного числа типов игроков и достаточное – для двух типов, предложена структура дорожных сборов, гарантирующая существование потенциала в игре с двумя типами игроков.

В данной работе исследуется дискретная игра заполнения с  $n$  типами игроков, соответствующая игре маршрутизации с неделимым трафиком. Доказано, что игра является потенциальной. Приводятся примеры вычисления равновесий по Нэшу и возникновения парадокса Браесса.

## 2. Дискретная игра заполнения

Дано множество игроков  $n$  типов  $N = \{N_1, \dots, N_n\}$ , число которых составляет  $|N_t| = n_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ . Игроки выбирают ресурсы из множества  $M = \{1, \dots, m\}$ . С каждым ресурсом  $j$  связаны функции задержек  $c_j^{(1)}(k), \dots, c_j^{(n)}(k)$ , где верхний индекс  $(t)$  – тип игрока.

Стратегией игрока  $i \in N$  является выбор подмножества ресурсов. Пусть профиль выбранных стратегий  $s = \{s_i, i \in N\}$ . Каждому профилю стратегий  $s$  соответствует вектор заполнения  $k(s) = (k_1(s), \dots, k_m(s))$ ,  $k_j(s) = k_j^{(1)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s)$ ,  $j \in M$ . Здесь  $k_j^{(t)}(s)$  – число игроков типа  $t$ , выбравших ресурс  $j$ . Имеет место соотношение  $\sum_{j=1}^m k_j^{(t)}(s) = n_t$  для  $t = 1, \dots, n$ .

Выигрыш игрока зависит от типа данного игрока и стратегий, выбранных остальными игроками, и строится следующим образом. При выборе ресурса  $j \in M$  игроки первого типа получают выигрыш  $-c_j^{(1)}(k)$ , где  $k$  – общее число игроков, выбравших данный ресурс  $j$ . Игроки второго типа получают выигрыш  $-c_j^{(1)}(k) - c_j^{(2)}(k_j^{(2)} + \dots + k_j^{(n)})$ , где  $k$  – общее число игроков, выбравших данный ресурс  $j$ , и  $k_j^{(t)}$  – число игроков типа  $t$ , выбравших данный ресурс  $j$  ( $t = 2, \dots, n$ ). Аналогичным образом строятся функции выигрыша игроков всех остальных типов. Наконец, игроки  $n$ -го типа получают выигрыш  $-c_j^{(1)}(k) - c_j^{(2)}(k_j^{(2)} + \dots + k_j^{(n)}) - \dots - c_j^{(n)}(k_j^{(n)})$ . Выигрыш здесь берется со знаком минус, поскольку  $c_j^t$  представляют собой затраты игрока

типа  $t$ .

Таким образом, для профиля стратегий  $s = \{s_i, i \in N\}$  выигрыш  $i$ -го игрока, имеющего тип  $t$ , имеет вид

$$H_i^{(t)} = - \sum_{j \in s_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( \sum_{l=p}^n k_j^{(l)}(s) \right). \quad (2.1)$$

Для краткости обозначим общее число игроков, использующих ресурс  $j$  в профиле стратегий  $s$  и имеющих тип не младше  $p$ , как  $K_j^{(p)}(s) = \sum_{l=p}^n k_j^{(l)}(s)$ .

**Теорема 2.1.** *Данная игра является потенциальной, и потенциал имеет вид*

$$P(s) = - \sum_{j \in M} \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k).$$

*Доказательство.* При отклонении игрока первого типа со стратегии  $s_i$  на стратегию  $s'_i$  разность выигрышей составит

$$H_i^{(1)}(s_{-i}, s'_i) - H_i^{(1)}(s_{-i}, s_i) = - \sum_{j \in s'_i} c_j^{(1)}(k_j(s_{-i}, s'_i)) + \sum_{j \in s_i} c_j^{(1)}(k_j(s_{-i}, s_i)).$$

Для всех  $j \in s_i \cap s'_i$ , задержки  $c_j^{(1)}$  в первой и второй суммах совпадают. Отсюда,

$$H_i^{(1)}(s_{-i}, s'_i) - H_i^{(1)}(s_{-i}, s_i) = - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} c_j^{(1)}(k_j(s) + 1) + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} c_j^{(1)}(k_j(s)).$$

Для игрока второго типа разность выигрышей составит

$$\begin{aligned} H_i^{(2)}(s_{-i}, s'_i) - H_i^{(2)}(s_{-i}, s_i) &= \\ &= - \sum_{j \in s'_i} \left[ c_j^{(1)} \left( k_j^{(1)}(s) + k_j^{(2)}(s_{-i}, s'_i) + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_j^{(2)} \left( k_j^{(2)}(s_{-i}, s'_i) + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j \in s_i} \left[ c_j^{(1)} \left( k_j^{(1)}(s) + k_j^{(2)}(s_{-i}, s_i) + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + c_j^{(2)} \left( k_j^{(2)}(s_{-i}, s_i) + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) \right] = \\
 & = - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \left[ c_j^{(1)} \left( k_j^{(1)}(s) + k_j^{(2)}(s) + 1 + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + c_j^{(2)} \left( k_j^{(2)}(s) + 1 + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) \right] + \\
 & + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \left[ c_j^{(1)} \left( k_j^{(1)}(s) + k_j^{(2)}(s) + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + c_j^{(2)} \left( k_j^{(2)}(s) + k_j^{(3)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s) \right) \right] = \\
 & = - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \left[ c_j^{(1)} \left( K_j^{(1)}(s) + 1 \right) + c_j^{(2)} \left( K_j^{(2)}(s) + 1 \right) \right] + \\
 & \quad + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \left[ c_j^{(1)} \left( K_j^{(1)}(s) \right) + c_j^{(2)} \left( K_j^{(2)}(s) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично, для игрока типа  $t$  разность выигрышей составит

$$\begin{aligned}
 H_i^{(t)}(s_{-i}, s'_i) - H_i^{(t)}(s_{-i}, s_i) & = - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( \sum_{l=p}^n k_j^{(l)}(s) + 1 \right) + \\
 & + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( \sum_{l=p}^n k_j^{(l)}(s) \right) = - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( K_j^{(p)}(s) + 1 \right) + \\
 & + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( K_j^{(p)}(s) \right). \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Запишем разность потенциалов:

$$P(s_{-i}, s'_i) - P(s_{-i}, s_i) = - \sum_{j \in M} \sum_{p=1}^t \left( \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i)} c_j^{(p)}(k) - \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k) \right).$$

Здесь мы использовали тот факт, что при отклонении игрока типа  $t$  в выражении для потенциала изменяются только первые  $t$  слагаемых. Если от своей стратегии отклонился игрок первого типа, то при  $j \in$

$s'_i \setminus s_i$ ,  $K_j^{(1)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(1)}(s) + 1$ , при  $j \in s_i \setminus s'_i$ ,  $K_j^{(1)}(s_{-i}, s'_i) = k_j(s) - 1$ , и при  $j \in M$ ,  $K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(p)}(s)$  для  $p \in [2, n]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} P(s_{-i}, s'_i) - P(s_{-i}, s_i) &= - \sum_{j \in M} \left( \sum_{k=1}^{K_j^{(1)}(s_{-i}, s'_i)} c_j^{(1)}(k) - \sum_{k=1}^{K_j^{(1)}(s)} c_j^{(1)}(k) \right) = \\ &= - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{k=1}^{K_j^{(1)}(s)+1} c_j^{(1)}(k) - \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{k=1}^{K_j^{(1)}(s)-1} c_j^{(1)}(k) + \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{k=1}^{K_j^{(1)}(s)} c_j^{(1)}(k) + \\ &+ \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{k=1}^{K_j^{(1)}(s)} c_j^{(1)}(k) = - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} c_j^{(1)}(k_j(s) + 1) + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} c_j^{(1)}(k_j(s)). \end{aligned}$$

Правая часть выражения совпадает с  $H_i^{(1)}(s_{-i}, s'_i) - H_i^{(1)}(s_{-i}, s_i)$ .

Если от своей стратегии отклонился игрок второго типа, то при  $j \in s'_i \setminus s_i$ ,  $K_j^{(1)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(1)}(s) + 1$  и  $K_j^{(2)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(2)}(s) + 1$ ; при  $j \in s_i \setminus s'_i$ ,  $K_j^{(1)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(1)}(s) - 1$  и  $K_j^{(2)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(2)}(s) - 1$ , и при  $j \in M$ ,  $K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(p)}(s)$  для  $p \in [3, n]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} P(s_{-i}, s'_i) - P(s_{-i}, s_i) &= - \sum_{j \in M} \sum_{p=1}^2 \left( \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i)} c_j^{(p)}(k) - \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k) \right) = \\ &= - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)+1} c_j^{(p)}(k) - \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)-1} c_j^{(p)}(k) + \\ &+ \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k) + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k) = \\ &= - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^2 c_j^{(p)}(K_j^{(p)}(s) + 1) + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^2 c_j^{(p)}(K_j^{(p)}(s)). \end{aligned}$$

Правая часть выражения совпадает с  $H_i^{(2)}(s_{-i}, s'_i) - H_i^{(2)}(s_{-i}, s_i)$ .

Аналогично, если от своей стратегии отклонился игрок типа  $t$ , то при  $j \in s'_i \setminus s_i$ ,  $1 \leq p \leq t$ ,  $K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(p)}(s) + 1$ , при  $j \in s_i \setminus s'_i$ ,  $1 \leq p \leq t$ ,  $K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(p)}(s) - 1$  и при  $j \in M$ ,  $K_j^{(p)}(s_{-i}, s'_i) = K_j^{(p)}(s)$  для  $p \in [t+1, n]$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
 P(s_{-i}, s'_i) - P(s_{-i}, s_i) &= - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^t \left( \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)+1} c_j^{(p)}(k) - \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k) \right) - \\
 &\quad - \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^t \left( \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)-1} c_j^{(p)}(k) - \sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k) \right) = \\
 &= - \sum_{j \in s'_i \setminus s_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( K_j^{(p)}(s) + 1 \right) + \sum_{j \in s_i \setminus s'_i} \sum_{p=1}^t c_j^{(p)} \left( K_j^{(p)}(s) \right).
 \end{aligned}$$

Правая часть совпадает с выражением (2.2). Теорема доказана.  $\square$

Поскольку игра является потенциальной, выполняется свойство конечности улучшений (FIP), и алгоритм последовательных улучшений сходится к равновесию по Нэшу в чистых стратегиях.

### 3. Свойства равновесий

В игре с различными типами игроков могут возникать эффекты, связанные не только с выигрышами игроков в равновесии, но и с затратами системы в целом. В случае транспортной сети это могут быть, например, затраты на обслуживание и ремонт участков дорог. Такие затраты могут зависеть от объема транспортного потока, суммарного веса проезжающих транспортных средств и прочих факторов. Пусть функция социальной полезности выражает суммарные затраты города на обслуживание дорожной сети,

$$SOC(s) = \sum_{j \in M} \sum_{p=1}^n d_j^{(p)}(k_j^{(p)}(s)),$$

где  $d_j^{(p)}(k_j^{(p)}(s))$  — это затраты системы от использования ресурса  $j$  игроками типа  $p$  в профиле стратегий  $s$ . Вычислим значение социальной полезности в случае эгоистичного поведения игроков, то есть в равновесиях по Нэшу.

**Пример 3.1.** Рассмотрим дорожную сеть, представленную на рис. 1. Игроки движутся из пункта  $A$  в пункт  $B$  и могут выбрать один из трех маршрутов:  $(A, C, B)$ ,  $(A, D, B)$  или  $(A, C, D, B)$ . Всего

имеется три типа игроков, число которых составляет  $n_1 = 10$  (автомобили),  $n_2 = 10$  (автобусы) и  $n_3 = 10$  (грузовики). С каждым участком дороги  $j$  связана функция задержек  $c_j(k) = 100/(r_j - k)$ , где

$$r_{AC} = 58, r_{CB} = 35, r_{AD} = 38, r_{DB} = 55, r_{CD} = 300. \quad (3.1)$$

Функции выигрыша имеют вид (2.1), где  $c_j^{(p)}(k) = c_j(k)$ ,  $1 \leq p \leq 3$ .

Обозначим  $v_r$  — вектор загрузки маршрута  $r$ ,  $v_r = (k_r^{(1)}, k_r^{(2)}, k_r^{(3)})$ . Пусть затраты на обслуживание дорожной сети выражаются квадратической функцией

$$SOC(s) = \left(k_j^{(1)}(s)\right)^2 + 2 \left(k_j^{(2)}(s)\right)^2 + 3 \left(k_j^{(3)}(s)\right)^2.$$

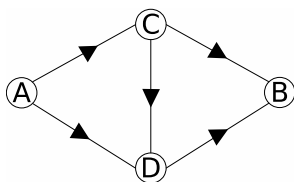


Рисунок 1. Дорожная сеть с указанием направлений движения.

Заметим, что глобальный оптимум затрат системы,  $SOC(s) = 600$ , достигается в ситуации

$$v_{ACB} = (5, 5, 5); v_{ADB} = (5, 5, 5); v_{ACDB} = (0, 0, 0),$$

которая не является равновесием по Нэшу, поскольку игроку третьего типа выгодно перейти с маршрута  $(A, C, B)$  на маршрут  $(A, C, D, B)$ . Наихудшим равновесием по Нэшу является ситуация

$$v_{ACB} = (6, 1, 0); v_{ADB} = (4, 3, 0); v_{ACDB} = (0, 6, 10),$$

в которой суммарные затраты системы составляют  $SOC(s) = 1356$  при затратах на обслуживание участка дороги  $(C, D)$   $d_{CD}(s) = 372$ , то есть  $d_{AC}(s) + d_{CB}(s) + d_{AD}(s) + d_{DB}(s) = 984$ . При этом автомобили тратят на проезд в среднем 6.4 минуты, автобусы — 11.9 минут, а грузовики — 16.5 минут.

Если же удалить участок дороги  $(C, D)$  (рис. 2), то глобальным оптимумом остается ситуация

$$v_{ACB} = (5, 5, 5); v_{ADB} = (5, 5, 5),$$

а наихудшим равновесием по Нэшу становится ситуация

$$v_{ACB} = (4, 8, 2); v_{ADB} = (6, 2, 8),$$

в которой затраты системы составляют  $d_{AC}(s) + d_{CB}(s) + d_{AD}(s) + d_{DB}(s) = 784$ . Данный пример иллюстрирует проявление парадокса Браесса: при удалении ребра затраты системы в самом плохом равновесии уменьшились.

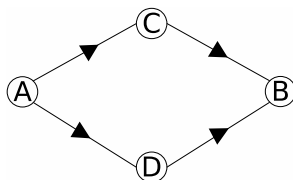


Рисунок 2. Дорожная сеть после удаления ребра  $(C, D)$ .

**Пример 3.2.** Заметим, что в предыдущем примере в любом равновесии по Нэшу грузовики выбирают только маршрут  $(A, C, D, B)$ , а игроки остальных типов распределяются между тремя маршрутами. Если снижать коэффициент задержки  $r_{CD}$ , то появляются равновесия по Нэшу, в которых грузовики выбирают другие маршруты.

Например, пусть  $r_{CD} = 65$ . Наихудшим равновесием по Нэшу в таком случае является ситуация

$$v_{ACB} = (3, 7, 2); v_{ADB} = (3, 2, 8); v_{ACDB} = (4, 1, 0).$$

При этом среднее время проезда составляет 6.8, 12.7 и 17.4 минуты. Изменился характер нагрузки на ребро с минимальной задержкой  $(C, D)$ : с него ушли все грузовики и часть автобусов, пришли автомобили, нагрузка на ребро составила  $d_{CD}(s) = 18$ , а суммарные затраты системы снизились в 1.7 раза:  $SOC(s) = 794$ .

Таким образом, меняя задержку на заданном участке дороги, можно регулировать его загрузку отдельными видами транспорта, не существенно ухудшая при этом выигрыши игроков.

**Пример 3.3.** Рассмотрим фрагмент дорожной сети города Петрозаводск, приведенный на рисунке 3 и включающий в себя три альтернативных маршрута проезда из густонаселенного района Древлянка в центр города. Представим данный фрагмент в виде графа  $G$  (рисунок 4), где вершина  $A$  соответствует площади Древлянское Кольцо,  $B$  – площади Верхнее Чапаевское Кольцо,  $C$  – площади Нижнее Чапаевское Кольцо,  $D$  – пересечению улицы Красноармейской и улицы Гоголя,  $E$  – площади Кукковское Кольцо, а ребра соответствуют участкам автомобильных дорог, соединяющих вершины. Игроки движутся из пункта  $A$  в пункт  $D$  и могут выбрать один из трех маршрутов:  $(A, B, C, D)$ ,  $(A, D)$  или  $(A, E, D)$ .

В таблице 1 представлены характеристики ребер графа  $G$ , вычисленные на основе построенного ранее транспортного графа города [8]. Время проезда по любому ребру  $e$  графа  $G$ , на котором нет трафика, принято равным сумме времен проезда по участкам дорог, составляющих путь  $e$  в исходном транспортном графе; пропускная способность ребра  $e$  графа  $G$  принята равной минимальной из пропускных способностей участков дорог, составляющих путь  $e$  в исходном транспортном графе.

| Ребро                  | AB   | BC   | CD   | AD   | AE   | ED   |
|------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Время проезда, мин     | 1.41 | 2.03 | 1.02 | 2.22 | 2.28 | 2.59 |
| Пропускная способность | 315  | 140  | 35   | 35   | 140  | 140  |

Таблица 1: Характеристики ребер графа  $G$ .

Всего имеется три типа игроков: автомобили, автобусы и грузовики. Пусть задержки на участках дорог описываются BPR-функциями от объема трафика  $x$

$$c_j^{(t)}(x) = c_j^{0(t)} \left( 1 + \alpha_j \left( \frac{x}{C_j} \right)^{\beta_j} \right),$$

где  $c_j^{0(t)}$  – время проезда игрока типа  $t$  по ребру  $j$  при отсутствии трафика,  $C_j$  – пропускная способность ребра  $j$ ,  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  – параметры калибровки;  $\alpha_j = 3 \forall j \in M$ ,  $\beta_j = 4 \forall j \in M$ . Время проезда игрока типа  $t$  по ребру  $e$  при отсутствии трафика зависит от длины ребра

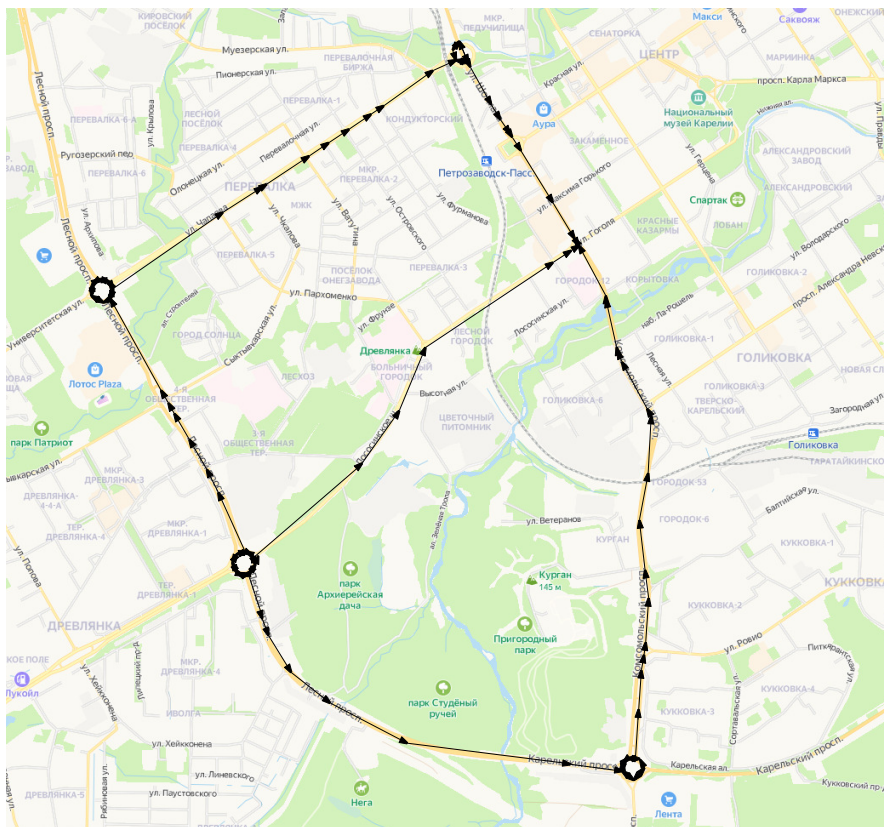


Рисунок 3. Фрагмент транспортной сети г. Петрозаводск с указанием направлений движения из микрорайона Древлянка в центр города.

и скорости игрока; так, в рассматриваемом фрагменте транспортной сети на всех участках установлено ограничение скорости 60 км/ч. Предположим, что на скорость движения автобусов (игроков второго типа) наложено дополнительное ограничение 40 км/ч. Обозначим  $v_r^* = (k_r^{(1)}/n_1, k_r^{(2)}/n_2, k_r^{(3)}/n_3)$ .

Найдем равновесие по Нэшу для небольшого транспортного потока:  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 40$ ,  $n_3 = 10$ .

$$v_{ABCD}^* = (0.225, 0.25, 0); v_{AD}^* = (0.09, 0.45, 1); v_{AED}^* = (0.685, 0.3, 0).$$

В данном равновесии все грузовики выбрали кратчайший маршрут  $(A, D)$ . Если запретить движение грузового транспорта по Гоголев-

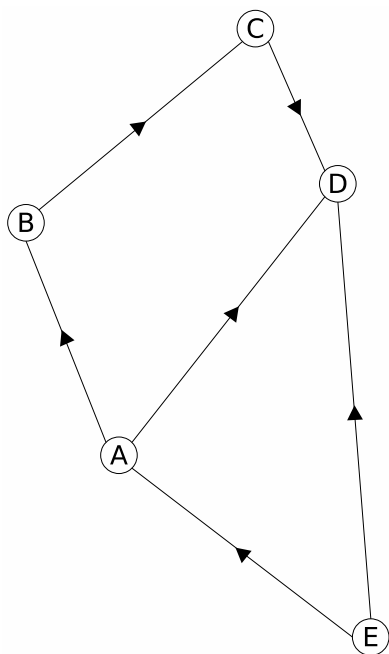


Рисунок 4. Дорожная сеть с указанием направлений движения.

скому мосту, то в равновесии по Нэшу грузовики распределятся между двумя другими маршрутами, например, следующим образом:

$$v_{ABCD}^* = (0.215, 0.075, 0.4); v_{AD}^* = (0.095, 0.675, 0);$$

$$v_{AED}^* = (0.665, 0.25, 0.6).$$

При этом на маршрут  $(A, D)$  перейдет часть автобусов. В обоих случаях большая часть автомобилей предпочитает объездной маршрут с высокой пропускной способностью  $(A, E, D)$ .

С увеличением транспортного потока ( $n_1 = 500$ ,  $n_2 = 80$ ,  $n_3 = 20$ ), в равновесии игроки распределяются между маршрутами иным образом:

$$v_{ABCD}^* = (0.228, 0.175, 0.2); v_{AD}^* = (0.174, 0.188, 0.35);$$

$$v_{AED}^* = (0.748, 0.638, 0.45).$$

Такой профиль стратегий игроков может соответствовать транспортной ситуации в «час пик». Здесь, по сравнению с небольшим трафиком, изменились предпочтения игроков второго типа: они тоже стали предпочитать маршрут  $(A, E, D)$ .

#### 4. Заключение

Неоднородные игры маршрутизации позволяют моделировать ситуации с участием транспортных средств, имеющих различные предпочтения в выборе маршрутов и оказывающих различное влияние как на поведение остальных участников дорожного движения, так и на затраты системы в целом. Важным свойством таких игр является наличие потенциала, что гарантирует существование равновесия по Нэшу и упрощает его достижение. При этом эффективность равновесий зависит от параметров модели и топологии сети. На практике стимулировать достижение социального оптимума можно, например, рекомендуя конкретный маршрут заданному подмножеству водителей в программе-навигаторе, вводя ограничения на скорость или запрет на проезд отдельных видов транспорта.

Работа выполнена с использованием ресурсов ЦКП КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баймурзина Д.Р., Гасников А.В., Гасникова Е.В. и др. *Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. № 59(1). С. 21–36.
2. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Дорн Ю.В., Максимов Ю.В. *Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и в модели стабильной динамики* // Математическое моделирование. 2016. № 28(10). С. 40–64.
3. Гасникова Е.В., Гасников А.В., Ярмошик Д.В. и др. *О многостадийной транспортной модели и достаточных условиях ее потенциальности* // МТИиП. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 3–17.
4. Мазалов В.В., Чиркова Ю.В. *Сетевые игры*. СПб: Лань, 2018.
5. Acemoglu D., Makhdoumi A., Malekian A., Ozdaglar A. *Informational Braess' paradox: The effect of information on traffic congestion* // Operations Research. 2018. V. 66. N. 4. P. 893–917.

6. Cianfanelli L., Como G. *On stability of users equilibria in heterogeneous routing games* // In 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC). IEEE. 2019. P. 355–360.
7. Dafermos S.C. *The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks* // Transportation science. 1972. V. 6. N. 1. P. 73–87.
8. Ermolin N.A., Khitraya V.A., Khitryi A.V., Mazalov V.V., Nikitina N.N. *Modeling of the City's Transport Network Using Game-Theoretic Methods on the Example of Petrozavodsk* // Contributions to Game Theory and Management. 2022. V. 15. P. 18–31.
9. Farokhi F., Johansson K.H. *A game-theoretic framework for studying truck platooning incentives* // In 16th international IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC 2013). IEEE. 2013. P. 1253–1260.
10. Farokhi F., Krichene W., Bayen A.M., Johansson K.H. *A heterogeneous routing game* // In 2013 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). IEEE. 2013. P. 448–455.
11. Farokhi F., Krichene W., Bayen A.M., Johansson K.H. *A necessary and sufficient condition for the existence of potential functions for heterogeneous routing games* // arXiv preprint arXiv:1312.1075. 2013.
12. Ferguson B.L., Brown P.N., Marden J.R. *The effectiveness of subsidies and tolls in congestion games* // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. V. 67. N. 6. P. 2729–2742.
13. Huang K., Chen X., Di X., Du Q. *Dynamic driving and routing games for autonomous vehicles on networks: A mean field game approach* // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2021. V. 128. P. 103189.
14. Mehr N., Horowitz R. *How will the presence of autonomous vehicles affect the equilibrium state of traffic networks?* // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2019. V. 7. N. 1. P. 96–105.

15. Rosenthal R.W. *A class of Games Possessing Pure Strategy Nash Equilibria* // Int. J. of Game Theory, V. 2. 1973. P. 65-67.
16. Stern E., Richardson H.W. *Behavioural modelling of road users: current research and future needs* // Transport Reviews. 2005. V. 25. N. 2. P. 159–180.
17. Thai J., Laurent-Brouty N., Bayen A.M. *Negative externalities of GPS-enabled routing applications: A game theoretical approach* // In 2016 IEEE 19th international conference on intelligent transportation systems (ITSC). IEEE. 2019. P. 595–601.
18. Wang J., Jiang K., Wu Y. // *On congestion games with player-specific costs and resource failures* // Automatica. 2022. V. 142. P. 110367.
19. Wu M., Liu J., Amin S. *Informational aspects in a class of Bayesian congestion games* // In 2017 American Control Conference (ACC). IEEE. 2017. P. 3650–3657.

## POTENTIAL IN CONGESTION GAME WITH DIFFERENT TYPES OF VEHICLES

**Natalia N. Nikitina**, Institute of Applied Mathematical Research  
KarRC RAS, Cand.Sc. (nikitina@krc.karelia.ru),

**Vladimir V. Mazalov**, Institute of Applied Mathematical Research  
KarRC RAS, Novgorod State University, Dr.Sc., professor  
(vmazalov@krc.karelia.ru).

*Abstract:* Heterogeneous congestion games make it possible to simulate traffic situations involving multiple classes of vehicles with different preferences in choosing routes. In the presented work, we prove the existence of a potential in a discrete congestion game with  $n$  classes of players. Examples are given of calculating equilibria and the emergence of the Braess paradox, as well as the use of the constructed congestion game to analyze the distribution of vehicles in the graph of urban roads of the city of Petrozavodsk.

*Keywords:* congestion game, routing game, potential, Nash equilibrium, Braess paradox, transport graph.