

УДК 517.929.5

О ПЕРИОДЕ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Ласунский

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Показано, что дискретное периодическое логистическое уравнение

$$x_{n+1} = x_n \exp(r_n(1 - x_n))$$

с положительным ω -периодическим коэффициентом r_n ($\omega \neq 1$) не может иметь Ω -периодического решения ($\Omega \neq 1$), период которого взаимно прост с ω . Получен дискретный аналог теоремы Массера-Курцвейля. С помощью компьютерной программы строятся примеры ω -периодического логистического уравнения, имеющего периодические решения периода ω , 2ω , 3ω . Решения исследуются на устойчивость.

Ключевые слова: дискретное периодическое логистическое уравнение, период решения, устойчивость.

A. V. Lasunsky. ON THE PERIOD OF SOLUTIONS OF A DISCRETE PERIODIC LOGISTIC EQUATION

It is shown that the discrete periodic logistic equation

$$x_{n+1} = x_n \exp(r_n(1 - x_n))$$

with a positive ω -periodic coefficient r_n ($\omega \neq 1$) cannot have Ω -periodic solutions ($\Omega \neq 1$) with the period coprime to ω . A discrete analog of the Massera-Kurzweil theorem was obtained. Examples of the ω -periodic logistic equation with periodic solutions of the period ω , 2ω , 3ω were constructed using a computer program. The solutions are examined for stability.

Key words: discrete periodic logistic equation, period of solution, stability.

ВВЕДЕНИЕ

Дискретное периодическое логистическое уравнение

$$y_{n+1} = y_n \exp(r_n(1 - y_n k_n^{-1})), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

где $\{r_n\}$ и $\{k_n\}$ – положительные последовательности, является одной из основных мо-

делей роста популяций изолированных видов. Если коэффициенты $\{r_n\}, \{k_n\}$ постоянны, то динамика уравнения (1) достаточно хорошо изучена [4], [8]. Уравнение

$$y_{n+1} = y_n \exp(r(1 - y_n k^{-1})), \quad r > 0, \quad k > 0$$

при любом r имеет положительное положение равновесия $y_n \equiv k$. Это положение равновесия устойчиво, если $0 < r < 2$. Если

$2 < r < 2,526$, то появляются двухточечные циклы. Если $2,526 < r < 3,102$, то появляются циклы длины 4, 8, 16, ..., 2^k . Если $r > 3,102$, то существуют трехточечные циклы и квазистокастические решения.

Заметим, что при $k_n \equiv k$ заменой $y_n = kx_n$, уравнение (1) можно привести к виду

$$x_{n+1} = x_n \exp(r_n(1 - x_n)) \quad (2)$$

с единственным положительным положением равновесия $x_n \equiv 1$.

Если $\{r_n\}$ и $\{k_n\}$ – положительные периодические последовательности с общим периодом ω , то у уравнения (1) существует ω -периодическое решение [14]. В этой работе не исключается случай $\omega = 1$. Это периодическое решение глобально асимптотически устойчиво при дополнительном условии

$$k^* k_*^{-1} \exp(r^* - 1) \leq 2, \quad (3)$$

где $r^* = \max_{n \in N} \{r_n\}$, $k_* = \min_{n \in N} \{k_n\}$, $k^* = \max_{n \in N} \{k_n\}$. Если $k_n \equiv k$, то неравенство (3) принимает вид $r^* \leq 1 + \ln 2$. Из работы [13] следует, что предыдущий результат можно усилить. Если $k_n \equiv k$ и для периодической положительной последовательности $\{r_n\}$ выполнено неравенство $r^* \leq 2$, то все решения уравнения (1) стремятся к положительному равновесию. Любопытно, что для уравнения (2) с $r_n = \text{const} < 2$ положение равновесия $x_n \equiv 1$ асимптотически устойчиво. Оценку для r^* , по-видимому, улучшить нельзя [6]. В цитированной работе получен следующий результат.

Если положительная ω -периодическая последовательность $\{r_n\}$ такова, что

$$\prod_{k=0}^{\omega-1} (1 - r_k) > 1, \quad (4)$$

то уравнение (2) имеет не менее двух положительных ω -периодических решений, отличных от положения равновесия.

Разумеется, в этом случае не может идти речь о глобальной асимптотической устойчивости. Заметим, что из неравенства (4) следует, что среди членов положительной ω -периодической последовательности $\{r_n\}$ есть $r_n > 2$. Даже если все члены периодической последовательности $\{r_n\}$ принадлежат интервалу $(2; 2,526)$, уравнение (2) может иметь решения с периодами 4, 6 и т. д. Как мы знаем, это невозможно в случае $r_n = r \in (2; 2,256)$. Соответствующие примеры мы рассмотрим позднее.

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАССЕРА-КУРЦВЕЙЛЯ

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Может ли уравнение (2) с ω -периодическим коэффициентом r_n иметь периодическое решение, период которого $\Omega \neq 1$ взаимно прост $\omega \neq 1$? Для ответа на поставленный вопрос обратимся к дифференциальным уравнениям [7].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \quad (5)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, функция $X : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывна по своим аргументам, удовлетворяет какому-либо условию, обеспечивающему единственность решения задачи Коши, и $X(x, t + \omega) = X(x, t)$ для всех x и t . Массера заметил [11], [12], что периодическое решение системы (5) может иметь период, несоизмеримый с ω . Я. Курцвейль установил [5], что для всякой системы (5), имеющей периодическое решение, период которого несоизмерим с периодом правых частей, справедлив следующий факт. Правые части системы (5) вдоль такого решения не зависят от времени. Оказывается, что аналогичные факты имеют место и для разностных уравнений, только теперь здесь уже речь идет о взаимной простоте периодов ω и Ω .

Пример 1. Скалярное уравнение

$$x_{n+1} = -x_n + (x_n^2 - 1) \sin \frac{2\pi n}{k}, \quad k > 2,$$

правая часть которого периодична с периодом $\omega = k$, имеет решение $x_n = (-1)^n$ с периодом $\Omega = 2$. Эти периоды могут быть взаимно простыми числами.

Заметим, что скалярное уравнение (5) не может иметь периодического решения, период которого несоизмерим с периодом правой части [2].

Пример 2. (Дискретный вариант примера Н. П. Еругина [1]).

Период ω системы ($n \in N$, $k > 2$)

$$\begin{cases} x_{n+1} = -y_n, \\ y_{n+1} = x_n + (x_n^2 + y_n^2 - 1) \sin \frac{2\pi n}{k} \end{cases}$$

равен k . Система имеет решение

$$x_n = \cos \frac{\pi n}{2}, \quad y_n = \sin \frac{\pi n}{2},$$

период которого $\Omega = 4$ может быть взаимно простым с $\omega = k$.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = X(x_n, n),$$

$$X(x, n + \omega) = X(x, n), \omega \neq 1.$$

Пусть эта система имеет Ω -периодическое решение $\varphi(n)$, $\Omega \neq 1$.

Теорема 1. (дискретный аналог теоремы Массера-Курицевейля). Если $\text{НОД}(\omega, \Omega) = 1$, то для любого $n_0 \in Z_+$ имеем $X(\varphi(n_0), n) = X(\varphi(n_0), n_0) = \text{const}$.

Доказательство. Воспользуемся известным фактом [3] из теории чисел о представлении наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Если $\text{НОД}(p, q) = d$, то $\exists m, n \in Z$ такие, что $mp + nq = d$. Отсюда сразу следует, что если p, q взаимно простые числа, то $\forall l \in Z \exists m, n \in Z$ такие, что $mp + nq = l$. Возьмем произвольное $n_0 \in Z_+$. Для Ω -периодического решения $\varphi(n)$ имеем

$$\varphi(n_0 + k\Omega + 1) = \varphi(n_0 + 1),$$

$$X(\varphi(n_0 + k\Omega), n_0 + k\Omega) = X(\varphi(n_0), n_0),$$

$$X(\varphi(n_0), n_0 + k\Omega) = X(\varphi(n_0), n_0),$$

$$X(\varphi(n_0), n_0 + k\Omega + m\omega) = X(\varphi(n_0), n_0),$$

$$X(\varphi(n_0), n) = X(\varphi(n_0), n_0) = \text{const}.$$

Из этой теоремы сразу следует, что логистическое уравнение (2) с ω -периодическим коэффициентом r_n ($\omega \neq 1$) не может иметь Ω -периодическое решение ($\Omega \neq 1$), период которого взаимно прост с ω .

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРОВ

Как выше уже отмечалось, при выполнении неравенства (4) уравнение (2) имеет не менее двух положительных ω -периодических решений, отличных от положения равновесия. В работе [6] показано, что для $\omega = 2$ таких решений уравнение (2) имеет ровно 2. Может ли ω -периодическое уравнение (2), если $\omega > 2$, иметь больше двух ω -периодических решений? Ясно, что если

$$\prod_{k=0}^{\omega-1} (1 - r_k) > 1,$$

то для любого $m \in N$

$$\left(\prod_{k=0}^{\omega-1} (1 - r_k) \right)^m > 1$$

и уравнение (2) с ω -периодическим коэффициентом r_n может иметь $m\omega$ -периодические решения. Как ведут себя решения по отношению к устойчивости? Соответствующие примеры мы рассмотрим в этом пункте. Эти примеры построены с помощью компьютерной программы (свид. о гос. регистрации № 2011614359 от 02.06.2011), разработанной автором. Количество ω -периодических решений ω -периодического уравнения (2) совпадает с количеством ненулевых корней некоторого уравнения $\varphi(t) = t$, $\varphi(0) = 0$ [6]. Отметим, что корень $t = 0$ соответствует положительному положению равновесия $x_n = 1$. С помощью этой же программы мы можем построить для ω -периодического уравнения (2) решения периода 2ω , 3ω и т. д. Разумеется, что теперь количество ненулевых корней уравнения $\varphi(t) = t$ не совпадает с количеством искомых решений. С помощью программы Maple строим в одной и той же системе координат график функции $\varphi(t)$ и прямую $y = t$ для различных значений положительной последовательности r_n . В программе вычисляем элементы периодических решений и соответствующие мультипликаторы, которые позволяют ответить на вопрос об устойчивости периодического решения.

Пример 3. Период коэффициентов логистического уравнения равен 3, $r_0 = 2, r_1 = 4, r_2 = 0, 1$. Уравнение (2) имеет ровно два 3-периодических решения:

x(3n)	2,69666	0,38988
x(3n+1)	0,09060	1,32091
x(3n+2)	3,44284	0,36593
мультипликатор	-1,83678	-0,90892
решение	неустойчиво	устойчиво

Пример 4. Период коэффициентов логистического уравнения равен 3, $r_0 = 2, r_1 = 6, r_2 = 0, 3$. Уравнение (2) имеет ровно четыре 3-периодических решения:

x(3n)	1,39344	0,32989
x(3n+1)	0,63438	1,26014
x(3n+2)	5,68946	0,26458
мультипликатор	-3,54444	-2,05496
решение	неустойчиво	неустойчиво
x(3n)	0,02089	0,03691
x(3n+1)	0,14798	0,25329
x(3n+2)	24,5679	22,3547
мультипликатор	-0,68449	2,74698
решение	устойчиво	неустойчиво

Пример 5. Период коэффициентов логистического уравнения равен 2, $r_0 = 3, r_1 = 5$.

Уравнение (2) имеет ровно два 2-периодических решения:

$x(2n)$	2,63405	0,10480
$x(2n+1)$	0,01957	1,53712
мультипликатор	-6,22667	-4,58361
решение	неустойчиво	неустойчиво

Для этих же значений коэффициентов $r_0 = 3, r_1 = 5$ уравнение (2) имеет четыре 4-периодических решения:

$x(4n)$	5,25746	0,72839
$x(4n+1)$	1,49212e-05	1,64528
$x(4n+2)$	0,00221	0,06532
$x(4n+3)$	0,04418	1,0785
мультипликатор	-11,43172	-30,24777
решение	неустойчиво	неустойчиво
$x(4n)$	4,28204	2,96557
$x(4n+1)$	0,00023	0,00815
$x(4n+2)$	0,03361	1,16137
$x(4n+3)$	0,61038	0,71568
мультипликатор	21,83112	-48,51786
решение	неустойчиво	неустойчиво

Для уравнения (2) с указанными коэффициентами приведем пример 6-периодического решения.

$x(6n)$	7,86525
$x(6n+1)$	8,93489e-009
$x(6n+2)$	1,32606e-006
$x(6n+3)$	2,66344e-005
$x(6n+4)$	0,00395
$x(6n+5)$	0,07845
мультипликатор	-13,56790
решение	неустойчиво

Пример 6. Период коэффициентов логистического уравнения равен 4, $r_0 = 2,01, r_1 = 2,5, r_2 = 2,2, r_3 = 2,5$. Хотя все значения r_n лежат на промежутке $(2; 2,526)$, уравнение (2) имеет, например, такое 4-периодическое решение.

$x(4n)$	1,74441
$x(4n+1)$	0,39069
$x(4n+2)$	1,79218
$x(4n+3)$	0,31369
мультипликатор	0,03706
решение	устойчиво

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос о периоде решений дискретного ω -периодического ($\omega \neq 1$)

логистического уравнения (2). Показано, что это уравнение не может иметь Ω -периодического решения ($\Omega \neq 1$), период которого взаимно прост с ω . Этот факт вытекает из дискретного аналога теоремы Массера-Курцвейля. Здесь уместно привести следующий результат, касающийся автономного случая [10]. Если при частном значении параметра логистическое или другое одномерное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет решение периода три, то оно имеет бесконечное множество решений всех прочих периодов. Заметим, что самые общие закономерности сосуществования периодических решений различных периодов в одномерных непрерывных отображениях установил [9]. В настоящей работе построены примеры ω -периодического логистического уравнения, имеющего периодические решения периода $\omega, 2\omega, 3\omega$. Решения исследованы на устойчивость. Примеры показывают отсутствие явной связи бифуркационных значений параметра r логистического уравнения $x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - x_n))$ со значениями периодического коэффициента r_n с точки зрения существования периодических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений // ПММ. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 148–152.
2. Ильин Ю. А. О периодических решениях линейных систем, период которых несоизмерим с периодом системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2010. № 4. URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/> (дата обращения: 07.08.2012).
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 496 с.
4. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
5. Курцвейль Я., Вейвода О. Периодические решения систем дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
6. Ласунский А. В. О циклах дискретного периодического логистического уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 154–157.
7. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
8. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

9. *Шарковский А. Н.* Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. № 1. С. 61–71.
10. *Li T.-Y., Yorke J. A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82. P. 982–985.
11. *Massera J.* Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingen. Montevideo. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.
12. *Massera J.* Estabilidad total y vibraciones aproximadamente periodicas // Publ. Inst. Mat. Estadistica. Fac. Ing. 1954. Vol. 2, N 7. P. 135–145.
13. *Xiang Hong-jun, Liao Lu-sheng, Wang Jin-hua.* Global attractivity of a nonautonomous discrete Smith equation // J. Changde Teach. Univ. Sci. Ed. 2001. Vol. 13, N 1. P. 13–15.
14. *Zhou Zhan, Zou Xingfu.* Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation // Appl. Math. Lett. 2003. Vol. 16. P. 165–171.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ласунский Александр Васильевич
 доцент кафедры высшей математики, к. ф.-м. н.
 Новгородский государственный университет имени
 Ярослава Мудрого
 ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Нов-
 город, Россия, 173003
 эл. почта: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
 тел.: (8162) 629 968

Lasunsky, Alexandr
 Novgorod State University
 41 B. Saint Petersburgskaya St., 173003, Veliky Novgorod,
 Russia
 e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
 tel.: (8162) 629 968