Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.3, с. 51–57

УДК 519.7
ББК 22.18

ДИСКРЕТНАЯ АРБИТРАЖНАЯ ПРОЦЕДУРА С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША

Александр Э. Менчер*
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет
им. Н.Г. Чернышевского
672000, Чита, ул. Бабушкина, 129
e-mail: aementcher@mail.ru

Рассматривается модель переговоров двух лиц с участием арбитра. Игроки вносят предложения, а решение арбитра моделируется дискретной случайной величиной, равновероятно распределенной на множестве $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$. Применяется новая арбитражная процедура. Найдено равновесие по Нэшу в игре в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: антагонистическая игра, арбитражная схема, равновесие, смешанные стратегии.

1. Введение

Рассматривается антагонистическая игра, в которой игроки L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M – предложение y; в общем случае x и y – произвольные действительные числа. Если $x \leq y$, то конфликта нет и

---

*Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ, №8.3641.2011.

игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. В противном случае, $x > y$, игроки апеллируют к арбитру A, который руководствуется своими соображениями о справедливости. Так, например, в арбитражной схеме по последнему предложению [3] арбитр выбирает то из предложений, которое ближе к его решению z. Функция выигрыша в данной схеме имеет вид: $H(x,y) = EH_z(x,y)$, где

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{если } x \le y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1.1}$$

В настоящей работе мы, в предположении, что $-\infty < y \le 0 \le$ $\le x < +\infty$, положим

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x-z| < |y-z|, \\ -y^2, & \text{если } |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть арбитр выбирает одно из $2n+1$ значений: $-n, -(n-1), \ldots,$ $-1, 0, 1, \ldots, n-1, n$ – с равными вероятностями $p = \frac{1}{2n+1}$.

В работах [1,2,4,5] найдены равновесия в смешанных стратегиях в арбитражной процедуре по последнему предложению.

В нашем случае также нет решения игры в чистых стратегиях и мы будем искать равновесие в игре в смешанных стратегиях. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M, соответственно. Имеем:

$$f(x) \ge 0, \qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1; \qquad g(y) \ge 0, \qquad \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy = 1.$$

Благодаря симметрии цена игры равна нулю, а смешанные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть: $g(y) = f(-y)$. Обозначим стратегию игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$ через $H(f(x), y)$.

2. Оптимальные стратегии

Теорема 2.1. *Для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{\textit{если} } 0\le x<2n,\\ \dfrac{2n(n+1)}{x^2}, & \text{\textit{если} } 2n<x<2n+2,\\ 0, & \text{\textit{если} } 2n+2<x<+\infty.\end{cases}\tag{2.1}$$

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию игрока L в виде

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\le x<c,\\ \varphi(x), & \text{если } c<x<c+2,\\ 0, & \text{если } c+2<x<+\infty,\end{cases}\tag{2.2}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и дважды непрерывно дифференцируема в интервале $(c,c+2)$. Отметим, что функция $H(f(x),y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty,0]$. Стратегия $f(x)$ будет оптимальной, если $H(f(x),y)=0$ при $y\in[-(c+2),-c]$ и $H(f(x),y)\ge 0$ при $y\in(-\infty,-(c+2))\cup(-c,0]$.

Пусть $y\in[-(c+2),-c]$, тогда $-y\in[c,c+2]$ и

$$\begin{aligned}H(f(x),y)=\tfrac{1}{2n+1}\Bigg[n\int\limits_c^{c+2}(-y^2)f(x)\,dx+\int\limits_c^{-y}x^2f(x)\,dx+\\ +\int\limits_{-y}^{c+2}(-y^2)f(x)\,dx+n\int\limits_c^{c+2}x^2f(x)\,dx\Bigg].\end{aligned}\tag{2.3}$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то

$$\begin{aligned}0=H(f(x),-c-0)=\tfrac{1}{2n+1}\left[-(n+1)c^2+n\int\limits_c^{c+2}x^2f(x)\,dx\right],\\ 0=H(f(x),-(c+2)+0)=\tfrac{1}{2n+1}\left[-n(c+2)^2+(n+1)\int\limits_c^{c+2}x^2f(x)\,dx\right],\end{aligned}\tag{2.4}$$

откуда находим

$$c=2n,\qquad \int\limits_c^{c+2}x^2f(x)\,dx=c(c+2)=4n(n+1).\tag{2.5}$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо $H'(f(x),y) = H''(f(x),y) = H'''(f(x),y) = 0$ в интервале $(-(c+2),-c)$. Имеем

$$H'(f(x,y)) = -\frac{2}{2n+1}\left[ny + y^2 f(-y) + y\int\limits_{-y}^{c+2} f(x)\,dx\right],$$

$$H''(f(x,y)) = -\frac{2}{2n+1}\left[n + 3yf(-y) - y^2 f'(-y) + \int\limits_{-y}^{c+2} f(x)\,dx\right],$$

$$H'''(f(x),y) = -\frac{2}{2n+1}\left[4f(-y) - 5yf'(-y) + y^2 f''(-y)\right].$$

Полагая в выражении для $H'''(f(x),y)$ $y=-x$ и приравнивая его к нулю, приходим к дифференциальному уравнению

$$x^2\varphi''(x) + 5x\varphi'(x) + 4\varphi(x) = 0. \tag{2.6}$$

Функцию $\varphi(x)$ будем искать в виде $\varphi(x) = \alpha x^r$.

Имеем

$$\alpha r(r-1)x^2 + 5\alpha r x^2 + 4\alpha x^2 = 0,$$

откуда получаем

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \text{ и } r = -2.$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{x^2}. \tag{2.7}$$

Найдем константу α. Итак,

$$1 = \int\limits_{c}^{c+2} \frac{\alpha}{x^2}\,dx = \frac{2\alpha}{c(c+2)} = \frac{\alpha}{2n(n+1)}, \text{ и } \alpha = 2n(n+1).$$

Следовательно, функция $f(x)$ имеет вид (2.1).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in (-\infty, -(4n+2)]$, тогда $-y \in [(4n+2),\infty)$ и

$$H(f(x),y) = \int\limits_{2n}^{2n+2} x^2 f(x)\,dx = 4n(n+1). \tag{2.8}$$

Далее, пусть $y \in [-(2n+2k+2), -(2n+2k)]$, где $k = -n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$. Тогда $-y \in [2n+2k, 2n+2k+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{2n+1}\left[(n-k)\int\limits_{2n}^{2n+2}(-y^2)f(x)\,dx + \int\limits_{2n}^{-2k-y} x^2 f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-2k-y}^{2n+2}(-y^2)f(x)\,dx + (n+k)\int\limits_{2n}^{2n+2} x^2 f(x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[-(n-k)y^2 + 2n(n+1)(-2n-y-2n) + \right.$$

$$\left. +2n(n+1)y^2\left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{y+2k}\right) + 4n(n+1)(n+k)\right]. \qquad (2.9)$$

При $k = 0$ имеем: $y \in [-(2n+2), -2n]$ и $H(f(x), y) = 0$.

Далее, пусть $y = -2n - 2k$. Имеем

$$H(f(x), -2n-2k) = \frac{4k(n+k)(k-1)}{2n+1}. \qquad (2.10)$$

Из (2.10) ясно, что $H(f(x), -2n-2k) = 0$ при $k = -n$, $k = 0$ и $k = 1$ и $H(f(x), -2n-2k) > 0$ при всех остальных рассматриваемых значениях k.

Кроме того,

$$H'(f(x), y) = \frac{2k}{2n+1}\left[y - \frac{4n(n+1)k}{(y+2k)^2}\right], \qquad (2.11)$$

$$H''(f(x), y) = \frac{2k}{2n+1}\left[1 + \frac{8kn(n+1)}{(y+2k)^3}\right]. \qquad (2.12)$$

Теперь, если $k \geq 1$, то $H'(f(x), y) < 0$, и функция $H(f(x), y)$ строго убывает на отрезке $[-(4n+2), -(2n+2)]$ от $4n(n+1)$ до 0. Если $k \leq -1$, то $H''(f(x), y) < 0$ и функция $H(f(x), y)$ – выпуклая вверх на каждом их отрезков $[-(2n+2k+2), -(2n+2k)]$, откуда, учитывая предыдущие расчеты, заключаем, что $H(f(x), y) > 0$ в интервале $(-2n, 0)$ и $H(f(x), 0) = 0$. $\square$

В случае $n = 1$, то есть когда предложения арбитра равновероятно сосредоточены в точках -1, 0 и 1, функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le x < 2, \\ \dfrac{4}{x^2}, \text{ если } 2 < x < 4, \\ 0, \text{ если } 4 < x < \infty. \end{cases} \tag{2.13}$$

График соответствующей функции $H(f(x), y)$ представлен на рис. 1.

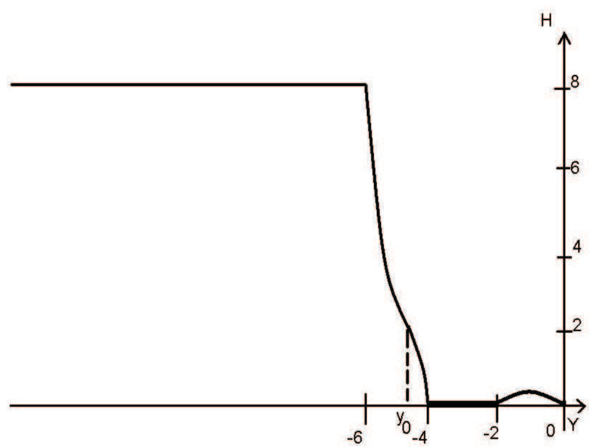

Рисунок 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Токарева Ю.С. *Теоретико-игровые модели проведения конкурсов* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 2. С. 66–78.

2. Менчер А.Э. *Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 4. С. 78–91.

3. Farber H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of Conflict Resolution. 1980. V. 35. P. 683–705.

4. Mazalov V.V., Mentcher A.E., Tokareva J.S. *On a discrete arbitration procedure in three points* // Game Theory and Applications. 2005. V. 11. P. 87–91.

5. Mazalov V.V., Mentcher A.E., Tokareva J.S. *On a discrete arbitration procedure* // Sci. Math. Japonica. 2006. V. 63. №3. P. 325–330.

ON A DISCRETE ARBITRATION PROCEDURE WITH QUADRATIC PAYOFF FUNCTION

Alexander E. Mentcher, Faculty of Physics and Mathematics, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky, Chita, Cand.Sc., docent (aementcher@mail.ru).

Abstract: We consider a two-person bargaining model with arbitrator's participation. The players make their offers and the arbitrator's decision is simulated by a random variable with uniform distribution on the set $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \ n-1, \ n\}$. We use a new arbitration procedure. The Nash equilibrium in this game in mixed strategies is found.

Keywords: non-cooperative game, arbitration scheme, equilibrium, mixed strategies.