Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.4, с. 89–98

УДК 519.83
ББК 22.18

ОДНА ТРАНСПОРТНАЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ НА СЕТИ

Леон А. Петросян
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: spbuoasis7@peterlink.ru

Рассматривается модель сетевой игры, в которой n игроков стремятся попасть в некоторый фиксированный узел сети с минимальными затратами. При этом предполагается, что траектории игроков не должны иметь общих дуг, т.е. не должны пересекаться. Последнее условие значительно усложняет задачу, поскольку множества стратегий оказываются взаимно зависимыми. Построено семейство равновесий по Нэшу и показано также, что минимальные суммарные затраты игроков достигаются в ситуации, которая является равновесием по Нэшу. Предложен кооперативный подход к решению задачи. С этой целью построено два алгоритма построения характеристической функции. В обоих случаях для построения характеристической функции используются подходы, ранее предложенные для построения равновесия по Нэшу.

Ключевые слова: сети, транспортная модель, кооперативные игры, уравнение Беллмана.

1. Модель

Игра происходит на сети $G = (X, D)$, где X – конечное множество, называемое множеством вершин, и D – множество пар вида (y, z), где $y \in X$, $z \in X$, называемое множеством дуг. Точки $x \in X$ будем называть вершинами или узлами сети, а пару $(x, y) \in D$ – дугой соединяющей вершины x, y. На множестве дуг D задана неотрицательная симметричная вещественная функция $\gamma(x, y) = \gamma(y, x) \geq 0$, интерпретируемая для каждой дуги $(x, y) \in D$ как затраты, связанные с переходом из вершины x в вершину y по дуге (x, y).

Опишем теперь транспортную игру n-лиц на сети G. Транспортная игра Γ представляет собой набор $\Gamma =< G, N, x(N), a >$, где G – сеть, $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $a \in X$ – некоторая фиксированная вершина сети G, $x(N) \subset X$ – подмножество вершин сети G, $x(N) = \{1(x), 2(x), \ldots, i(x), \ldots, n(x)\}$, с указанием игроков, находящихся в этих вершинах в начале игрового процесса (начальное состояние игрока). Так, например, $i(x)$ означает вершину $x \in X$, в которой находится игрок i в начале игры. В множестве $x(N)$ могут быть совпадающие элементы, т.е. в начале игры несколько игроков могут находиться в одной и той же вершине. В ряде случаев, чтобы не усложнять обозначения, мы под $i(x)$ будем подразумевать также и игрока i, находящегося в вершине x.

Под путем в игре Γ мы будем понимать любую конечную последовательность дуг вида $h = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{l-1}, x_l)\}$, в которой нет циклов, существует такое $k \in N$, что $x_0 = k(x_0) \in x(N)$ и $x_l = a$. Таким образом путь – это последовательность дуг (без циклов), соединяющих начальное местоположение одного из игроков в сети с заранее фиксированной вершиной a. Мы будем говорить, что пути h' и h'' не пересекаются и писать $h' \cap h'' = \emptyset$, если они не имеют общих дуг.

Определим стратегии игроков в игре Γ. Под стратегией игрока $i \in N$ в Γ будем понимать любой путь, соединяющий его начальное местоположение с вершиной a, т.е. стратегии игрока i – это суть пути, в которых начальная вершина $x_0 = i(x_0)$, а конечная совпадает с $a \in X$. Пусть $h^i = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_{l-1}, a)\}$, тогда число l (число дуг в пути h^i) назовем длиной стратегии h^i. Понятно, что в Γ стратегии игрока могут иметь различные длины. Множество всех стратегий игрока i обозначим через $H^i = \{h^i\}, i = 1, \ldots, n$.

Допустимые ситуации в игре Г. Ситуации $h = (h^1, \ldots, h^n), h^1 \in \in H^1, \ldots, h^n \in H^n$ называются допустимыми, если пути h^j и h^k при $j \neq k$ не пересекаются, т.е. $h^j \cap h^k = \emptyset, j \neq k$. Множество всех допустимых ситуаций обозначим через H.

Определим функцию затрат в игре.

Для каждой ситуации $h = (h^1, \ldots, h^n) \in H$ определим затраты игрока i, $K_i(h)$, по формуле

$$K_i(h) = \sum_{k=0}^{l-1} \gamma(x_k, x_{k+1}) = k(h^i)\,,$$

где $\{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{l-1}, x_l)\} = h^i$. Таким образом, затраты каждого игрока в игре Г равны затратам, которые он несет перемещаясь из начальной вершины $i(x_0) \in x(N)$ в фиксированную вершину a, которая одинакова для всех игроков. Здесь мы видим, что затраты игрока $i, K_i(h)$, зависят лишь от его стратегии h^i и зависит от стратегий других игроков тем, что стратегия h^i (путь игрока i) не должна пересекаться со стратегиями других игроков. Поэтому, в некоторых случаях, когда это не будет приводить к недоразумениям, мы вместо $K_i(h)$ будем использовать обозначение $k(h^i)$, означающее затраты игрока i вдоль пути h^i.

Равновесие по Нэшу в игре Г [2]. Ситуация $\bar{h} = (\bar{h}^1, \ldots, \bar{h}^n)$ называется ситуацией равновесия в Г, если имеет место $K_i(\bar{h} \parallel h^i) \geq K_i(\bar{h})$ для всех допустимых ситуаций $(\bar{h} \parallel h^i)$, т.е. для всех $(\bar{h} \parallel h^i) \in H$ и $i \in N$.

Построение класса ситуаций равновесия в игре Г.

Пусть π – некоторая перестановка чисел $1, \ldots, n$, $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$. Рассмотрим вспомогательную транспортную задачу на сети G для игрока i_1. Найдем путь в сети G, минимизирующий затраты игрока i_1 на переход из вершины $i_1(x) \in x(N)$ в вершину $a \in X$. Обозначим путь, решающий эту задачу, через $\bar{h}^{i_1}$, т.е.

$$k(\bar{h}^{i_1}) = \min_{h^{i_1} \in H^{i_1}} k(h^{i_1})\,.$$

Введем в рассмотрение подсеть сети G, не содержащую путь $\bar{h}^{i_1}$, т.е. подсеть $G \backslash \bar{h}^{i_1}$. Рассмотрим вспомогательную транспортную задачу для игрока i_2 на сети $G\setminus\bar h^{i_1}$. Найдем путь в подсети $G\setminus\bar h^{i_1}$, минимизирующий затраты игрока i_2 на переход из вершины $i_2(x)\in x(N)$ в вершину $a\in X$. Обозначим путь, решающий эту задачу, через $\bar h^{i_2}$, т.е.

$$k(\bar h^{i_2}) = \min_{h^{i_2}\in H^{i_2}} k(h^{i_2})\,.$$

Действуя далее аналогичным образом, введем в рассмотрение подсеть сети G, не содержащую путей $\bar h^{i_1},\dots,\bar h^{i_{m-1}}$. Рассмотрим вспомогательную транспортную задачу для игрока i_m на сети $G\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m-1}\bar h^{i_l}$. Найдем путь в подсети $G\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m-1}\bar h^{i_l}$, минимизирующий затраты игрока i_m на переход из вершины $i_m(x)\in x(N)$ в вершину $a\in X$. Обозначим путь, решающий эту задачу, через $\bar h^{i_m}$, т.е.

$$k(\bar h^{i_m}) = \min_{h^{i_m}\in H^{i_m}} k(h^{i_m})\,.$$

В результате мы получаем последовательность путей $\bar h^{i_1},\dots,\bar h^{i_n}$, минимизирующих затраты игроков $i_1,i_2,\dots,i_m,\dots,i_n$ на подсетях $G, G\setminus\bar h^{i_1},\dots,G\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m-1}\bar h^{i_l},\dots,G\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{n-1}\bar h^{i_l}$.

Последовательность путей $\bar h^{i_1},\dots,\bar h^{i_m},\dots,\bar h^{i_n}$ по построению состоит из попарно непересекающихся путей, и каждый из путей $\bar h^{i_l}\in$ $\in H^{i_l}$. Следовательно, ситуация $(\bar h^{i_1},\dots,\bar h^{i_m},\dots,\bar h^{i_n}) = \bar h(\pi)\in H$, т.е. является допустимой в Γ.

Теорема 1.1. *Ситуация $\bar h(\pi)\in H$ является ситуацией равновесия в Γ при любой перестановке π.*

Доказательство. Рассмотрим ситуацию $[\bar h(\pi)\parallel h^{i_m}]$, где $h^{i_m}\neq\bar h^{i_m}$, $h^{i_m}\in H^{i_m},[\bar h(\pi)\parallel h^{i_m}]\in H$. По построению $\bar h^{i_m}$ определяется из условия

$$k(\bar h^{i_m}) = \min_{h^{i_m}\in G\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m-1}\bar h^{i_l}} k(h^{i_m})\,,$$

однако ситуация $[\bar h(\pi)\parallel h^{i_m}]$ допустима (если $h^{i_m}\in G\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m-1}\bar h^{i_l}$) и поэтому $k(\bar h^{i_m})\le k(h^{i_m}) = K_{i_m}[\bar h(\pi)\parallel h^{i_m}]$, однако $k(\bar h^{i_m}) = K_{i_m}(\bar h(\pi))$, и мы имеем $K_{i_m}[\bar h(\pi)]\le K_{i_m}[\bar h(\pi)\parallel h^{i_m}]$ для всех $[\bar h(\pi)\parallel h^{i_m}]\in H$, что и доказывает теорему. $\square$

Теорема 1.1 указывает на богатое семейство ситуаций равновесия в чистых стратегиях в Γ в зависимости от перестановки π. Таким образом в Γ имеем по крайней мере $n!$ ситуаций равновесия в чистых стратегиях.

Определение 1.1. *Ситуация равновесия по Нэшу $\bar{h}(\hat{\pi})$ называется условно кооперативным равновесием, если*

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(\bar{h}(\hat{\pi})) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^{n} K_i(\bar{h}(\pi)) = W\,. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Ситуация равновесия по Нэшу*

$$h^* = ((h^1)^*, \ldots, (h^n)^*)$$

в Γ называется сильным равновесием, если для любой коалиции $S \subset$ $\subset N$ найдется игрок $j \in S$, такой что

$$K_j(h^* \parallel h_S) \geq K_j(h^*)\,,$$

где h_S – набор стратегий игроков из S, т.е. $h_S = \{h^i, i \in S\}$, а ситуация $(h^* \parallel h_S)$ – допустимая ситуация, в которой элементы $(h^i)^*$ заменены на (h^i) при $i \in S$.

Теорема 1.2. *Ситуация $\bar{h}(\pi)$ для любого π является ситуацией сильного равновесия по Нэшу в Γ.*

Доказательство. Покажем, что для любой коалиции $S \subset N$ найдется игрок $j \in S$, для которого имеет место

$$K_j(\bar{h}(\pi) \parallel h_S) \geq K_j(h^*(\pi))\,.$$

Таким игроком является игрок, имеющий наименьший номер в перестановке π и принадлежащий коалиции S. Пусть это игрок i_m. Стратегия $\bar{h}^{i_m}$ определяется из условия

$$k(\bar{h}^{i_m}) = \min_{h^{i_m} \in G \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{m-1} \bar{h}^{i_l}} k(h^{i_m})\,,$$

поэтому

$$K_{i_m}(\bar{h}(\pi)) = k(\bar{h}^{i_m}) \leq k(h^{i_m}) = K_{i_m}(\bar{h}(\pi) \parallel h_S), i_m \in S\,,$$

и теорема доказана. □

Однако существуют и другие ситуации равновесия по Нэшу в Г. Рассмотрим ситуацию $\bar{\bar{h}}$, решающую задачу минимизации

$$\min_h \sum_{i=1}^{n} K_i(h) = \sum_{i=1}^{m} K_i(\bar{\bar{h}}) = V\,. \tag{1.2}$$

Можно просто показать, что $\bar{\bar{h}}$ также является ситуацией равновесия по Нэшу.

Ситуацию $\bar{\bar{h}}$ назовем кооперативным равновесием в Г. Может показаться, что $V = W$, однако, как показывает следующий пример, это не так.

2. Пример

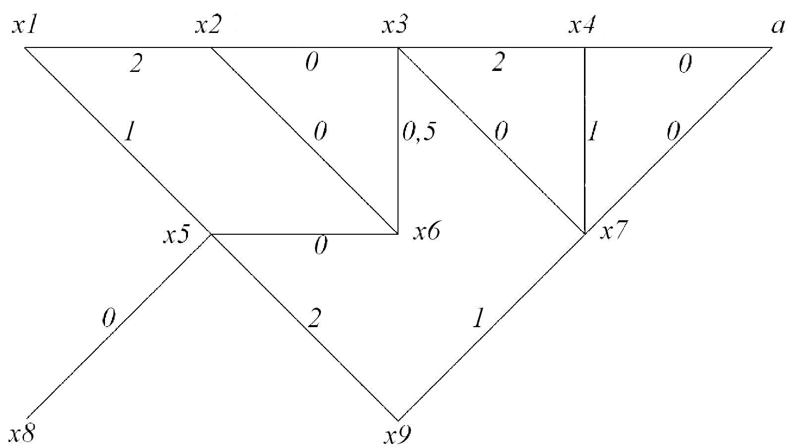

Рисунок 1. Игра двух лиц

В игре, изображенной на рис. 1, участвуют два игрока $N = \{1, 2\}$, множество $x(N) = \{x^1, x^8\}$. Таким образом, в начальный момент игрок 1 расположен в вершине x^1, а игрок 2 – в вершине x^8. Затраты записаны над дугами и равны, соответственно,

$$\gamma(x^1, x^2) = 2, \gamma(x^2, x^3) = 0, \gamma(x^3, x^4) = 2, \gamma(x^4, a) = 0,$$

$$\gamma(x^1, x^5) = 1, \gamma(x^5, x^6) = 0, \gamma(x^2, x^6) = 0, \gamma(x^6, x^3) = 0, 5,$$

$$\gamma(x^7, x^3) = 0, \gamma(x^7, x^4) = 1, \gamma(x^7, a) = 0, \gamma(x^8, x^5) = 0,$$

$$\gamma(x^9, x^5) = 2, \gamma(x^9, x^7) = 1.$$

Вычисления показывают, что для перестановки $\pi = \{1, 2\}$

$$\bar{h}_1 = \left\{(x^1, x^5), (x^5, x^6), (x^6, x^2), (x^2, x^3), (x^3, x^7), (x^7, a)\right\}$$

и

$$\bar{h}_2 = \left\{(x^8, x^5), (x^5, x^9), (x^9, x^7), (x^7, x^4), (x^4, a)\right\},$$

$$K_1(\bar{h}(\{1, 2\})) = 1, K_2(\bar{h}(\{1, 2\})) = 4,$$

$$K_1(\bar{h}(\{1, 2\}) + K_2(\bar{h}(\{1, 2\})) = 5;$$

для перестановки $\pi = \{2, 1\}$

$$\bar{h}_1 = \left\{(x^1, x^5), (x^5, x^9), (x^9, x^7), (x^7, x^4), (x^4, a)\right\}$$

и

$$\bar{h}_2 = \left\{(x^8, x^5), (x^5, x^6), (x^6, x^2), (x^2, x^3), (x^3, x^7), (x^7, a)\right\},$$

$$K_1(\bar{h}(\{2, 1\})) = 5, K_2(\bar{h}(\{2, 1\})) = 0,$$

$$K_1(\bar{h}(\{1, 2\}) + K_2(\bar{h}(\{1, 2\})) = 5.$$

Таким образом, оба равновесия $\bar{h}\{1, 2\}$ и $\bar{h}\{2, 1\}$ являются условно кооперативными равновесиями в Γ и $W = 5$ (см. (1.1)).

Заметим, что ситуация $\bar{\bar{h}}$ (см. (1.2)) в нашем примере имеет вид

$$\bar{\bar{h}}_1 = \left\{(x^1, x^5), (x^5, x^9), (x^9, x^7), (x^7, x^4), (x^4, a)\right\},$$

$$\bar{\bar{h}}_2 = \left\{(x^8, x^5), (x^5, x^6), (x^6, x^3), (x^3, x^7), (x^7, a)\right\}$$

и

$$K_1(\bar{\bar{h}}) = 4, K_2(\bar{\bar{h}}) = 0,5,$$

$$V = K_1(\bar{\bar{h}}) + K_2(\bar{\bar{h}}) = 4,5 < 5 = W,$$

то есть существуют игры, где $V < W$.

3. Кооперативная игра

Для построения кооперативного варианта игры $\Gamma(G, N, x(N), a)$, которую мы будем обозначать через $\Gamma^c(G, N, x(N), a)$, необходимо построить характеристическую функцию игры. В данной работе мы предложим два способа построения характеристической функции [3, 4]. Одна строится с использованием условно-кооперативного равновесия $\bar{h}$, другая – с использованием кооперативного равновесия $\bar{\bar{h}}$.

Рассмотрим сперва первый способ. Обозначим через $\vartheta_1(S), S \subset N$ характеристическую функцию игры. Полагаем

$$\vartheta_1(N) = W = \min_{\pi} \sum_{i=1}^{n} K_i(\bar{h}(\pi)) = \sum_{i=1}^{n} k(\hat{\bar{h}}_i(\hat{\bar{\pi}}))\,.$$

Пусть $S \subset N$. Наихудшие условия для коалиции S могут возникнуть в том случае, если игроки из S находятся на последних местах перестановки π. Обозначим через $P(S)$ множество всех перестановок π, у которых игроки из S находятся на последних $|S|$ местах (здесь $|S|$ – число элементов коалиции S).

Полагаем

$$\vartheta_1(S) = \min_{\pi \in P(S)} \sum_{i \in S} K_i(\bar{h}_i(\pi)) = \sum_{i \in S} k(h_i(\hat{\pi}_s))\,.$$

При такой постановке коалиция $N \backslash S$ играет за себя и не играет против коалиции S, а коалиция S, оказавшись в худшем для себя положении (в последних местах перестановки S), минимизирует свои затраты. Если предположить рациональность игроков из $N \backslash S$ и S, такое представление $\vartheta_1(S)$ может быть интерпретировано как минимальные гарантированные потери коалиции S.

Рассмотрим теперь второй способ определения характеристической функции. Он ближе к классическому определению, поскольку в этом случае мы полагаем $\vartheta_2(N) = V$, т.е. значение характеристической функции для максимальной коалиции равно минимальным суммарным затратам игроков, что, как показывает пример из раздела 2, не всегда верно, если в качестве характеристической функции взять функцию $\vartheta_1(S), S \subset N$.

Полагаем

$$\vartheta_2(N) = V = \min_{h=(h_1,\ldots,h_n)} \sum_{i=1}^{n} K_i(h_i) = \sum_{i=1}^{n} k(\bar{\bar{h}}_i)\,.$$

Определим теперь $\vartheta_2(S)$ для $S \subset N$. Рассмотрим множество $N \backslash S$ и определим подигру $\Gamma^c(G, N \backslash S, x(N \backslash S), a)$, где $x(N \backslash S) \subset x(N)$ есть множество начальных состояний игроков из $N \backslash S$ в игре $\Gamma^c(G, N, x(N), a)$

(оно очевидно совпадает с множеством начальных состояний игроков в игре $\Gamma^c(G, N \setminus S, x(N \setminus S), a)$). Пусть $\bar{\bar{h}}(N \setminus S)$ – кооперативное равновесие в игре $\Gamma(G, N \backslash S, x(N \backslash S), a)$. Рассмотрим теперь подигру

$$\Gamma(G \setminus \bigcup_{i \in N \setminus S} \bar{\bar{h}}_i(S), S, x(S), a)\,,$$

и пусть $\bar{\bar{h}}(S)$ – кооперативное равновесие в этой игре. Тогда полагаем

$$\vartheta_2(S) = \sum_{i \in S} K_i(\bar{\bar{h}}(S)) = \sum_{i \in S} k(\bar{\bar{h}}_i(S))\,.$$

Таким образом, вычисление $\vartheta_2(S), S \subset N$, сводится к нахождению наименьших затрат в игре $\Gamma(G', S, x(S), a)$ на подсети G' сети G. Поэтому, для вычисления $\vartheta_2(S)$ можно применить технику динамического программирования [1, 5]. Обозначим через $\bar{\vartheta}_2(G', m)$ минимальные суммарные затраты в игре с m игроками $\Gamma(G', M, x(M), a)$, где $|M| = m$ и $x(M)$ – начальные состояния игроков из M. Тогда для функции $\bar{\vartheta}_2(G', m)$ можно выписать функциональное уравнение (уравнение Беллмана)

$$\bar{\bar{\vartheta}}_2(G', m) = \min_{h^1 \in G'} [k(h^1) + \bar{\vartheta}_2(G' \setminus h^1, m - 1)] \qquad (3.1)$$

с начальным условием

$$\bar{\bar{\vartheta}}_2(G \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} h^i, 1) = \min_{h^m \in G' \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} h^i} k(h^m)\,. \qquad (3.2)$$

Можно показать, что $\vartheta_2(S) = \bar{\bar{\vartheta}}_2(G, |S|)$. Заметим, что для вычисления $\vartheta_2(S)$ нужно знать сеть G', которая получается из сети G путем удаления путей, обеспечивающих минимальные затраты для игроков коалиции $N \backslash S$, т.е. надо построить сеть $G' = G \backslash \bigcup_{i=1}^{|n \backslash S|} \bar{\bar{h}}_i(N \backslash S)$. Для построения сети $G' = G \setminus \bigcup_{i=1}^{|n \backslash S|} \bar{\bar{h}}_i(N \backslash S)$ надо решить задачу динамического программирования для множества игроков $N \setminus S$ на сети G, используя уравнения (3.1), (3.2), записанные для этого случая. Далее, найдя $\bar{\bar{h}}_i(N \backslash S)$, построить сеть $G' = G \setminus \bigcup_{i=1}^{|n \backslash S|} \bar{\bar{h}}_i(N \backslash S)$, перейти к нахождению $\vartheta_2(S)$, используя те же уравнения (3.1),(3.2) уже для сети G'. Заметим, что эту же задачу можно решать методами дискретного программирования [3, 4, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р.Е. *Динамическое программирование.* М.: ИЛ, 1960.
2. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их применения в менеджменте.* СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2009.
3. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. *Дискретное программирование.* М.: Наука, 1969.
4. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб.: Изд-во Европ. Ун-та в С. Петербурге, 2004.
5. Bellman R.E. *On a routing problem* // Quart. Appl. Math. 1958. V. 16. P. 87–90.
6. Hu T.C. *Integer programming and network flow.* Boston: Addison-Wesley, 1969.

ON TRANSPORTATION NETWORK GAME

Leon A. Petrosyan, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (spbuoasis7@peterlink.ru).

Abstract: The n-person transportation game over a Network $G(X, D)$ is considered. The players at the beginning are situated in the vertexes $x(N) \in X$ of the Network G. The aim of each player is to reach a fixed vertex $a \in X$ with minimal costs. The additional condition is that the paths of players must not intersect (must not contain the same arcs). The rich family of Nash Equilibrium points is constructed and the cooperative game is also considered. Two different approaches to the definition of characteristic function are proposed.

Keywords: network games, transportation model, cooperative games, Bellman equation.