Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.4, с. 49–88

УДК 517.977
ББК 22.1

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Николай А. Красовский*
Александр М. Тарасьев*
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
e-mail: nkrasovskiy@gmail.com, tam@imm.uran.ru

В работе рассматривается некооперативная игра с несколькими участниками, в которой игроки (правительства соседних стран) осуществляют торговлю квотами по снижению промышленных выбросов. Особое внимание уделяется случаю двух игроков, одним из которых являются страны Восточной Европы, а другим – страны бывшего Советского Союза. Проводится статистический анализ параметров модели, основанный на реальных данных, для квадратичных функций затрат и логарифмических функций выгоды. Вводятся понятия некооперативного равновесия по Нэшу, кооперативных максимумов по Парето и устанавливаются связи между ними. Дается определение нового понятия – рыночного равновесия, комбинирующего свойства равновесий Нэша и Парето. Представлено аналитическое решение поставленной задачи нахождения рыночного равновесия. Такое аналитическое решение может служить в качестве теста для верификации численных алгоритмов поиска. Предлагается также вычислительный алгоритм поиска

©2011 Н.А. Красовский, А.М. Тарасьев

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587а), РГНФ (проект 08-02-00315а), гранта Президента РФ (НШ-64508.2010.1), программы Президиума РАН № 29 «Математическая теория управления», Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

рыночного равновесия, который сдвигает конкурентное равновесие по Нэшу к кооперативному максимуму Парето. Алгоритм интерпретирован в форме повторяющегося аукциона, в котором аукционер не имеет информации о функциях затрат и функциях экологического эффекта от снижения эмиссий для стран-участников. Рассматривается стратегия аукционера, которая создает условия достижения рыночного равновесия. С точки зрения теории игр повторяющийся аукцион описывает процесс обучения в некооперативной повторяющейся игре при дефиците информации. Проведено сравнение результатов аналитических решений и предложенных вычислительных алгоритмов. Приведены численные расчеты положений равновесия и сходящихся к ним траекторий алгоритма.

Ключевые слова: динамические игры, равновесие Нэша, максимум Парето, алгоритмы поиска равновесия, моделирование аукционов.

1. Введение

В работе рассматривается игровая модель, связанная с нахождением точек равновесия специального вида. Такие равновесные точки обладают как конкурентными, так и кооперативными свойствами. Рассматриваемая постановка имеет основание в реальных экономических процессах, в которых поиск равновесия производится при обмене информацией между игроками. Например, к такой постановке относится проблема нахождения обменного равновесия между агентами, которые производят и потребляют общественные блага. Другим примером может являться переговорный процесс аукционного типа. В этих процессах оценки и производственные стоимости каждого из агентов неизвестны другим. Каждый игрок может только сотрудничать, участвуя в производстве общественного блага (сотрудничество в виде денежного платежа не допускается). В качестве примера можно указать события в Нидерландах, где жители местности, находящейся под угрозой затопления, объединили усилия в сооружении плотин. В качестве другого примера можно привести многосторонние переговоры об обоюдном разоружении. Важным примером являются переговорные процессы по снижению эмиссий вредных веществ в атмосферу. Рассматриваемая модель примыкает к постановке задач теории неантагонистических игр [1, 2, 9, 7, 15, 26].

В данной работе внимание главным образом сконцентрировано на международном сотрудничестве по защите окружающей среды. Многие сотрудничества такого рода имеют форму соглашений между правительствами стран по обоюдному снижению эмиссий парниковых газов на трансграничных территориях. Примерами могут служить Второй Протокол о сокращении выбросов серы (1994 год), Киотский Протокол (1997 год) и Копенгагенская конференция ООН по изменению климата (2009 год). Обязательства протоколов могут сильно варьироваться. Например, во Втором Протоколе о сокращении выбросов серы – снижение к 2010 году совокупного среднего уровня выбросов на 87% относительно 1980 года. Цель же ограничений Киотского Протокола – снижение выбросов к 2012 году на 5.2% по сравнению с уровнем 1990 года.

Такая разница в цифрах ставит вопрос, возможно ли разработать процедуры для улучшения процесса переговоров, которые бы уточняли параметры соглашений, приемлемые для всех участников.

В экономической теории в достаточной степени пренебрегают такого рода проблемами. В основном экономисты рассматривают вопрос существования стимула для участия в соглашении. Такие выводы о создании коалиции и ее стабильном состоянии обсуждаются в работе [8]. Более близки к вопросам нашего проекта работы [10, 19], в которых предлагаются алгоритмы нахождения равновесных решений. Такие конструкции определяют обязательства участников по снижению эмиссий. Недостаток такого подхода состоит в том, что денежные трансферы между участниками вовлечены в поиск кооперативного решения.

Наше внимание сконцентрировано главным образом на случае обоюдного трансграничного загрязнения, при котором страны «платят» друг другу снижением эмиссий в качестве «услуги за услугу». Случай торговли обоюдным снижением эмиссий, который преобладает в реальной практике был исследован в работах [14, 20, 21]. При этом представлено статическое кооперативное решение.

В теории игр аналогичные идеи можно найти в работе [11], в которой с помощью алгоритмов распределения была проанализирована проблема вычисления оптимальных решений Парето.

В настоящем исследовании представлена комбинация математи-

ческой модели некооперативных игр и экономической модели «торговли» снижением эмиссий на аукционе. При таком подходе международные переговоры по защите окружающей среды интерпретированы в качестве многосторонней торговли между странами, при которой «товаром» являются снижения эмиссий каждой из сторон. Основная идея заключается в том, что страна i желает снизить эмиссии на своей территории, лишь в случае, если в обмен на это она получает достаточное снижение загрязнений, «импортированных» из соседних стран, $i = 1, \ldots, n$. В процессе каждая страна старается максимизировать свою функцию полезности, в которой затраты на снижение эмиссий сбалансированы с пользой от экологического эффекта. Экологический эффект увеличивается при снижении эмиссий всеми странами участниками международного соглашения.

Во втором разделе приводится описание модели. В этой модели в качестве затрат по снижению эмиссий выбраны квадратичные функционалы, а для описания экологического эффекта служат логарифмические функционалы. Функция полезности составляется как разность между затратами и выгодой от снижения эмиссий. Выбран вариант игры двух участников, одним из которых являются страны Восточной Европы, а другим – страны бывшего Советского Союза. Коэффициенты для функций затрат и функций экологического эффекта основаны на реальных данных [12, 24], значения которых показывают, что затраты по снижению эмиссий значительно различаются для игроков: для стран Восточной Европы затраты значительно дороже.

В третьем разделе дается определение конкурентного равновесия по Нэшу. Решается задача нахождения таких равновесий, которые участники достигают максимизируя собственные функции полезности.

В четвертом разделе дается определение точек кооперативного максимума по Парето. Рассматривается задача поиска всех точек максимума по Парето.

В пятом разделе приводится доказательство того, что в рассматриваемой модели существуют точки максимума по Парето, доминирующие равновесие по Нэшу по всем критериям.

В шестом разделе приводится определение рыночного равновесия.

Под рыночным равновесием понимается точка, лежащая в множестве точек максимума по Парето. Такое равновесие обладает специальными декомпозиционными свойствами и достигается участниками в пошаговой процедуре обмена информацией.

В седьмом разделе представлено аналитическое решение поставленной задачи нахождения рыночного равновесия. Результаты реализованы в программе MATLAB. Приведена графическая иллюстрация решения для реальных данных. Такое аналитическое решение может служить в качестве теста для верификации численных алгоритмов поиска.

В восьмом разделе рассматриваются вычислительные алгоритмы поиска точек рыночного равновесия. Следует отметить, что разработанные алгоритмы примыкают к теории позиционных дифференциальных игр [4, 17], включая раздел неантагонистических позиционных дифференциальных игр [3]. Они используют элементы дифференциально-эволюционных игр [5, 13, 15, 22, 16, 18, 23].

В девятом разделе представлено доказательство локальной устойчивости рыночного равновесия для динамики алгоритма. Доказательство основано на проверке критерия Сильвестра для матрицы Якоби правой части динамической системы.

Алгоритмы сформулированы в виде элементов аукциона. Аукционный процесс можно представить в виде декомпозиционного алгоритма поиска равновесия при дефиците информации (см. [6, 17, 25]). Аукционер предлагает конкретные для каждой страны цены или обменные курсы, которые определяют количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна i получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Страны-участники отвечают одновременно, указывая снижение эмиссий, которые они желают произвести, за предлагаемую цену. В процессе аукционер имеет информацию о коэффициентах перемещения эмиссий между странами-участниками. Он использует их, чтобы перевести снижение эмиссий, предложенных странами в итоговую загрузку конкретной страны загрязнениями. Аукционер не имеет точной информации о функциях полезности стран-участников. У него могут быть лишь грубые оценки темпов их роста. Аукционер учитывает предложенные странами-участниками снижения эмиссий и загрузку загрязнением

и сравнивает их с требуемыми. В случае большого отклонения между «предложением» и «спросом» он предлагает новые цены. Со своей стороны участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности. Алгоритмы реализованы в программе MATLAB и сводятся к интегрированию нелинейных систем дифференциальных уравнений. Проведено сравнение результатов предложенных численных алгоритмов и аналитических решений. Сравнение показывает высокую точность численного метода, который дает практически идентичные результаты аналитическому решению.

2. Описание модели

Рассматривается игровая модель, целью которой является сдвиг игроков от некооперативного равновесия к кооперативному максимуму. Прототипом такой задачи является модель торговли снижениями эмиссий (см. [20]). В модели задействовано n игроков, которыми могут являться страны – участники соглашения, решающие проблему по снижению эмиссий парниковых газов. Предполагается, что соглашение достигается в процессе пошагового аукциона, которым управляет аукционер. Каждая страна i контролирует собственную величину снижения эмиссий $x_i \geq 0$. Страна i заинтересована в максимизации собственной функции полезности w_i, которая задана формулой

$$w_i(x) = -C_i(x_i) + B_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j\Big). \tag{2.1}$$

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n)$ – полный вектор снижения эмиссий, $C_i(x_i)$ – функция затрат страны i на снижение эмиссий x_i, $B_i\big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}x_j\big)$ – функция экологического эффекта, который получает страна i благодаря общему снижению загрязнения $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}x_j$ на ее территории, и a_{ji} – коэффициент трансграничного переноса, т. е. часть промышленных выбросов страны j, перенесенных на территорию страны i. Предполагается, что $a_{ji} > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}x_j \leq 1$. Считается, что функции затрат C_i выпуклы и монотонно возрастают. Кроме того, предполагается, что функции экологического эффекта B_i строго вогнуты и

монотонно возрастают, а также имеют уровень насыщения $\bar{y}_i$, который остается постоянным в интервале $[\bar{y}_i, \infty)$. Считается, что функции C_i и B_i дважды дифференцируемы, и выполняются следующие условия:

$$C_i'(x_i) > 0, \quad C_i''(x_i) \geq 0 \quad (x_i \geq 0), \tag{2.2}$$
$$B_i'(y_i) > 0, \quad B_i''(y_i) < 0 \quad (0 \leq y_i < \overline{y}_i), \quad B_i'(y_i) = 0, \quad (y_i \geq \overline{y}_i).$$

В силу этих условий функции полезности w_i являются строго вогнутыми функциями.

Процесс нахождения вектора снижения эмиссий x представляется как некооперативная игра с участием n-игроков (см. [1, 9, 11]). Допустимые стратегии игрока i идентифицируются снижением эмиссий $x_i \geq 0$. Предполагается, что при торговле снижениями эмиссий (на международных переговорах) делегат от страны i полностью информирован о матрице коэффициентов трансграничного переноса

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

а также о функции полезности w_i страны, которую он представляет. Можно полагать, что он не имеет информации о функциях полезности других стран.

Модель специфицируется для игровой ситуации между странами Восточной Европы и странами бывшего Советского Союза. Для них идентифицированы квадратичные [12] функции затрат

$$\begin{aligned} C_1(x_1) &= -\frac{e_1}{2}x_1^2 + c_1, \\ C_2(x_2) &= -\frac{e_2}{2}x_2^2 + c_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

и логарифмические [24] функции экологического эффекта

$$\begin{aligned} B_1(x_1, x_2) &= d_1 \ln(a_{11}x_1 + a_{21}x_2), \\ B_2(x_1, x_2) &= d_2 \ln(a_{12}x_1 + a_{22}x_2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что свободные члены функций затрат равны нулю

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0. \tag{2.6}$$

Коэффициенты при квадратичных членах в функциях затрат имеют значения

$$e_1 = 0.15, \quad e_2 = 0.0042. \tag{2.7}$$

Такая разница в значениях коэффициентов функций затрат объясняется тем, что в странах Европейского Союза снижение эмиссий более затратно, чем в странах бывшего Советского Союза.

Коэффициенты для функций экологического эффекта имеют значения

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1. \tag{2.8}$$

Равное значение этих коэффициентов показывает, что все страны одинаково заинтересованы в улучшении экологической обстановки в результате снижения эмиссий.

Для случая снижения эмиссий углекислого газа (CO_2) коэффициенты трансграничного переноса можно считать единичными: $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1$, так что матрица коэффициентов трансграничного переноса (2.3) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Пользуясь соотношением (2.1), представим полученные функции полезности для этих стран (w_1, w_2) в виде

$$\begin{aligned} w_1(x_1, x_2) &= -\frac{e_1}{2}x_1^2 - c_1 + d_1 \ln(a_{11}x_1 + a_{21}x_2) = \\ &= -0.075x_1^2 + \ln(x_1 + x_2), \\ w_2(x_1, x_2) &= -\frac{e_2}{2}x_2^2 - c_2 + d_2 \ln(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= -0.00021x_2^2 + \ln(x_1 + x_2). \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Равновесие по Нэшу

Напомним определение равновесия по Нэшу.

Определение 3.1. *Вектор снижения эмиссий* $x^N = (x_1^N, \ldots, x_n^N)$ *является равновесием по Нэшу, если для него выполняется система равновесных условий*

$$\max_{x_i \geq 0} w_i\big(x_1^N, \ldots, x_i, \ldots, x_n^N\big) = w_i\big(x_1^N, \ldots, x_i^N, \ldots, x_n^N\big), \ i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Так как функции w_i строго вогнуты, отношения (3.1) эквивалентны тому, что все частные производные $\dfrac{\partial w_i(x^N)}{\partial x_i}$ в равновесии должны быть равны 0:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\left(x^N\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Более точно, точка x^N является решением системы уравнений

$$-C_i'(x_i) + a_{ii}B_i'\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j\right) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Согласно соотношениям (2.10) конкурентное равновесие по Нэшу определяется системой уравнений

$$\begin{cases} -e_1x_1 + d_1\dfrac{1}{a_{11}x_1 + a_{21}x_2}a_{11} = 0, \\ -e_2x_2 + d_2\dfrac{1}{a_{12}x_1 + a_{22}x_2}a_{22} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

После приведения к общему знаменателю имеем

$$\begin{cases} -e_1a_{11}x_1^2 - e_1a_{21}x_1x_2 + d_1a_{11} = 0, \\ -e_2a_{12}x_1x_2 - e_2a_{22}x_2^2 + d_2a_{22} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

После домножения уравнений на соответствующие коэффициенты получаем

$$\begin{cases} -e_1e_2a_{11}a_{12}x_1^2 - e_1e_2a_{21}a_{12}x_1x_2 + d_1e_2a_{11}a_{12} = 0, \\ -e_1e_2a_{21}a_{12}x_1x_2 - e_1e_2a_{21}a_{22}x_2^2 + d_2e_1a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

Операция вычитания уравнений приводит подобные

$$-e_1e_2a_{11}a_{12}x_1^2 + d_1e_2a_{11}a_{12} + e_1e_2a_{21}a_{22}x_2^2 - d_2e_1a_{21}a_{22} = 0.$$

Исключаем переменную x_1

$$x_1^2 = \frac{e_1e_2a_{21}a_{22}x_2^2 + d_1e_2a_{11}a_{12} - d_2e_1a_{21}a_{22}}{e_1e_2a_{11}a_{12}}.$$

Почленное деление дает

$$x_1^2 = \frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}a_{12}}x_2^2 + \frac{d_1}{e_1} - \frac{d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{11}a_{12}}. \tag{3.6}$$

Подставив значение x_1^2 из (3.6) в первое уравнение системы (3.5), получим после сокращения подобных

$$-\frac{e_1a_{21}a_{22}}{a_{12}}x_2^2 + \frac{e_1d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{12}} = e_1a_{21}x_1x_2. \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$A = \frac{e_1a_{21}a_{22}}{a_{12}}, \tag{3.8}$$

$$B = \frac{e_1d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{12}}, \tag{3.9}$$

$$C = e_1a_{21}. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.7) имеем соотношение

$$-Ax_2^2 + B = Cx_1x_2.$$

После возведения в квадрат имеем

$$A^2x_2^4 + B^2 - 2ABx_2^2 = C^2x_1^2x_2^2. \tag{3.11}$$

Подставив значение x_1^2 из (3.6) в соотношение (3.11), получим уравнение относительно x_2

$$A^2x_2^4 - 2ABx_2^2 + B^2 = C^2\frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}a_{12}}x_2^4 + C^2\frac{d_1}{e_1}x_2^2 - C^2\frac{d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{11}a_{12}}x_2^2.$$

После группировки слагаемых имеем

$$\big(A^2 - C^2\frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}a_{12}}\big)x_2^4 - \big(2AB + C^2\frac{d_1}{e_1} - C^2\frac{d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{11}a_{12}}\big)x_2^2 + B^2 = 0. \tag{3.12}$$

Подставив значения A, B, C из (3.8)–(3.10) в соотношение (3.12), получим

$$\big(\frac{e_1a_{21}}{a_{12}}\big)^2\frac{a_{22}}{a_{21}}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2^4 + \big(\frac{e_1d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{12}}\big)^2 -$$
$$-\frac{e_1a_{21}^2}{e_2a_{11}a_{12}^2}\big(e_1a_{22}d_2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + a_{11}(e_1a_{22}^2d_2 + e_2a_{12}^2d_1)\big)x_2^2 = 0. \tag{3.13}$$

Учитывая, что коэффициенты трансграничного переноса a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ задаются матрицей (2.9), перепишем соотношение (3.13) в виде

$$\Big(\frac{e_1}{e_2}(e_1 d_2 + e_2 d_1)\Big)x_2^2 - \Big(\frac{e_1 d_2}{e_2}\Big)^2 = 0.$$

Окончательно получаем решение для x_2

$$x_2^2 = \frac{e_1 d_2^2}{e_2(e_1 d_2 + e_2 d_2)}. \tag{3.14}$$

Аналогично получается решение для x_1

$$x_1^2 = \frac{e_2 d_1^2}{e_1(e_1 d_2 + e_1 d_2)}. \tag{3.15}$$

Нас интересует только положительные корни. В таком случае точка равновесия по Нэшу имеет координаты

$$\begin{aligned} x_1^N &= d_1\left(\frac{e_2}{e_1(e_1 d_2 + e_2 d_1)}\right)^{1/2}, \\ x_2^N &= d_2\left(\frac{e_1}{e_2(e_1 d_2 + e_2 d_1)}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Программа MATLAB выдает следующие значения для корней x_1, x_2

$$x_1^N = 0.4261, \;\; x_2^N = 15.2187. \tag{3.17}$$

4. Множество точек максимума по Парето

Определение 4.1. *Вектор $x^P = (x_1^P, \ldots, x_n^P)$ называется максимумом Парето, если для любого другого вектора $x \neq x^P$ найдется компонента j, для которой $w_j(x) < w_j(x^P)$.*

По теореме Гермейера (см. [2]) для строго вогнутых функций w_i множество точек Парето совпадает с множеством всех решений параметрического семейства задач максимизации

$$\text{maximize } w(x, \alpha), \quad x_i \geq 0, \tag{4.1}$$

где символ $w(x, \alpha)$ обозначает функцию свертки:

$$w(x, \alpha) = w(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k(x).$$

Коэффициенты свертки α должны быть неотрицательными, т. е.

$$\alpha_k \geq 0\,, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Можно также считать, что для коэффициентов свертки выполнено следующее условие:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1. \tag{4.3}$$

Согласно строгой вогнутости w_i максимизатор в (4.1) описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Таким образом, точки Парето являются решениями серии систем уравнений (4.4) с произвольными коэффициентами свертки α_k, удовлетворяющими условиям (4.2), (4.3). Заметим, что условие (4.4) выражает тот факт, что строки матрицы Якоби

$$Dw(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w_1(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial w_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial w_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w_2(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial w_2(x)}{\partial x_n} \\ & & \ldots & \\ \dfrac{\partial w_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w_n(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial w_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

линейно зависимы с коэффициентами α_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Введем коэффициенты α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, и определим функцию свертки

$$w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 w_1(x_1, x_2) + \alpha_2 w_2(x_1, x_2).$$

Согласно соотношениям (2.10) имеем

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1\big(-\frac{e_1}{2}x_1^2 - c_1 + d_1 \ln(x_1 + x_2)\big) + \\ +\alpha_2\big(-\frac{e_2}{2}x_1^2 - c_2 + d_1 \ln(x_1 + x_2)\big). \end{aligned}$$

Согласно определению 4.1 множество точек максимума Парето можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}(x_1^P, x_2^P) + \alpha_2 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}(x_1^P, x_2^P) = 0, \\ \alpha_1 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}(x_1^P, x_2^P) + \alpha_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}(x_1^P, x_2^P) = 0. \end{cases}$$

Подставляя выражения для производных, получим

$$\begin{cases} -\alpha_1 e_1 x_1 + \alpha_1 d_1 \dfrac{1}{(x_1 + x_2)} + \alpha_2 d_2 \dfrac{1}{(x_1 + x_2)} = 0, \\ -\alpha_2 e_2 x_2 + \alpha_1 d_1 \dfrac{1}{(x_1 + x_2)} + \alpha_2 d_2 \dfrac{1}{(x_1 + x_2)} = 0. \end{cases}$$

Приведение подобных дает соотношение

$$\alpha_1 e_1 x_1 = \alpha_2 e_2 x_2.$$

Имеем следующую пропорцию

$$x_1 = \frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2.$$

Исключение одной из переменных влечет

$$-\alpha_1 e_1 \frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2 + \alpha_1 d_1 \frac{1}{(\frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2 + x_2)} + \alpha_2 d_2 \frac{1}{(\frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2 + x_2)} = 0.$$

Сокращение подобных дает

$$-\alpha_2 e_2 x_2 + \frac{\alpha_1 d_1 \alpha_1 e_1}{(\alpha_2 e_2 + \alpha_1 e_1) x_2} + \frac{\alpha_2 d_2 \alpha_1 e_1}{(\alpha_2 e_2 + \alpha_1 e_1) x_2} = 0.$$

После приведения к общему знаменателю имеем соотношение

$$\alpha_2 e_2 (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) x_2^2 = \alpha_1 e_1 (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2).$$

В результате получим решение для одной из координат

$$x_2^2 = \frac{\alpha_1 e_1}{\alpha_2 e_2} \frac{\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2}{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2}.$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$. Тогда

$$x_2^2 = \frac{\alpha e_1}{(1-\alpha) e_2} \frac{\big(\alpha d_1 + (1-\alpha) d_2\big)}{\big(\alpha e_1 + (1-\alpha) e_2\big)}.$$

Приведение подобных влечет выражение для квадрата второй координаты

$$x_2^2 = \frac{\alpha e_1}{(1-\alpha) e_2} \frac{d_2 + \alpha(d_1 - d_2)}{e_2 + \alpha(e_1 - e_2)}. \tag{4.7}$$

Условие пропорциональности

$$x_1^2 = \frac{\alpha_2^2 e_2^2}{\alpha_1^2 e_1^2} x_2^2$$

дает выражение для квадрата первой координаты

$$x_1^2 = \frac{(1-\alpha)^2 e_2^2}{\alpha^2 e_1^2} \left(\frac{\alpha e_1}{(1-\alpha) e_2} \frac{d_2 + \alpha(d_1 - d_2)}{e_2 + \alpha(e_1 - e_2)} \right). \tag{4.8}$$

Таким образом, решением системы уравнений (4.6) является множество точек максимума Парето

$$\begin{cases} x_1^P(\alpha) = \left(\dfrac{(1-\alpha) e_2 \big(d_2 + \alpha(d_1 - d_2)\big)}{\alpha e_1 \big(e_2 + \alpha(e_1 - e_2)\big)} \right)^{1/2}, \\ x_2^P(\alpha) = \left(\dfrac{\alpha e_1 \big(d_2 + \alpha(d_1 - d_2)\big)}{(1-\alpha) e_2 \big(e_2 + \alpha(e_1 - e_2)\big)} \right)^{1/2}, \end{cases} \tag{4.9}$$

параметризованное коэффициентом α, $0 \le \alpha \le 1$.

5. Доминирование точек максимума Парето над равновесием по Нэшу

Этот раздел посвящен доказательству существования точек максимума Парето, которые строго доминируют точку равновесия по Нэшу по векторному критерию. Этот результат необходим для того, чтобы показать возможность сдвига от положения равновесия по

Нэшу в более благоприятное положение некоторых точек максимума по Парето.

Для установления этого факта покажем, что в интервале $0 \leq \alpha \leq$ ≤ 1 существуют значения коэффициента α, при которых совместна система неравенств

$$\begin{cases} x_1^P(\alpha) > x_1^N, \\ x_2^P(\alpha) > x_2^N. \end{cases} \tag{5.1}$$

Видно, что эта система эквивалентна следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)e_2\big(d_2+\alpha(d_1-d_2)\big)}{\alpha e_1\big(e_2+\alpha(e_1-e_2)\big)} > \dfrac{e_2 d_1^2}{e_1(e_1 d_2+e_2 d_1)}, \\ \dfrac{\alpha e_1\big(d_2+\alpha(d_1-d_2)\big)}{(1-\alpha)e_2\big(e_2+\alpha(e_1-e_2)\big)} > \dfrac{e_1 d_2^2}{e_2(e_2 d_1+e_1 d_2)}. \end{cases}$$

Коэффициенты $e_1, e_2, d_1, d_2, \alpha, (1-\alpha)$ имеют положительное значение, и, следовательно, приведение к общему знаменателю не меняет знаков неравенств

$$\begin{cases} (1-\alpha)\big(d_2+\alpha(d_1-d_2)\big)(e_1 d_2+e_2 d_1) > d_1^2\alpha\big(e_2+\alpha(e_1-e_2)\big), \\ \alpha\big(d_2+\alpha(d_1-d_2)\big)(e_1 d_2+e_2 d_1) > d_2^2(1-\alpha)\big(e_2+\alpha(e_1-e_2)\big). \end{cases} \tag{5.2}$$

Введем вспомогательный коэффициент $A = e_1 d_2 + e_2 d_1$

$$\begin{cases} \big(d_1^2(e_1-e_2)+A(d_1-d_2)+A(d_1-d_2)\big)\alpha^2+ \\ +\big(d_1^2 e_2 - A(d_1-2d_2)\big)\alpha - A d_2 < 0, \\ (e_2 d_1^2 - e_2 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 - e_2 d_1 d_2)\alpha^2 + (2e_2 d_2^2 + e_2 d_1 d_2)\alpha - e_2 d_2^2 > 0\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

Дадим коэффициентам при α^2 обозначения a_1 для первого неравенства и a_2 для второго неравенства

$$a_1 = e_1 d_1^2 - e_1 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 - e_2 d_1 d_2,$$
$$a_2 = e_2 d_1^2 - e_2 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 - e_2 d_1 d_2.$$

Дадим коэффициентам при α обозначения b_1 для первого неравенства и b_2 для второго неравенства

$$b_1 = 2e_1 d_2^2 + 2e_2 d_1 d_2 - e_1 d_2 d_1,$$
$$b_2 = 2e_2 d_2^2 + e_2 d_1 d_2.$$

Дадим свободным членам обозначения c_1 для первого неравенства и c_2 для второго неравенства

$$c_1 = -e_1 d_2^2 - e_2 d_1 d_2,$$
$$c_2 = -e_2 d_2^2.$$

Преобразуем систему неравенств (5.3) к следующему виду

$$\begin{cases} a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 < 0, \\ a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 > 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Введем обозначения для парабол

$$p_1(\alpha) = a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1,$$
$$p_2(\alpha) = a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2.$$

Тогда систему неравенств (5.4) можно представить в виде

$$\begin{cases} p_1(\alpha) < 0, \\ p_2(\alpha) > 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Покажем, что существуют такие значения параметра α из отрезка $0 \le \alpha \le 1$, при которых система имеет решение. Для этого будем исследовать взаиморасположение графиков парабол.

5.1. Взаиморасположение парабол в случае $\alpha = 0, \alpha = 1$

При $\alpha = 0$ имеем

$$p_1(\alpha) \mid_{\alpha=0} = -(e_1 d_2 + e_2 d_1) d_2,$$
$$p_2(\alpha) \mid_{\alpha=0} = -e_2 d_2^2.$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$p_1(\alpha) \mid_{\alpha=1} = 2e_1 d_1^2,$$
$$p_2(\alpha) \mid_{\alpha=1} = e_1 d_1 d_2.$$

Обе параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ имеют отрицательные значения при $\alpha = 0$ и положительные значения при $\alpha = 1$. Это означает, что на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ обе параболы пересекают ось абсцисс только один раз.

Выясним положение парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ относительно друг друга в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Без ограничения общности полагаем, что $e_1 > e_2$ (в противном случае, можно поменять страны местами).

Сравним значения свободных членов c_1 и c_2 при $\alpha = 0$

$$\big(p_1(\alpha) - p_2(\alpha)\big)\,|_{\alpha=0} = c_1 - c_2 = -(e_1 d_2^2 + e_2 d_1 d_2 + e_2 d_2^2) < 0.$$

Из этого соотношения видно, что при пересечении оси ординат парабола $p_1(\alpha)$ лежит ниже параболы $p_2(\alpha)$ при любых значениях коэффициентов.

Выясним положение парабол относительно друг друга при $\alpha = 1$

$$\big(p_1(\alpha) - p_2(\alpha)\big)\,|_{\alpha=1} = e_1 d_1^2 - e_2 d_1^2 + e_1 d_1 d_2.$$

Сравним значения $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ при $\alpha = 1$. Уравняем правые части

$$e_1 d_1^2 = e_2 d_1^2 + e_1 d_1 d_2.$$

Домножим обе части этого уравнения на величину $\dfrac{1}{e_1 d_1^2}$. Получим

$$1 = \frac{d_2}{d_1} + \frac{e_2}{e_1} = \xi + \eta.$$

Здесь введены новые переменные $\xi = \dfrac{d_2}{d_1}$, $\eta = \dfrac{e_2}{e_1}$. Отметим, что $\xi > 0$ и $0 < \eta < 1$.

Имеем три случая положения парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ при $\alpha = 1$:

1. $p_1(\alpha) < p_2(\alpha)$ при $\xi > 1 - \eta$,
2. $p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$ при $\xi = 1 - \eta$,
3. $p_1(\alpha) > p_2(\alpha)$ при $\xi < 1 - \eta$.

5.2. Направление «рожек» для парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$

Выясним в каких случаях параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ являются восходящими или нисходящими. Для этого определим знаки у коэффициентов a_1 и a_2. Для коэффициента a_1 имеем соотношение

$$a_1 = e_1 d_1^2 - e_1 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 - e_2 d_1 d_2.$$

Выясним знак коэффициента a_1 относительно параметра ξ. Для этого решим квадратное уравнение

$$-e_1\xi^2 + (e_1 - e_2)\xi + e_1 = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень

$$\xi_1 = \frac{e_1 - e_2 + \left((e_1 - e_2)^2 + 4e_1^2\right)^{1/2}}{2e_1}.$$

Имеем

$$a_1 > 0 \text{ при } 0 \le \xi < \xi_1,$$

$$a_1 \le 0 \text{ при } \xi \ge \xi_1.$$

Для коэффициента a_2 имеем выражение

$$a_2 = e_2 d_1^2 - e_2 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 - e_2 d_1 d_2.$$

Выясним знак коэффициента a_2 относительно параметра ξ. Для этого решим квадратное уравнение

$$-e_2\xi^2 + (e_1 - e_2)\xi + e_2 = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень

$$\xi_2 = \frac{e_1 - e_2 + \left((e_1 - e_2)^2 + 4e_2^2\right)^{1/2}}{2e_2}.$$

Имеем

$$a_2 > 0 \text{ при } 0 \le \xi < \xi_2,$$

$$a_2 \le 0 \text{ при } \xi \ge \xi_2.$$

Обе параболы $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ являются нисходящими. Нетрудно также показать, что они пересекаются в точке $\xi = 1$. Следовательно, при условии, что $e_1 > e_2$, имеем $\xi_2 > \xi_1 > 1$ (см. рис. 1). Зависимость значения коэффициентов a_1 и a_2 от параметра ξ представлена на рис. 1.

Имеем четыре случая для значений коэффициентов a_1 и a_2:

1. $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ при $0 \le \xi < \xi_1$,
2. $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ при $\xi_1 < \xi < \xi_2$,
3. $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ при $\xi > \xi_2$,
4. $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ при $\xi > \xi_2$ и $\xi < \xi_1$.

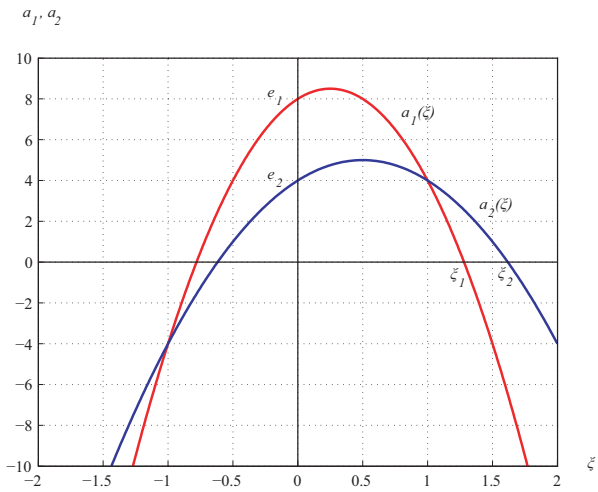

Рисунок 1. Зависимость значения коэффициентов a_1 и a_2 от параметра ξ

Отметим, что случай 4 нас не интересует, так как $\xi_2 > \xi_1$.

5.3. Анализ ситуаций пересечения парабол

Чтобы выяснить, есть ли у парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ точки пересечения на отрезке $0 \le \alpha \le 1$, рассмотрим их разность

$$p_3(\alpha) = (1-\eta)(1-\xi^2)\alpha^2 + (1-\eta)(2\xi^2-\xi)\alpha - \big((1-\eta)\xi^2 + \xi\eta\big). \quad (5.6)$$

Выясним, сколько пересечений с осью абсцисс имеет данная парабола на отрезке $0 \le \alpha \le 1$. Столько же пересечений друг с другом имеют на этом отрезке параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$. Вычислим значение параболы p_3 при $\alpha = 0$

$$p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0} = -\big((1-\eta)\xi^2 + \eta\xi\big).$$

Так как $\eta < 1$, то при $\alpha = 0$ для всех ξ имеем один случай

$$p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0} < 0.$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} = 1 - \eta - \xi.$$

При $\alpha = 1$ возникают 4 случая:

$$1.\ p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} > 0 \text{ при } \xi < 1-\eta,$$
$$2.\ p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} = 0 \text{ при } \xi = 1-\eta,$$
$$3.\ p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} < 0 \text{ при } 1-\eta < \xi < 1,$$
$$4.\ p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} < 0 \text{ при } 1-\eta < \xi, \quad \xi > 1.$$

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

$$1.\ \xi < 1-\eta.$$

Коэффициент при α^2 из соотношения (5.6) принимает положительное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является восходящей. При этом парабола принимает следующие значения на концах отрезка $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} > 0$. То есть, на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ есть только одно пересечение параболы $p_3(\alpha)$ с осью абсцисс, и, следовательно, одно пересечение парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ друг с другом. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 2.

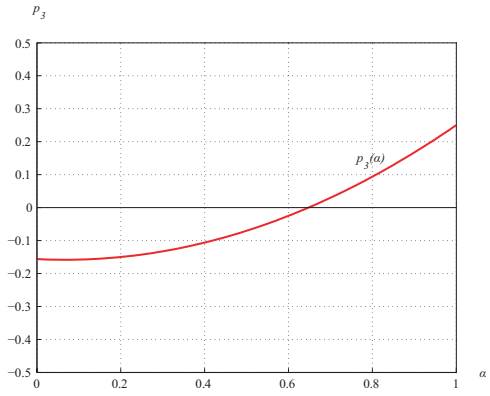

Рисунок 2. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 1

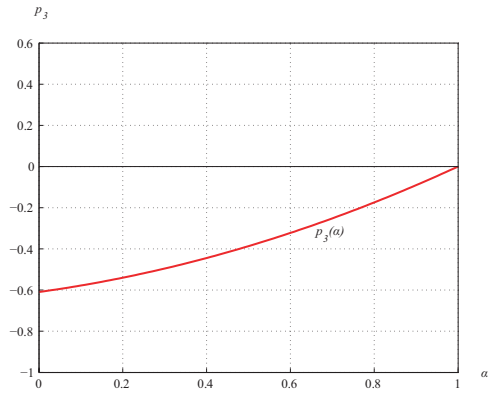

Рисунок 3. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 2

$$2.\ \xi = 1 - \eta.$$

Коэффициент при α^2 из соотношения (5.6) принимает положительное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является восходящей. Парабола имеет следующие значения на концах отрезка $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=1} = 0$. Таким образом, на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ есть только одно пересечение параболы $p_3(\alpha)$ с осью абсцисс при значении $\alpha = 1$, а, следовательно, одно пересечение парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ друг с другом в этой же точке. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 3.

$$3.\ 1 - \eta < \xi < 1.$$

Коэффициент при α^2 из соотношения (5.6) принимает положительное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является восходящей. Значения параболы принимает одинаковый знак на концах отрезка $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0} < 0$. То есть на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ друг с другом не пересекаются. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 4.

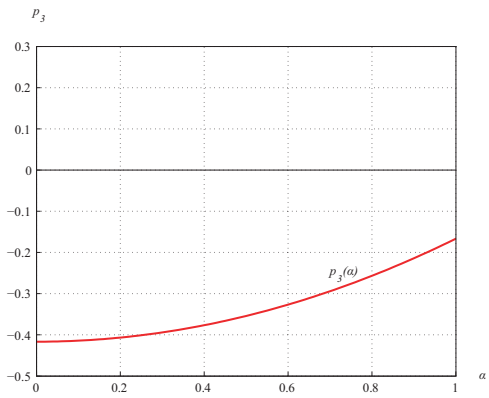

Рисунок 4. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 3

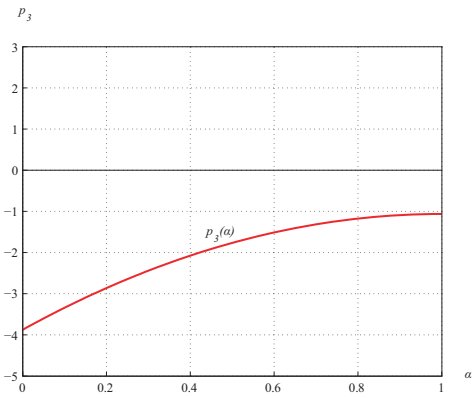

Рисунок 5. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 4

4. $\xi > 1$.

Коэффициент при α^2 из соотношения (5.6) принимает отрицательное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является нисходящей. Значения параболы на концах отрезка имеют один знак $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0}< 0$ и $p_3(\alpha)\mid_{\alpha=0}< 0$. Необходимо выяснить, сколько пересечений с осью абсцисс имеет парабола $p_3(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$.

Покажем, что парабола $p_3(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ точек пересечения с осью абсцисс не имеет. Найдем точку максимума параболы. Для этого вычислим производную $p_3^{'}(\alpha)$ и приравняем ее к нулю

$$p_3^{'}(\alpha) = 2(1-\eta)(1-\xi^2)\alpha + (1-\eta)(2\xi^2 - \xi) = 0.$$

Получим значение для точки максимума

$$\alpha^* = \frac{(\xi - 2\xi^2)}{2(1-\xi^2)}.$$

Рассмотрим два случая:

4.1. $1 < \xi \leq 2$.

В этом случае точка максимума $\alpha^* \geq 1$. Значения параболы на концах отрезка отрицательны. Очевидно, что парабола $p_3(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ лежит ниже оси абсцисс.

4.2. $\xi > 2$.

В этом случае точка максимума α^* находится в рассматриваемом интервале $0 < \alpha^* < 1$. Покажем, что парабола p_3 имеет отрицательное значение в точке максимума. Это будет означать, что на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ пересечения парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ отсутствуют. Для этого подставим значение точки максимума в соотношение для параболы $p_3(\alpha)$ и покажем, что значение максимума отрицательное. Имеем

$$p_3(\alpha^*) = \frac{\xi\big(-4\xi^2 + 5(1-\eta)\xi + 4\eta\big)}{4(\xi^2-1)}.$$

Проведем анализ знаков сомножителей в этом выражении. Знаменатель дроби имеет положительный знак, так как $\xi > 2$. Числитель

$\xi\big(-4\xi^2+5(1-\eta)\xi+4\eta\big)$ принимает отрицательное значение при

$$\xi > \frac{5(1-\eta)+\big(25(1-\eta)^2+64\eta\big)^{1/2}}{8}.$$

В рассматриваемом случае парабола $p_3(\alpha^*)$ принимает отрицательное значение, когда выполняется условие

$$\frac{5(1-\eta)+\big(25(1-\eta)^2+64\eta\big)^{1/2}}{8} < 2.$$

Решая это неравенство, имеем

$$\big(25(1-\eta)^2+64\eta\big)^{1/2} < 16-5(1-\eta).$$

Возведем обе стороны неравенства в квадрат

$$25(1-\eta)^2+64\eta < 256-160(1-\eta)+25(1-\eta)^2.$$

Получаем

$$64\eta < 256-160+160\eta.$$

Приведение подобных влечет неравенство

$$\eta > -1,$$

которое в нашем случае верно. Следовательно, наше предположение о том, что значение параболы $p_3(\alpha)$ в точке максимума отрицательно также верно.

Можно заключить, что при $\xi > 1$ параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ друг с другом не пересекаются. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 5.

5.4. Решение системы неравенств

Воспользуемся результатами анализа, представленного в разделах 5.1–5.3, чтобы показать, что система (5.1) совместна при некоторых значениях параметра α.

Вернемся к системе неравенств

$$\begin{cases} a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1 < 0, \\ a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай 1 из раздела 5.2, при котором обе параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ восходящие. Для него имеют место условия

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0 \text{ при } 0 < \xi < \xi_1.$$

Рассмотрим случай

1.1. $\xi < 1 - \eta$.

Для него, согласно разделам 5.1, 5.3 имеем

$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha)$,

$\alpha = 1 : p_1(\alpha) > p_2(\alpha)$,

параболы p_1 и p_2 пересекаются на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ только один раз.

Этот случай удовлетворяет нас только тогда, когда корни пересечения парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ с осью абсцисс расположены так, что $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1^{(2)}$.

Докажем это. Рассмотрим две ситуации.

Ситуация 1: $\eta \ge \xi$.

Подставим значения корней и рассмотрим их разность

$$\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)} = \frac{-2\xi - 2\eta + 1 + (5 + 4\frac{\eta}{\xi})^{1/2}}{\frac{2}{\xi} - 2\xi + 2(1-\eta)} - \frac{-2\xi - 2 + (5 + 4\frac{\xi}{\eta})^{1/2}}{\frac{2}{\xi} - 2\xi + 2\frac{1-\eta}{\eta}}.$$

Сравним знаменатели этих дробей. Так как $0 < \eta < 1$, то

$$\frac{2(1-\eta)}{\eta} > 2(1-\eta).$$

Значит знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй дроби

$$\frac{2}{\xi} - 2\xi + 2(1-\eta) < \frac{2}{\xi} - 2\xi + \frac{2(1-\eta)}{\eta}.$$

Покажем, что числитель первой дроби больше числителя второй дроби. Составим их разность и приведем подобные

$$3 - 2\eta + (5 + 4\frac{\eta}{\xi})^{1/2} - (5 + 4\frac{\xi}{\eta})^{1/2}.$$

В рассматриваемом случае выражение $3 - 2\eta > 0$. Кроме того, ясно, что при условии ситуации 1 справедливо неравенство

$$(5 + 4\frac{\eta}{\xi})^{1/2} > (5 + 4\frac{\xi}{\eta})^{1/2}.$$

То есть разность числителей положительная. Имеем два соотношения: числитель первой дроби больше числителя второй дроби, а знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй. Следовательно, значение первого корня больше значения второго корня.

Ситуация 2: $0 \leq \eta < \xi \leq 1 - \eta$.

В этом случае аналитическое доказательство является трудоемким, и может быть проведено разложением по формуле Тейлора. Приведем график двумерной функции $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ разности корней $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1^{(2)}$, построенный в программе MATLAB, на рис. 6. Из него видно, что значения этой функции строго положительны для любых значений аргументов. Таким образом, предположение о том, что $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1^{(2)}$ верно.

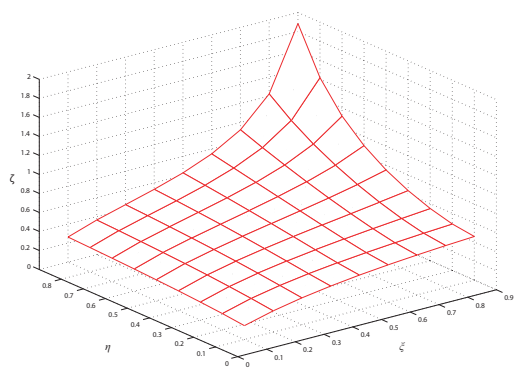

Рисунок 6. График двумерной функции разности корней

В этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ и корней $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1^{(2)}$ изображены на рис. 7.

Рассмотрим случай

1.2. $\xi = 1 - \eta$.

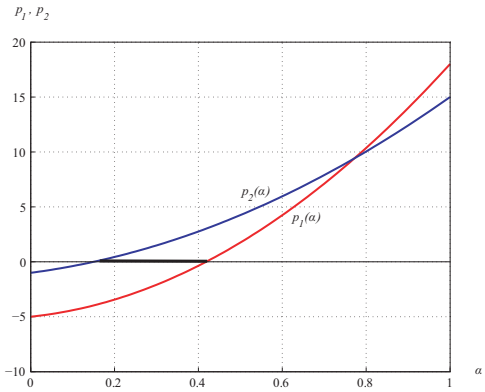

Рисунок 7. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 1.1

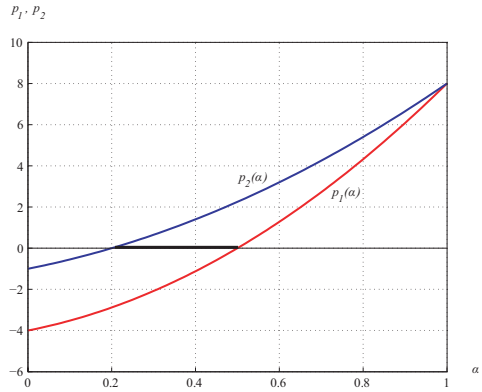

Рисунок 8. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 1.2

Для него, согласно разделам 5.1, 5.3 имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) = p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 пересекаются в точке $\alpha = 1$.

Видно, что в этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 8. Рассмотрим случай

1.3. $1 - \eta < \xi < \xi_1$.

Для него, согласно разделам 5.1, 5.3 имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 на отрезке $0 < \alpha < 1$ не пересекаются.

Ясно, что в этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 9.

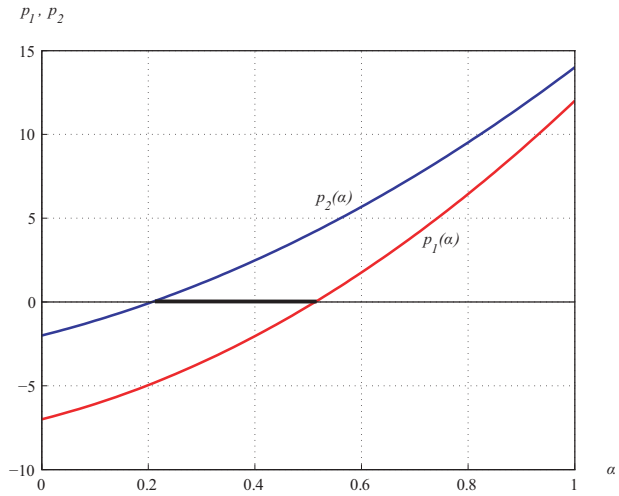

Рисунок 9. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 1.3

Рассмотрим случай 2 из раздела 5.2, при котором парабола $p_1(\alpha)$ нисходящая, а парабола $p_2(\alpha)$ восходящая. Для него выполняются условия

$$a_1 < 0,\ a_2 > 0 \text{ при } \xi_1 < \xi < \xi_2.$$

Для него, согласно разделам 5.1, 5.3, имеем

$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$

$\alpha = 1 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$

параболы p_1 и p_2 на отрезке $0 < \alpha < 1$ не пересекаются.

В этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 10.

Рассмотрим случай 3 из раздела 5.2, при котором обе параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ нисходящие

$$a_1 < 0,\ a_2 < 0 \text{ при } \xi > \xi_2.$$

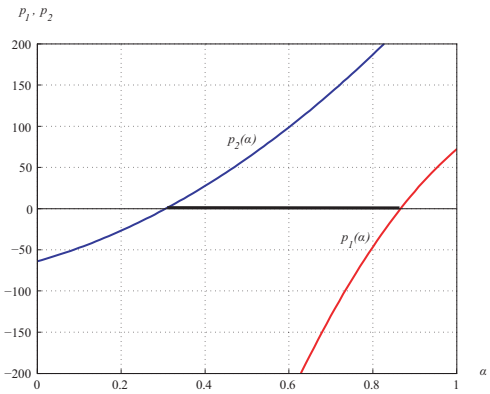

Рисунок 10. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 2

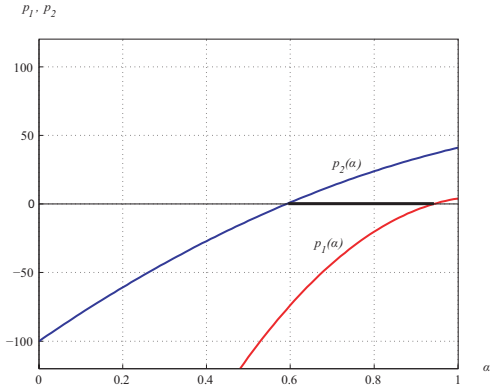

Рисунок 11. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 3

Для него, согласно разделам 5.1, 5.3, имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 на отрезке $0 < \alpha < 1$ не пересекаются.

Видно, что в этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 11.

Итак, во всех случаях существуют такие значения параметра $0 \leq \alpha \leq 1$, при которых система имеет решение, а значит существуют точки множества максимума по Парето, которые строго доминируют точку равновесия Нэша по обеим координатам.

На рис. 12 изображена точка равновесия по Нэшу (NE) и множество точек максимума по Парето (PM). Жирной линией выделена часть множества точек максимума по Парето, которые строго доминируют точку равновесия по Нэшу.

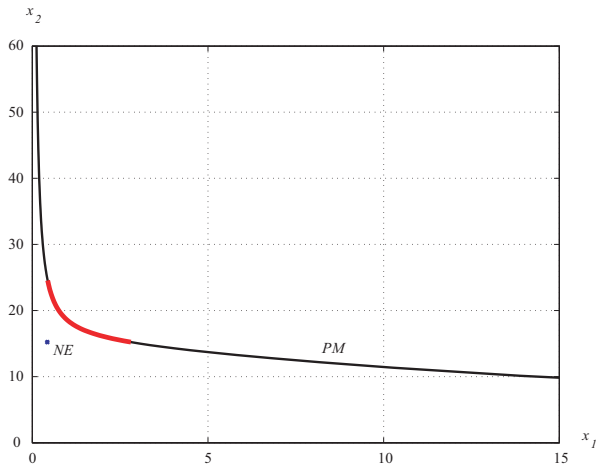

Рисунок 12. Равновесие по Нэшу и множество максимумов Парето

6. Рыночное равновесие

Определение 6.1. *Назовем рыночным равновесием вектор положительного снижения эмиссий* $x^M = (x_1^M, \ldots, x_n^M)$, *если для каждого игрока* i *функция* $w_i(\lambda x^M)$ $(\lambda > 0)$ *достигает максимума при* $\lambda = 1$,

$$x_i^M = argmax\big\{w_i(\lambda x^M) : \lambda > 0\big\},$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{dw_i(\lambda x^M)}{d\lambda}\,|_{\lambda=1} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Отметим, что аналогичное определение дано в работе [11].

Отношение (6.1) показывает, что точка x^M является решением уравнений

$$\langle \nabla\ w_i(x), x\rangle = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.2}$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в n-мерном векторном пространстве.

Учитывая определение функции полезности w_i, (2.1), систему уравнений (6.2) можно представить как

$$-x_i C_i'(x_i) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j\right) B_i'\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j\right) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Уравнения (6.3) описывают множество n кривых. Они показывают количество снижения эмиссий x_i, которое желает осуществить игрок i взамен на ответное снижение $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}x_j$, которое он получает благодаря снижению эмиссий всеми другими игроками. Параметр

$$p_i = p_i(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}x_j}{x_i} \tag{6.4}$$

определяет *обменный курс*, вычисленный по вектору снижения эмиссий x. Он показывает количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна i получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Согласно данному определению соотношение, определяющее рыночное равновесие x^M, имеет вид

$$\frac{dw_i\big(x^N + \lambda(x^M - x^N)\big)}{d\lambda}\,|_{\lambda=1} = 0. \tag{6.5}$$

В рассматриваемой модели исследуется игра двух участников. Введем в этой игре новые переменные y_1 и y_2 для сдвига от конкурентного равновесия по Нэшу к кооперативному рыночному равновесию:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^M = x_1^N + y_1, \\ x_2 = x_2^M = x_2^N + y_2. \end{cases} \tag{6.6}$$

Соотношение (6.5) эквивалентно системе уравнений для сдвига

$$\begin{cases} y_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}(y_1, y_2) + y_2 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0, \\ y_1 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}(y_1, y_2) + y_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Пользуясь соотношениями (2.10), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1\Big(- e_1(x_1^N + y_1) + \dfrac{d_1}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2}\Big) + y_2 \dfrac{d_1}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} = 0, \\ y_2\Big(- e_2(x_2^N + y_2) + \dfrac{d_2}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2}\Big) + y_1 \dfrac{d_2}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

7. Аналитический метод решения

Решая систему уравнений (6.8) аналитическим способом, имеем уравнение пятой степени для y_2:

$$\begin{gathered}
\big(e_1e_2^2d_2 - e_2^3d_1\big)y_2^5+\\
+\big(-2Ae_2^2 + 2e_2^2e_1d_2(x_1^N + x_2^N) + 2e_1d_2e_2^2x_2^N - 2e_2^3d_1x_2^N\big)y_2^4+\\
+\big(-Ae_2^2(x_1^N+x_2^N)-4Ae_2^2x_2^N+e_1d_2e_2^2(x_1^N+x_2^N)^2+4e_2^2e_1d_2(x_1^N+x_2^N)x_2^N-\\
-2e_1e_2d_2^2 + e_1d_2e_2^2(x_2^N)^2 + 2e_2^2d_1d_2 - e_2^3d_1(x_2^N)^2\big)y_2^3+\\
+\big(-2Ae_2^2(x_1^N+x_2^N)x_2^N+4Ae_2d_2-2Ae_2^2(x_2^N)^2+2e_1d_2e_2^2(x_1^N+x_2^N)^2x_2^N-\\
-2e_1e_2d_2^2(x_1^N + x_2^N) + 2e_2^2e_1d_2(x_2^N)^2(x_1^N + x_2^N) - 2e_1e_2d_2^2x_2^N+\\
+2e_2^2d_1d_2x_2^N\big)y_2^2 + \big(Ad_2e_2(x_1^N + x_2^N) - Ae_2^2(x_2^N + x_1^N)(x_2^N)^2 + 4Ae_2d_2x_2^N+\\
+e_1d_2e_2^2(x_1^N + x_2^N)^2(x_2^N)^2 - 2e_1e_2d_2^2(x_1^N + x_2^N)x_2^N + e_1d_2^3 - e_2d_1d_2^2\big)y_2+\\
+Ad_2e_2(x_1^N + x_2^N)x_2^N - 2Ad_2^2 = 0,
\end{gathered} \tag{7.1}$$

где $A = d_1d_2\big(\dfrac{e_1e_2}{e_1d_2 + e_2d_1}\big)^{1/2}$.

Решение реализовано в программе MATLAB. График многочлена пятой степени (7.1) представлен на рис. 13.

Оператор определения нулей функции программы MATLAB дает следующие результаты для корней многочлена (7.1). Два корня отрицательны, два корня комплексные, и имеется единственный положительный корень со значением

$$y_2 = 2.2732. \tag{7.2}$$

Значение координаты y_1 сдвига для рыночного равновесия определяется подстановкой координаты y_2 в первое уравнение системы (6.8). В результате получается следующее значение для координаты y_1

$$y_1 = 0.8634. \tag{7.3}$$

Подстановка координат точки равновесия по Нэшу (3.17) и координат сдвига в систему уравнений (6.6) дает координаты рыночного

равновесия

$$\begin{cases} x_1^M = x_1^N + y_1 = 0.4261 + 0.8634 = 1.2895, \\ x_2^M = x_2^N + y_2 = 15.2187 + 2.2732 = 17.4919. \end{cases} \tag{7.4}$$

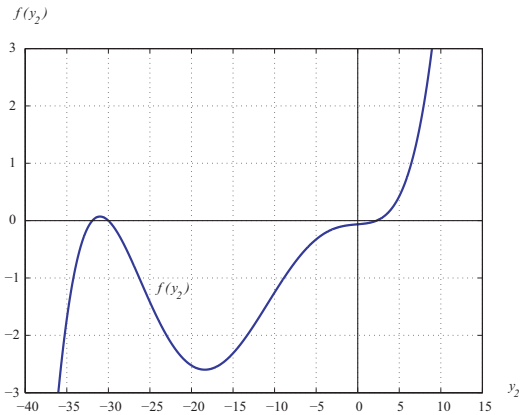

Рисунок 13. График многочлена пятой степени в аналитическом решении

8. Численный метод решения

Следует отметить, что аналитическое решение задачи нахождения рыночного равновесия в общем случае является невозможным. Поэтому в этом параграфе предлагается универсальный вычислительный алгоритм поиска рыночного равновесия. Проводится сравнение результатов решения задачи аналитическим методом и методом вычислительного алгоритма.

Алгоритм представлен в виде аукционного процесса, который реализует декомпозиционную конструкцию поиска равновесия при дефиците информации. Аукционер предлагает для каждой страны обменные курсы, определяющие количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна i получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Игроки отвечают одновременно, указывая снижение эмиссий, которые они желают произвести, за предлагаемую цену на основе своих линий наилучших ответов. Аукционер учитывает предложенные странами-участниками снижения

эмиссий и загрузку загрязнением и сравнивает их с требуемыми. В случае большого отклонения между «предложением» и «спросом» он предлагает новые цены. Со своей стороны участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности. Алгоритмы реализованы в программе MATLAB и сводятся к интегрированию нелинейных систем дифференциальных уравнений. Проведено сравнение результатов предложенных численных алгоритмов и аналитических решений. Сравнение показывает высокую точность численного метода, который дает практически идентичные результаты аналитическому решению.

Решая систему уравнений (6.7) найдем функции наилучших ответов игроков:

$$\begin{cases} y_2 = f(y_1) = y_1 \dfrac{e_1(x_2^N + x_1^N)(y_1 + x_1^N)}{\big(d_1 - e_1 y_1 (y_1 + x_1^N)\big)} - y_1, \\ y_1 = g(y_2) = y_2 \dfrac{e_2(x_2^N + x_1^N)(y_2 + x_2^N)}{\big(d_2 - e_2 y_2 (y_2 + x_2^N)\big)} - y_2. \end{cases} \tag{8.1}$$

Графики функций наилучших ответов игроков представлены на рис. 14.

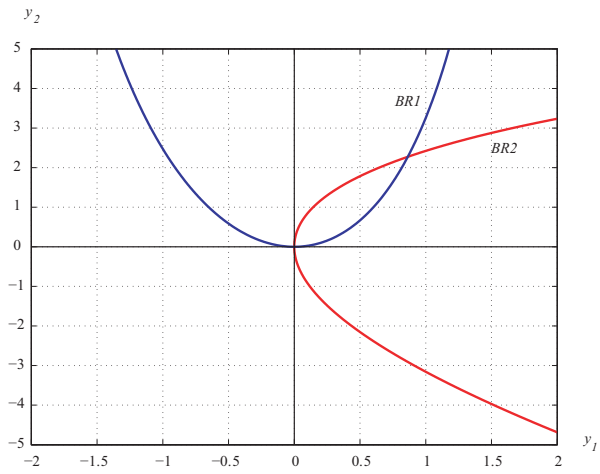

Рисунок 14. Функции наилучших ответов игроков

Представим эту систему уравнений в виде

$$\begin{cases} F(y_1, y_2) = -f(y_1) + y_2 = 0, \\ G(y_1, y_2) = y_1 - g(y_2) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является положение рыночного равновесия (y_1^M, y_2^M).

Определим значения наилучших ответов как решение соответствующих уравнений. Например, наилучшим ответом первого игрока на действия второго игрока назовем решение $y_1^R = y_1^R(y_2)$ уравнения наилучших ответов

$$F\big(y_1^R(y_2), y_2\big) = -f\big(y_1^R(y_2)\big) + y_2 = 0.$$

Аналогично, наилучшим ответом второго игрока на действия первого назовем решение $y_2^R = y_2^R(y_1)$ уравнения

$$G\big(y_2^R(y_1), y_1\big) = -g\big(y_2^R(y_1)\big) + y_1 = 0.$$

Для нахождения положения рыночного равновесия используется динамика наилучших ответов:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_1^R(y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_2 + y_2^R(y_1). \end{cases} \tag{8.2}$$

Для того, чтобы сделать расчетные формулы алгоритма более конструктивными, заменим соотношения «наилучших ответов» на первую итерацию метода сжимающих отображений.

$$y_1^R(y_2) - y_1 \approx F(y_1, y_2),$$

$$y_2^R(y_1) - y_2 \approx G(y_1, y_2).$$

Делая соответствующую подстановку в динамике наилучших ответов, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_1^R \approx F(y_1, y_2) = -f(y_1) + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_2 + y_2^R \approx G(y_1, y_2) = y_1 - g(y_2). \end{cases} \tag{8.3}$$

Нахождение точки рыночного равновесия принимает декомпозиционный характер, когда в систему уравнений подставляются коэффициенты обменного курса p_i (см. (6.4)), которые аукционер пересчитывает на каждом шаге

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{y_1}, \\ p_2 = \dfrac{y_1 + y_2}{y_2}. \end{cases} \tag{8.4}$$

С введенными коэффициентами обменного курса система уравнений (8.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -f(y_1) - y_1 + p_1 y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -g(y_2) - y_2 + p_2 y_2. \end{cases} \tag{8.5}$$

Системы уравнений аукциона (8.4) и (8.5) интегрируются совместно методом Рунге-Кутты. Разработанный алгоритм реализуется в программе, написанной в среде MATLAB. Для компьютерного эксперимента используются коэффициенты для функций затрат и функций экологического эффекта, основанные на реальных данных [12, 24]: $e_1 = 0.15$, $e_2 = 0.0042$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$.

Полученные результаты представлены на рис. 15, где показаны ситуация равновесия по Нэшу (NE), множество точек максимума по Парето (PM), линии реакции конкурентов (BR_1 и BR_2), точка рыночного равновесия в их пересечении (ME), начальная точка (IP) и траектория алгоритма (TA), сходящаяся к рыночному равновесию.

Численный эксперимент в программе MATLAB показывает, что координаты траекторий стабилизируются в точке равновесия, значения координат которой вычисляется на уровне

$$x_1^A = 1.2886, \tag{8.6}$$

$$x_2^A = 17.4867. \tag{8.7}$$

Сравнение этих аппроксимационных значений со значениями координат рыночного равновесия, полученными аналитически в формуле (7.4), демонстрирует высокую точность вычислительного алгоритма

$$\varepsilon = \left((x_1^M - x_1^A)^2 + (x_2^M - x_2^A)^2\right)^{1/2} = 0.0053. \tag{8.8}$$

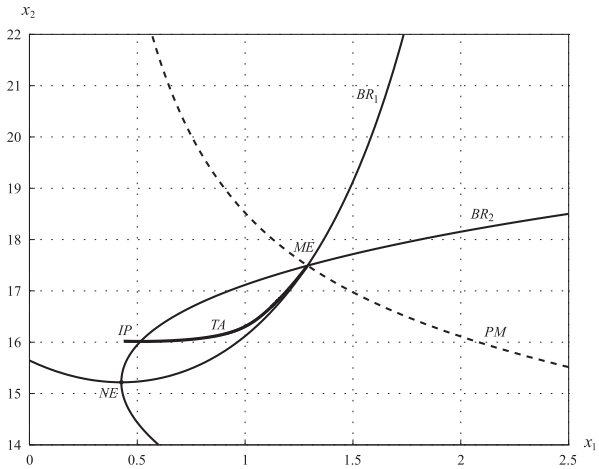

Рисунок 15. Поиск рыночного равновесия.

9. Доказательство локальной устойчивости рыночного равновесия для динамики алгоритма

Для определения локальной устойчивости рыночного равновесия составим матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial y_1} & 1 \\ 1 & -\dfrac{\partial g}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, если удовлетворяются условия

$$\begin{cases} \Delta_1 = -\dfrac{\partial f}{\partial y_1} < 0, \\ \Delta_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial g}{\partial y_2} - 1 > 0, \end{cases}$$

то матрица Якоби является отрицательно определенной матрицей, что свидетельствует о локальной устойчивости рыночного равновесия. Действительно, знаки производных определяются соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{y_2}{y_1} + y_1 \frac{e_1(x_1^N + x_2^N)\big(d_1 + e_1 y_1(x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N(x_1^N + y_1)\big)}{\big(d_1 - e_1 y_1(y_1 + x_1^N)\big)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = \frac{y_1}{y_2} + y_2 \frac{e_2(x_1^N + x_2^N)\big(d_2 + e_2 y_2(x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2)\big)}{\big(d_2 - e_2 y_2\big(y_2 + x_2^N)\big)^2} > 0.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_2} - 1 = \frac{y_2^2 e_2(x_1^N + x_2^N)\big(d_2 + e_2 y_2(x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2)\big)}{y_1\big(d_2 - e_2 y_2(y_2 + x_2^N)\big)^2}$$

$$+ \frac{y_1^2 e_1(x_1^N + x_2^N)\big(d_1 + e_1 y_1(x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N (x_1^N + y_1)\big)}{y_2\big(d_1 - e_1 y_1(y_1 + x_1^N)\big)^2} +$$

$$+ y_1 y_2 e_1 e_2 (x_1^N + x_2^N)^2 \frac{\big(d_1 + e_1 y_1(x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N (x_1^N + y_1)\big)}{\big(d_1 - e_1 y_1(y_1 + x_1^N)\big)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\big(d_2 + e_2 y_2(x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2)\big)}{\big(d_2 - e_2 y_2(y_2 + x_2^N)\big)^2} > 0,$$

которое завершает проверку критерия Сильвестра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985. 271 с.

2. Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* М.: Наука, 1976. 328 с.

3. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры.* Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.

4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974. 456 с.

5. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О дифференциально-эволюционных играх* // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.

6. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука, 1977. 390 с.

7. Axelrod R. *The evolution of cooperation.* New York: Basic Books, 1984.

8. Barrett S. *International environmental agreements as games.* In Conflicts and Cooperation in Managing Environmental Resources (R. Pethig ed.). Berlin: Springer Verlag, 1990.

9. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory.* London: Academic Press, 1982. 519 p.

10. Chander P., Tulkens H. *Theoretical foundations of negotiations and cost sharing in transfrontier pollution problems* // European Economic Review. 1992. V. 36. P. 388–398.

11. Ehtamo H., Hamalainen R.P. *A cooperative incentive equilibrium for a resource management problem* // J. Econom. Dynam. Control. 1993. V. 17. P. 659–678.

12. Ellerman A.D., Decaux A. *Analysis of post-Kyoto CO2 emissions trading using marginal abatement curves* // Joint Program Report Series. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1998. Report No. 40. 32 p.

13. Fudenberg D., Kreps D.M. *Learning mixed equilibria* // Games and Econ. Behavior. 1993. V. 5. P. 320–367.

14. Hoel M. *Global environmental problems: the effect of unilateral actions taken by one country* // J. of Environmental Economics and Management. 1991. V. 20. P. 55–70.

15. Hoffbauer J., Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 323 p.

16. Kaniovski Yu.M., Young H.P. *Learning dynamics in games with stochastic perturbations* // Games and Econ. Behavior. 1995. V. 11. P. 330–363.

17. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information.* Boston etc.: Birkhauser, 1994. 320 p.

18. Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M. *Equilibrium and guaranteeing solutions in evolutionary nonzero sum games* // IIASA Interim Report IR-98-003. Laxenburg: IIASA, 1998. 56 p.

19. Maeler K.G. *The acid rain game.* In Valuation Methods and Policy Making (H. Folmer and E. van Ireland eds.) in Environmental Economics. Amsterdam: Elsevier, 1989.

20. Nentjes A. *An economic model of transfrontier pollution abatement.* In public finance, trade and development / Ed. V. Tanzi Detroit Mich.: Wayne State University Press, 1993. P. 243–261.

21. Nentjes A. *Control of reciprocal transboundary pollution and joint implementation.* In Economic Instruments for Air Pollution Control (G. Klaassen and F. Foersund eds.). Kluwer, 1994. P. 209–230.

22. Nowak M., Sigmund K. *The evolution of stochastic strategies in the Prisoner's Dilemma* // Acta Applic. Math. 1992. V. 20. P. 247–265.

23. Smale S. *The prisoner's dilemma and dynamical systems associated to non-cooperative games* // Econometrica. 1980. V. 48, N 7. P. 1617–1634.

24. Tol R. *The benefits of greenhouse gas emission reduction: an application of FUND* // Working Paper FNU-64. Hamburg: Hamburg University, 2005. 33 p.

25. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information.* Utrecht: VSP, 1995. 255 p. (Inverse and Ill-Posed Probl. Ser.)

26. Zangwill W.I., Garcia C.B. *Pathways to solutions, fixed points, and equilibria.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1981. 07632.1981.

DECOMPOSITION ALGORITHM OF SEARCHING EQUILIBRIA IN THE DYNAMICAL GAME

Nikolay A. Krasovskiy, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS, mathematician (nkrasovskiy@gmail.com).
Alexander M. Tarasyev, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS, Dr.Sc., Head of Sector (tam@imm.uran.ru).

Abstract: A problem of noncooperative game with several players is considered, in which the players (governments of neighboring countries) make emission reduction trading. Particular attention is paid to the case of two players, one of whom is Eastern European countries, while another is countries of the former Soviet Union. A statistical analysis of the model parameters for quadratic cost functions and logarithmic benefit functions, based on the real data, is performed. The concepts of non-cooperative Nash equilibrium and cooperative Pareto maxima are introduced and linked with each other. The definition of a new concept – the market equilibrium, which combines properties of Nash and Pareto equilibria, is given. An analytic solution to the problem of finding market equilibrium is represented. This analytical solution can serve as a test for verification of numerical search algorithms. A computational algorithm of searching for market equilibrium is proposed, which shifts Nash competitive equilibrium to Pareto cooperative maximum. An algorithm is interpreted in the form of a repeated auction, in which the auctioneer has no information about cost functions and functions of environmental effect from emission reduction for the participating countries. An auctioneer strategy, which provides conditions for reaching market equilibrium, is considered. From the viewpoint of game theory, repeated auction describes the learning process in a noncooperative repeated game under uncertainty. The results of proposed computational algorithms are compared to analytical solutions. Numerical calculations of equilibrium and algorithm trajectories, converging to the equilibrium, are given.

Keywords: dynamic games, Nash equilibrium, Pareto maximum, equilibrium search algorithms, auctions modeling.