Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.3, с. 21–32

УДК 519.83
ББК 22.18

ПОИСК НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ДИСКРЕТНОГО МОНОТОННО УБЫВАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

Ирина А. Башлаева
Василий Н. Лебедев
Волгоградский Государственный Университет
400062, Волгоград, Университетский проспект, 100
e-mail: iraina15@yandex.ru, lebedevvn@mail.ru

В работе проведен анализ вычислительной сложности поиска неподвижной точки невозрастающего, аддитивного оператора. Получены алгоритмы степенной сложности решения такой задачи. В частном случае оператора ограниченной вариации с условиями невозрастания и аддитивности дано конструктивное доказательство наличия неподвижной точки. Среди возможных приложений: добровольное финансирование общего блага, олигополия Курно и ряд других.

Ключевые слова: монотонный оператор, неподвижные точки, степенной алгоритм.

1. Введение

В работе рассмотрены конструктивные утверждения о наличии неподвижных точек у монотонных дискретных операторов.

Возможные применения результатов – вопросы коррекции программ. Такая проблематика тесно связана с временными логиками. Например, в синтаксисе модальных вычислений используются операторы неподвижной точки возрастающих дискретных операторов

[3,5]. Конструктивные доказательства существования неподвижных точек монотонно возрастающих операторов даны в работе [10].

Другим приложением являются утверждения о наличии равновесия по Нэшу в социально-экономических системах. Равновесия в случае непрерывных моделей сводятся к утверждениям типа Брауэра и Какутани [1,4]. В случае дискретных операторов техника утверждений Брауэра не применима. Такие дискретные модели представлены в работах [6,7,9]. Это олигополия Курно, добровольное финансирование общего блага, борьба за ренту и ряд других. В связи с большой размерностью экономических задач актуальным является вопрос эффективных по времени вычисления алгоритмов для их решения.

В работе [6] получен результат существования неподвижной точки монотонно невозрастающего, аддитивного оператора. Из доказательства [6] следует экспоненциальный алгоритм нахождения неподвижной точки. Модификацией цитируемого метода в работе [8] разработан алгоритм четвертой степени от параметра – максимума двух величин: число игроков и число стратегий у одного игрока.

В нашей работе представлены следующие результаты. Во-первых, используя рекурсивную процедуру динамического программирования из раздела 4.2 работы [2], получен алгоритм шестой степени сложности от того же параметра. Область применения конструкции шире. Алгоритм применим для нахождения некоторой неподвижной точки дискретного оператора, но только с условием аддитивности. Очевидно в таком общем случае неподвижной точки может и не быть. Это является недостатком – в игровых моделях важны примеры наличия равновесия. Большая степенная оценка сглаживается тем обстоятельством, что и представление задачи в памяти машины тоже велико от рассматриваемого параметра.

Во-вторых, для монотонно убывающего оператора ограниченной вариации дано доказательство наличия неподвижной точки. Из доказательства следует алгоритм кубической сложности поиска неподвижной точки такого оператора.

Рассматривается невозрастающий оператор $H : \{0, \ldots, S\}^n \to$ $\to \{0, \ldots, S\}^n$, определяемый по n невозрастающим функционалам $h_1, \ldots, h_n : \{0, \ldots, S\}^{n-1} \to \{0, \ldots, S\}$ следующим образом. $H :$ $x_1, \ldots, x_n \to x'_1, \ldots, x'_n$, $x'_1 = h_1(x_2 + \ldots + x_n), \ldots, x'_i = h_i(x_1 + \ldots + x_{i-1} +$

$+x_{i+1}+\ldots+x_n)$,.., $x'_n = h_n(x_1+\ldots+x_{n-1})$.

Убывание означает: для всех $x \le y$, $h_i(x) \ge h_i(y)$, $i = 1,\ldots,n$.

Определенный выше оператор будем называть невозрастающим, аддитивным оператором. В дальнейшем условие аддитивности считается выполненным. Поэтому в наименовании оператора условие аддитивности будем опускать.

В работе [8] доказано утверждение о наличии неподвижной точки у невозрастающего оператора. Из доказательства следует алгоритм сложности $O((n \cdot S)^2)$ поиска такой неподвижной точки.

2. Степенной алгоритм поиска неподвижной точки у дискретного оператора $x^* : H(x^*) = x^*$

Считаем, что h произвольные дискретные, аддитивные функционалы (ограничения неубывания нет). Эти функционалы заданы в памяти массивами натуральных чисел в унарной системе счисления (количество чисел в массиве $(n-1)S$, поэтому от унарности нет возможности избавиться). Замечание: в разделе 4.2 работы [2] предлагается псевдополиномиальный алгоритм для решения NP-полной проблемы «разбиение». Цитируемый алгоритм на числовых данных порядка F тратит также порядка F операций. Если хранить числовые данные в унарной системе счисления, то временные затраты алгоритма будут степенными, если же в двоичной ситеме – то экспоненциальными от размера памяти для записи задачи. В нашем случае необходимая память для задачи с числовыми данными порядка F будет также порядка F. Экспоненциально сжать память, как в цитируемой работе, невозможно. Поэтому оценка полученного алгоритма – степенная. Более подробно это условие представлено в разделе 3.

Поиск сводится к нахождению подмножества заданного веса в заданном множестве натуральных. Будем искать неподвижную точку x^* с суммой компонент равной $0, 1, \ldots, nS$. Рассматриваем текущую сумму d. Определим, какие натуральные $x_1, \ldots, x_n$ могут составить неподвижную точку. Определяем перебором множество $X_1\{x_1 : x_1 = h_1(p - x_1)\}$;..;$X_i\{x_i = h_i(p - x_i)\}$;..; $X_n\{x_n : x_n = h_n(p - x_n)\}$. Тогда, если неподвижная точка x^* с суммой d существует, то $x^* \in X_1 \times \ldots \times X_i \times \ldots \times X_n$. Нахождение такой точки определяется рекурсивной по параметру i процедурой. Это модификация алгоритма цитируемого ранее.

3. Описание процедуры

Будем заполнять двоичную матрицу F, размер которой $n \times nS$ (на пересечении строки $i+1$ и столбца p поставим 1, если найдется $x_1, \ldots, x_{i+1} \in X_1 \times \ldots \times X_{i+1}$ и $x_1 + \ldots + x_{i+1} = p$; 0 – в противном случае).

Матрицу заполняем рекурсивно по строкам. Пусть матрица заполнена до i-ой строки, $1 \leq i \leq n-1$. Заполним $i+1$ строку рекурсивно, последовательно передвигаясь по ней слева-направо. Пусть строка уже вычислена до элемента $F(i+1, p-1)$. Вычислим элемент $F(i+1, p)$ (начальный элемент $F(i+1, 0)$ вычисляется по условию $0 \in X_1, \ldots, 0 \in X_{i+1}$). Найдем те $x_{i+1} \in X_{i+1}$, что найдется $\hat{x^i} = x_1, \ldots, x_i \in X_1 \times \ldots \times X_i$, такая, что $\hat{x^i} x_{i+1}$ имеет сумму p. Очевидно x_{i+1} искомое, если сумма компонент $\hat{x^i}$ равна $p - x_{i+1}$. Эта информация нам уже известна по значению $F(i, p - x_{i+1})$ (если хотя бы для одного $x_{i+1} \in X_{i+1}$ значение $F(i, p - x_{i+1}) = 1$, то $F(i+1, p) = 1$ и 0 в противном случае). Таким образом мы заполним всю матрицу F.

4. Оценка сложности алгоритма

Чтобы вычислить элемент матрицы $F(i+1, p)$, нужно перебрать множество X_{i+1}. Число элементов в X_{i+1} – это $S+1$, число элементов в строке не более $n(S+1)$. Поэтому вычисление строки – $O(n(S+1)^2)$. Число строк n. Поэтому вычисление матрицы F есть $O(n^2(S+1)^2)$. Полный перебор возможных сумм компонент точек $d : 0, \ldots, nS$ даст общую трудоемкость – $O(n^3 S^3)$. Объем вычислительной памяти необходимой для представления одной функции h есть $O(n \cdot (S+1) \cdot \log_2(S+1)$, всех функций $O(n^2 \cdot S \cdot \log_2(S+1))$.

В первой части нашей работы отсутствует доказательство наличия неподвижной точки. Алгоритм находит неподвижную точку, если она существует. Конечно, в рассматриваемой ситуации неподвижных точек может и не быть. В практических игровых моделях важны примеры наличия неподвижных точек. В следующем разделе дается существенно более эффективная процедура нахождения неподвижной точки, но в частном случае оператора ограниченной вариации.

5. Неподвижные точки невозрастающих операторов ограниченной вариации

Рассматривается невозрастающий оператор $H : \{0,\dots,S\}^n \to \to \{0,\dots,S\}^n$, определяемый по n невозрастающим функционалам $h_1,\dots,h_n : \{0,\dots,S\}^{n-1} \to \{0,\dots,S\}$ следующим образом. $H : x_1,\dots,x_n \to x'_1,\dots,x'_n$, $x'_1 = h_1(x_2+\dots+x_n)$,.., $x'_i = h_i(x_1+\dots+x_{i-1}+ +x_{i+1}+\dots+x_n)$,.., $x'_n = h_n(x_1+\dots+x_{n-1})$.

Убывание означает: для всех $x \le y$, $h_i(x) \ge h_i(y)$, $i = 1,\dots,n$.

Предполагаем, что функционалы h_i, $i = 1,\dots,n$ не более чем с единичным изменением, т.е. $h_i(x+1) \ge h_i(x) - 1$.

Обозначим H_k – ограничение оператора H на первые k ($k = = 1,\dots,n$) компоненты $H_k, h_1,\dots,h_k : [0,(n-1)\cdot h]^k \to [0,h]^k$.

Определение 5.1. *t-устойчивой ($t = 0,1,\dots$) точкой оператора H_k назовем точку $x_1,\dots,x_i,\dots,x_k$, такую, что $h_i(x_1+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+ \dots+x_k+t) = x_i$ для каждого $i = 1,\dots,k$.*

Примечание. Смысл t-устойчивости в следующем. Пусть $x_1,\dots,x_k$ – t-устойчивая точка ограничения оператора H_k, и сумма компонент этой точки f; и пусть $x_{k+1},\dots,x_n$ есть f-устойчивая точка для дополнительного оператора H'_k (оператор по остальным компонентам $h_{k+1},\dots,h_n$), и сумма компонент этой точки t, тогда $x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n$ неподвижная точка оператора H. То есть это неподвижная точка ограничения оператора H_k с запасом t-суммы остальных стратегий игроков.

Утверждение 5.1. *Для каждого $k = 1,\dots,n$ у ограничения H_k существует невозрастающая (по сумме) цепочка устойчивых точек $y_0,\dots,y_r$, $r = (n-k)h$, $y_i, i = 1,\dots,r$ – i-устойчивая для H_k; $ey_0 \ge ey_1 \ge \dots \ge ey_i \ge \dots \ge ey_r$ (ey_i – сумма компонент y_i; это скалярное произведение вектора y_i на единичный вектор e, причем убывание суммы не более чем на 1).*

Примечание: если есть невозрастающая (по сумме) цепочка устойчивых точек $y_0,\dots,y_r$, $r = (n-k)h$, $y_i (i = 1,\dots,r)$ – i-устойчивая для H_k (убывание суммы компонент не более чем на единицу), то мы покажем, как преобразовать ее в аналогичную цепочку для оператора H_{k+1}. Если y – t-устойчивая точка оператора H_k, а значение

$h_{k+1}(e) = t$ (e – сумма компонент точки y), то y – t-устойчивая точка оператора H_{k+1}.

Доказательство. Индукция по ограничению H_k, $k = 1, \ldots, n$. Начальный шаг индукции $k = 1$ справедлив. Ограниченный оператор $H_1 = h_1$. $h_1(0)$, . . . , $h_1((n-1)h)$ – невозрастающая цепочка устойчивых точек порядка $0, \ldots, (n-1)h$ требуемые.

Базис индукции. Утверждение справедливо для натурального $k \geq \geq 1$. Покажем его справедливость для $k+1$.

Не теряя общности, считаем, что оператор H из двух компонент: $f_1(y) = x'$, $f_2(x) = y'$. Первый функционал f_1 определяется невозрастающей (по сумме) цепочкой устойчивых точек $y_0, \ldots, y_r$, $r = (n-k)h$, $y_i, i = 0, 1, \ldots, r$ – i-устойчивая для H_k (убывание суммы компонент не более чем на единицу, значение его в i-ой точке равно сумме компонент $y_i, i = 0, 1, \ldots, r$), поэтому это есть преобразование множества целых чисел $\{0, 1, \ldots, (n-k)h\}$ в множество целых чисел $\{0, 1, \ldots, k \cdot h\}$; наличие такой цепочки следует из предположения индукции. Второй функционал есть h_{k+1}, это преобразование множества $\{0, 1, \ldots, (n-1)h\}$ в множество $\{0, 1, \ldots, h\}$ (в доказательстве шага индукции будем обозначать эти операторы h_1, h_2). Наличие неподвижной точки очевидно. На рисунках ниже нулями (0) обозначены точки графика h_1, а плюсами (+) обозначены точки графика h_2, только абсциссы этих графиков на различных осях. Примечание: i-устойчивая – это такая точка ортанта, для которой на i единиц выше находится + и правее на i единиц находится 0, $i = 1, \ldots, r$. □

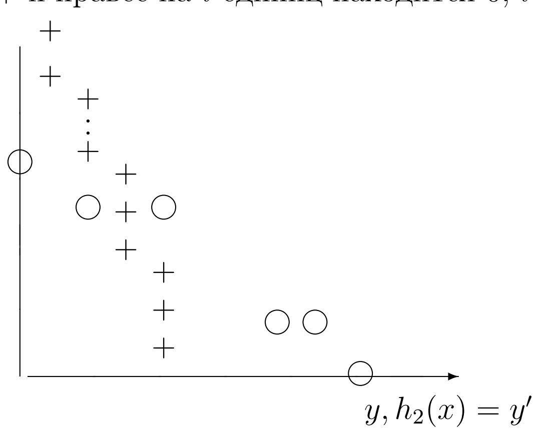

Рисунок 1.

Наличие пересечения графиков очевидно. Будем подниматься по горизонталям. Если до i-ой горизонтали пересечение графиков h_1 и h_2 достигнуто не было, то самый левый 0 будет стоять правее $+$. В самой верхней горизонтали, где стоят нули, самый левый 0 стоит не правее $+$. При переходе на горизонталь выше цепочка 0 имеет непрерывное продолжение с начала цепочки 0 на предшествующей горизонтали (убывание не более чем на единицу), а $+$ в этой горизонтали останется на месте или сместится на единицу влево (убывание не более 1).

Пусть x, y – 0-устойчивая точка, тогда возможны два случая:

1) При увеличении y не меняется $x : h_1(y+1) = x$, и при увеличении x не меняется $y : h_2(x+1) = y$. Тогда x, y есть 1-неподвижная точка (рис. 2). В этом пункте мы используем свойства монотонности и не боле чем единичные изменения функционалов.

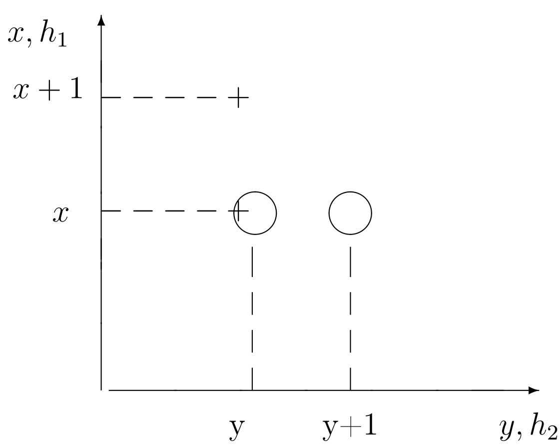

Рисунок 2.

2) При увеличении хотя бы одной компоненты уменьшается на единицу значение другой. $h_1(y+1) = x-1$ (или $h_2(x+1) = y-1$), тогда $x-1, y$, соответственно $(x, y-1)$ есть 1-неподвижная точка $1+x-1, y+1 \to x-1, y; h_2(x-1+1) = y; h_1(y+1) = x-1$ (рис. 3). И в этом пункте мы используем свойства монотонности и не более чем единичные изменения функционалов.

Продолжая аналогичные рассуждения получаем 2-устойчивую точку и т.д. При этом процессе получаем невозрастающую по сумме компонент (убывание не более чем на 1) цепочку $x_0y'_0, \ldots, x_ty'_t$, $t = (n-k-1)h$ устойчивых точек для оператора h_1h_2, и тем самым невозрастающую (убывание не более чем на 1) цепочку устойчивых точек для оператора H_{k+1}. По величинам сумм $x_0, \ldots, x_t$ нужно восстановить начальную цепочку устойчивых точек $y_0, \ldots, y_t$ для оператора H_k, тогда $y_0y'_0, \ldots, y_ty'_t$ есть искомая цепочка для оператора H_{k+1}. Цепочку длины не менее $t = (n-k-1)h + 1$ заведомо можно получить в силу того, что график h_1 в прямоугольнике размера $(n-k)h$ на kh, график h_2 в прямоугольнике h на $(n-1)h$ (экстремальный случай, когда все 0 на первой горизонтали, а + в первых $(n-k-1)h$ горизонталях находятся в вертикали h, тогда точка $0, h$ является одновременно и $0, 1 \ldots, (n-k-1)h$ устойчивой. Примечание: условие убывания суммы компонент устойчивых точек существенно, для того чтобы провести шаг индукции.

Начальный шаг индукции $k = 1$ справедлив. Ограниченный оператор $H_1 = h_1$. $h_1(0)\ ,\ldots,\ h_1((n-1)h)$ – невозрастающая цепочка устойчивых точек порядка $0\ ,\ldots,\ (n-1)h$ требуемые.

Представляется верной следующая гипотеза. Утверждение о наличии невозрастающей цепочки длины $r = (n-k)h + 1$ устойчивых точек для ограниченного оператора H_k $k = 1, \ldots, n$ справедливо в общем случае для аналогичных, только без условия ограниченной вариации операторов.

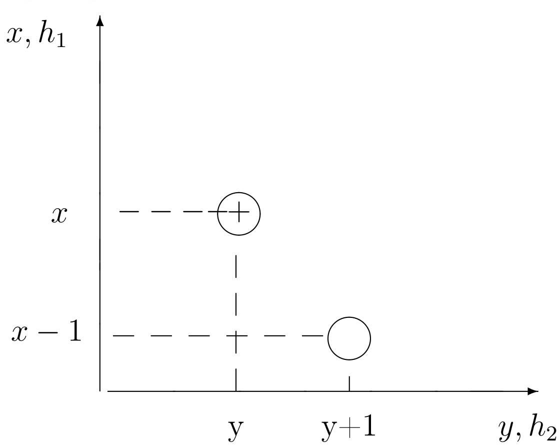

Рисунок 3.

$H : \{0, \dots, S\}^n \to \{0, \dots, S\}^n$, определяемый по n невозрастающим функционалам $h_1, \dots, h_n : \{0, \dots, S\}^{n-1} \to \{0, \dots, S\}$ следующим образом. $H : x_1, \dots, x_n \to x'_1, \dots, x'_n$, $x'_1 = h_1(x_2 + \ldots + x_n)$,..., $x'_i = h_i(x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n)$,..., $x'_n = h_n(x_1 + \ldots + x_{n-1})$.

Убывание означает: для всех $x \leq y$, $h_i(x) \geq h_i(y)$, $i = 1, \dots, n$.

При справедливости этой гипотезы сложность вытекающего из него алгоритма уменьшается по сравнению с $O(nS)^3$.

$H : [0, h]^n \to [0, h]^n$, где $[0, h]$ – $\{0, 1, \dots, h\}, h \in Z^+$.

Оператор H действует аналогичным образом: $h_1, \dots, h_n$ – некоторые невозрастающие (убывающие) функционалы $[0, (n-1)h] \to [0, h]$. Убывание означает: для всех $x \leq y$ $h_i(x) \geq h_i(y)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $H(x_1 \ldots x_i \ldots x_n) = h_1(x_2 + \ldots + x_n) \ldots h_i(x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n) \ldots$.

6. Пример работы степенного алгоритма

$h_1 : 0 \to 1; 1, 2 \to 0$ $h_2 : 0, 1 \to 1; 2 \to 0$ $h_3 : 0 \to 1; 1, 2 \to 0$

$P = 3$

$X_1 : 0,\ h_1(3 - 0)$ – не определено

$X_1 : 1,\ h_1(3 - 1) = 0$ – нет

$X_1 = \emptyset$ – неподвижной точки с суммой $P = 3$ нет

$P = 2$

$X_1 : 0,\ h_1(2 - 0) = 0$ – да

$X_1 : 1,\ h_1(2 - 1) = 0$ – нет

$X_1 = 0$

$X_2 : 0,\ h_2(2 - 0) = 0$ – да

$X_2 : 1,\ h_2(2 - 1) = 1$ – да

$X_2 = 0, 1$

$X_3 : 0,\ h_3(2 - 0) = 0$ – да

$X_3 : 1,\ h_3(2 - 1) = 0$ – нет

$X_3 = 0$

$F(1, 0) = 1$

$F(1, 1) = 0$

$F(1, 2) = 0$

$F(1, 3) = 0$

$F(2, 0) = F(1, 0) = 1$

$F(2, 1) = F(1, 1) \vee F(1, 0) = 1$

$F(2,2) = F(1,2) \vee F(1,1) = 0$
$F(2,3) = F(1,3) \vee F(1,2) = 0$
$F(3,0) = F(2,0) = 1$
$F(3,1) = F(2,1) = 1$
$F(3,2) = F(2,2) = 0$
$F(3,3) = F(2,3) = 0$
Неподвижных точек с суммой $P = 2$ нет.
$P = 1$
$X_1 : 0,\ h_1(1-0) = 0$ – да
$X_1 : 1,\ h_1(1-1) = 1$ – да
$X_1 = 0, 1$
$X_2 : 0,\ h_2(1-0) = 1$ – нет
$X_2 : 1,\ h_2(1-1) = 1$ – да
$X_2 = 1$
$X_3 : 0,\ h_3(1-0) = 0$ – да
$X_3 : 1,\ h_3(1-1) = 1$ – да
$X_3 = 0, 1$
$F(1,0) = 1$
$F(1,1) = 1$
$F(1,2) = 0$
$F(1,3) = 0$
$F(2,0) = F(2,-1) = 0$
$F(2,1) = F(1,0) = 1$
$F(2,2) = F(1,1) = 1$
$F(2,3) = F(1,2) = 0$
$F(3,0) = F(2,0) \vee F(2,-1) = 0$
$F(3,1) = F(2,1) \vee F(2,0) = 1$
$F(3,2) = F(2,2) \vee F(2,1) = 1$
$F(3,3) = F(2,3) \vee F(2,2) = 1$
Неподвижная точка есть:
$x^* :$
$x_3 = 0, h_1(x^*) = 0$
$x_2 = 1, h_2(x^*) = 1$
$x_1 = 0, h_3(x^*) = 0$
$H(x^*) = x^*$
$P = 0$

$X_1 : 0,\ h_1(0-0) = 1$ – нет

$X_1 : 1,\ h_1(0-1)$ – нет

$X_1 = \emptyset$ – неподвижных точек нет.

Благодарим Н.С. Кукушкина за обсуждение тематики и сделанные замечания. Работа выполнена в рамках научных исследований ВолГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. *Современное состояние теории игр* // УМН. 1970. Вып. 25. №2. С. 81–140.

2. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и трудноре-шаемые задачи.* М: Мир. 1984.

3. Лебедев В.Н., Черничкин М.С. *Игровой аспект верификации программ* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. №5. С. 40–45.

4. Оуэн Г. *Теория игр.* М: Мир. 1971.

5. Emerson E.A., Jutla C.S., Sistla A.P. *On model-checking for fragments of μ-calculus* // Fifth International Conference on Computer Aided Verification. Elounda. Greece. June. July 1993.

6. Kukushkin N.S. *A fixed-point theorem for decreasing mappings* // Economics Letters. 1994. V. 46. P. 23–26.

7. Kukushkin N.S. *Best Response Dynamics in Finite Games with Additive Aggregation* // Games and Economic Behavior. 2004. V. 48. N 1. P. 94–110.

8. Kukushkin N.S. *A fixed-point theorem for decreasing mappings* // Computer Center RAN. M. Manuscript. 2012.

9. Novshek W. *On the existence of Cournot equilibrium* // Review of Economic Studies. 1985. V. 52. P. 85–98.

10. Tarski A. *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications* // Pacific Journal of Mathematics. 1955. V. 5. P. 285–309.

SEARCH FOR A FIXED POINT DISCRETE OPERATOR

Irina A. Bashlaeva, Volgograd State University, post-graduate student (iraina15@yandex.ru).
Vasiliy N. Lebedev, Volgograd State University, Cand.Sc., docent (lebedevvn@mail.ru)

Abstract: The computational complexity of the finding a fixed point of a decreasing monotone operator is analyzed. An power algorithm for determining a fixed point is presented. A constructive prove of the presence of discrete fixed point operator is given for a particular case of the operator of bounded variation. Appendices are the following: voluntary financing of general welfare, Cournot oligopoly and others.

Keywords: monotone operator, fixed points, a polynomial algorithm.