Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 78–88

УДК 519.2

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматриваются случайные графы, состоящие из N занумерованных вершин. Степени вершин определяются независимо друг от друга в соответствии со степенным распределением с показателем $\tau > 0$. Все полуребра вершин занумерованы. Граф строится путем равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при условии, что сумма степеней равна n, где n четно, $\tau \in (1, 2)$ и $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$.

Ключевые слова: случайные графы, Интернет, конфигурационная модель, степень вершины, предельное распределение.

Yu. L. Pavlov. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN CONDITIONAL CONFIGURATION RANDOM GRAPH

We study random graphs consisting of N numbered verties. The degrees of the vertices are drawn independently from power-law distribution with the exponent $\tau > 0$. All of the stubs of the vertices are numbered. The graph is constructed by joining each stub to another equiprobably to form edges. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree and number of vertices with given degree under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n, n is even, $\tau \in (1, 2)$ and $N, n \to \infty$ so that $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$.

Key words: random graphs, Internet, configuration model, vertex degree, limit distribution.

Введение

Исследование случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет или социальные сети, в последние годы стало одним из важнейших направлений работы специалистов по вероятностным методам дискретной математики (см. например, [7, 9]). Одной из наиболее известных моделей такого типа является так называемый конфигурационный граф, степени вершин которого являются случайными величинами [9, 11, 13]. Пусть граф состоит из N основных вершин, занумерованных числами от 1 до N, а степени этих вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_N$. При описании структуры графа используется понятие полуребра, т. е. ребра, инцидентного данной вершине, но для которого смежная

вершина еще не определена. Все полуребра графа считаются различными и при образовании ребер соединяются друг с другом попарно каким-то способом. Обычно используется равновероятное соединение, что и подразумевается в данной статье. Заметим, что поскольку сумма степеней должна быть четной, в случае нечетного значения суммы $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N$ в граф вводится дополнительная вершина единичной степени. Ясно, что в таком графе могут быть петли и кратные ребра.

Наблюдения за различными реальными сетями показали (см. например, [9, 10]), что в большинстве случаев число вершин степени k при больших k пропорционально $k^{-(\tau+1)}$, где $\tau \in (1,2)$. В таком случае подходящим общим распределением для $\xi_1, \xi_2 ...$ является следующее выражение:

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant k\} = h(k)/k^{\tau}, \quad k = 1, 2, ..., \qquad (1)$$

где $h(k)$ — медленно меняющаяся (в смысле Карамата) функция. Исследования показали, что основные свойства сетей при больших N зависят главным образом от значений вероятностей (1), но при этом вид функции $h(k)$ почти не влияет на асимптотическую структуру графа. Поэтому в настоящей статье мы будем считать, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant k\} = k^{-\tau}.$$

В этом случае, как легко видеть,

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \ k = 1, 2, ... \qquad (2)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = \zeta(\tau), \qquad (3)$$

где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ .

В статьях [6, 8] впервые рассматривались условные конфигурационные случайные графы при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n, т. е. $\zeta_N = n$. Исследование таких графов представляет определенный интерес, поскольку на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях. Кроме того, если известны соответствующие результаты об условных графах при различных соотношениях между стремящимися к бесконечности N и n, то их можно использовать и для изучения случайных графов без ограничений на число ребер. Обозначим $\xi_{(N)}$ и μ_r максимальную степень вершины и число вершин степени r соответственно. В статье [8] были найдены предельные распределения этих случайных величин при $\tau > 0$ и $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \zeta(\tau)$, а в работе [6] эти результаты были распространены на случаи $n/N \downarrow 1$ и $n/N \uparrow \zeta(\tau)$, при этом для $\tau < 1$ было введено дополнительное условие $n/N^{1/\tau} \to 0$ (заметим, что как следует из (3), при $\tau \leqslant 1$ случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ не имеют математического ожидания). В [3] предельные распределения $\xi_{(N)}$ и μ_r были найдены для $\tau > 1$ и $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \zeta(\tau)$, при этом для $\tau \in (1,2)$ соответствующие результаты были получены в случае $|n - \zeta(\tau)N| = O(N^{1/\tau})$. Асимптотическое поведение этих случайных величин при $\tau \leqslant 1$ и $n/N^{1/\tau} \geqslant C > 0$ рассмотрено в [4]. Основным методом доказательства перечисленных результатов была обобщенная схема размещения частиц по ячейкам [1].

Далее было проведено исследование типичной структуры условного конфигурационного графа при $\tau \in (1,2)$ и $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \zeta(\tau)$. Для этого была установлена связь между графами и ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона [5, 12]. Естественно, что полученные результаты оказались сходными с известными (см. например [13]) фактами, установленными для графов без ограничений на число ребер.

Главными результатами статьи являются доказанные ниже предельные теоремы для $\xi_{(N)}$ и μ_r в не рассматривавшемся ранее случае $\tau \in (1,2)$ и $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$.

Основные результаты

В этом разделе сформулированы теоремы 1–3 о предельном поведении случайных величин $\xi_{(N)}, \mu_r$ и показано, что для доказательства этих теорем можно использовать обобщенную схему размещения [1].

Теорема 1. *Пусть $\tau \in (1,2)$, $N \to \infty, (n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\{(n - \zeta(\tau)N - \xi_{(N)})/N^{1/\tau} \leqslant z\} \to \int\limits_{-\infty}^{z} g(x)dx,$$

где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\{|t|^{\tau}\Gamma(1-\tau)(\cos\frac{\pi\tau}{2})(1 - i\frac{t}{|t|}tg\frac{\pi\tau}{2})\}. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Пусть* $\tau \in (1,2), r, N \to \infty, (n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. *Тогда равномерно относительно целых неотрицательных* k, *для которых* $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ *лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\tau \in (1,2),\ N, r \to \infty, (n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. *Тогда равномерно относительно целых неотрицательных* k, *для которых* $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ *лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r}(1+o(1)).$$

В силу условия $\zeta_N = n$ в нашем графе случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ не являются независимыми. Введем вспомогательные независимые случайные величины $\eta_1, ..., \eta_N$, распределение которых совпадает с (2). Тогда очевидно, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, ..., \xi_N = k_N\} \tag{5}$$
$$= \mathsf{P}\{\eta_1 = k_1, ...\eta_N = k_N | \eta_1 + ... + \eta_N = n\}.$$

Это равенство означает, что мы находимся в условиях обобщенной схемы размещения. Нам потребуются еще независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, ..., \eta_N^{(r)}$ и $\widetilde{\eta}_1^{(r)}, ..., \widetilde{\eta}_N^{(r)}$, для которых

$$\mathsf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathsf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \leqslant r\}, \tag{6}$$

$$\mathsf{P}\{\widetilde{\eta}_i^{(r)} = k\} \tag{7}$$
$$= \mathsf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\},\ i = 1, ..., N.$$

Обозначим также $\zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + ... + \eta_N^{(r)}$, $\widetilde{\zeta}_N^{(r)} = \widetilde{\eta}_1^{(r)} + ... + \widetilde{\eta}_N^{(r)}$, $P_r = \mathsf{P}\{\xi_1 > r\}$. Нетрудно видеть, что из (5) следует такая лемма (см. также [1]):

Лемма 1. *Справедливы равенства:*

$$\mathsf{P}\{\xi_{(N)} \leqslant r\} = (1-P_r)^N \frac{\mathsf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\}$$
$$= \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} \frac{\mathsf{P}\{\widetilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Заметим, что в утверждениях леммы 1 ζ_N является суммой независимых случайных величин. Доказательства основных результатов будут проведены обычным для обобщенной схемы образом. Для этого в следующих разделах исследуется предельное поведение вероятностей, входящих в правые части утверждений леммы 1 (леммы 2 и 3), а в конце статьи с помощью полученных результатов будут завершены доказательства теорем 1–3.

Предельное поведение ζ_N и $\zeta_N^{(r)}$

Для доказательства теоремы 1 с помощью первого утверждения леммы 1 нам необходимо найти асимптотику вероятностей $\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}$ и $\mathsf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}$, что и будет сделано в этом разделе.

Лемма 2. *Пусть* $\tau \in (1,2),\ N \to \infty$ *так, что* $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(A) $\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = \tau N(N - \zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)} \times (1+o(1))$,

(B) *Если* $r = n - \zeta(\tau)N - zN^{1/\tau}$, *где* z — *фиксированное число, то* $\mathsf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = \tau N(n - \zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)) \int\limits_z^\infty g(x)dx$,

где плотность распределения $g(x)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. Утверждение (A) следует из теоремы 3 статьи [2], однако случайные велечины $\xi_1^{(r)}, ..., \xi_N^{(r)}$ образуют схему серий и для $\zeta_N^{(r)}$ мы находимся в зоне больших уклонений. Поскольку общих теорем такого вида нет, доказательство приводится ниже, при этом оно включает и случай (A).

Обозначим

$$\gamma = (N^{1/\tau}/(n - \zeta(\tau)N))^{1/3}. \tag{8}$$

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_j^{(1)} = \xi_j - \zeta(\tau),\ \xi_j^{(2)} = \eta_j^{(r)} - \zeta(\tau),\ j = 1, ..., N$, и их суммы $\hat{\zeta}_N^{(1)} = \xi_1^{(1)} + ... + \xi_N^{(1)} = \zeta_N - \zeta(\tau)N,\ \hat{\zeta}_N^{(2)} = \xi_1^{(2)} + ... + \xi_N^{(2)} = \zeta_N^{(r)} - \zeta(\tau)N$. Представим искомые вероятности в виде:

$$\mathsf{P}\{\hat{\zeta}_N^{(s)} = n - \zeta(\tau)N\} = P_1^{(s)} + NP_2^{(s)} + P_3^{(s)},$$
$$s = 1, 2; \tag{9}$$

где

$$P_1^{(s)} = \mathsf{P}\{\hat{\zeta}_N^{(s)} = n - \zeta(\tau)N,\ \xi_j^{(s)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N),$$

$$j = 1, ..., N\},$$

$$P_2^{(s)} = \mathbf{P}\{\hat{\zeta}_N^{(s)} = n - \zeta(\tau)N,\ \xi_j^{(s)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N),$$

$$j = 1, ..., N-1,\ \xi_N^{(s)} > \gamma(n - \zeta(\tau)N)\},$$

$$P_3^{(s)} = \mathbf{P}\{\hat{\zeta}_N^{(s)} = n - \zeta(\tau)N, \bigcup_{i \neq j}\{\xi_j^{(s)}$$

$$> \gamma(n - \zeta(\tau)N),\ \xi_j^{(1)} > \gamma(n - \zeta(\tau)N), \}\}.$$

Ниже будет показано, что основной вклад в сумму (9) дает второе слагаемое. Рассмотрим сначала $P_1^{(s)}$. Положим

$$R^{(s)}(w)$$

$$= \sum_{k \leqslant \gamma(n-\zeta(\tau))+\zeta(\tau)} \exp\{(k - \zeta(\tau))w\}\, \mathbf{P}\{\xi_1^{(s)} \quad (10)$$

$$= k - \zeta(\tau)\}.$$

Из (2) следует, что при $k \to \infty$

$$p_k = \tau k^{-(\tau+1)}(1 + o(1)). \qquad (11)$$

Используя это соотношение, построим оценки для следующих сумм, справедливые для достаточно больших l:

$$\sum_{k>l} p_k < C_1 \int_l^\infty y^{-(\tau+1)} dy = C_2 l^{-\tau}, \qquad (12)$$

$$\sum_{k>l} (k - \zeta(\tau)) p_k < C_3 \int_l^\infty y^{-\tau} dy = C_4 l^{1-\tau}, \quad (13)$$

$$\sum_{k \leqslant l} (k - \zeta(\tau))^2 p_k < C_5 \int_1^l y^{1-\tau} dy = C_6 l^{2-\tau}, \quad (14)$$

здесь и далее символы $C_1, C_2, ...$ означают некоторые положительные постоянные.

Из (8) и (12) следует, что при выполнении условий леммы

$$(\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-\tau} = o(N^{-1}), \quad P_r = o(N^{-1}). \qquad (15)$$

Учитывая, что при $0 < y < 1$ справедливо равенство $e^y = 1 + y + \delta(y)$, где $\delta(y) \leqslant y^2$, из (10), (12)–(15) получаем соотношение:

$$R^{(s)}(1/(\gamma(n - \zeta(\tau)N))) = 1 + o(N^{-1}), \quad s = 1, 2. \qquad (16)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_{1,\gamma}^{(s)}, ..., \xi_{N,\gamma}^{(s)}$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma}^{(s)} = k - \zeta(\tau)\}$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(s)} = k\} \exp\{(k - \zeta(\tau))/(\gamma(n - \zeta(\tau)N))\}}{R^{(s)}(1/(\gamma(n - \zeta(\tau)N)))},$$

где $k \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N) + \zeta(\tau)$. Положим $\zeta_{N,\gamma}^{(s)} = \xi_{1,\gamma}^{(s)} + ... + \xi_{N,\gamma}^{(s)}$. Тогда $P_1^{(s)}$ имеет следующее представление:

$$P_1^{(s)} = (R^{(s)}((\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-1}))^N$$

$$\times \exp\{-1/\gamma\}\, \mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(s)} = n - \zeta(\tau)N\}. \qquad (17)$$

Обозначим $\varphi_{s,\gamma}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_{1,\gamma}^{(s)}$. При $s = 1$ из (10) следует, что

$$\varphi_{1,\gamma}(t) = (R^{(1)}((\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-1}))^{-1}$$

$$\times R^{(1)}(\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-1} + it), \qquad (18)$$

а для случайной величины $\xi_{1,\gamma}^{(2)}$ характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi_{2,\gamma}(t) = ((1 - P_r)R^{(2)}((\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-1}))^{-1}$$

$$\times R^{(2)}(\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-1} + it). \qquad (19)$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(s)} = n - \zeta(\tau)N\}$$

$$= \frac{1}{2\pi N^{1/\tau}} \int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} \exp\left\{-\frac{it(n - \zeta(\tau)N)}{N^{1/\tau}}\right\} \quad (20)$$

$$\times \left(\varphi_{s,\gamma}\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)\right)^N dt.$$

Если $k < \gamma(n - \zeta(\tau)N) + \zeta(\tau)$, то $\exp\{(k - \zeta(\tau))/(\gamma(n - \zeta(\tau)N))\} \leqslant 1 + 2(k - \zeta(\tau))/(\gamma(n - \zeta(\tau)N))$, поэтому из (10), (12), (13) и (15) получаем, что

$$|R^{(s)}((\gamma(n - \zeta(\tau)N))^{-1} + it)| \leqslant |\varphi_s(t)| + o(N^{-1}), \qquad (21)$$

где $\varphi_s(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_1^{(s)}$.

Из определения $\xi_1^{(s)}$ следует, что

$$\varphi_1(t) = \exp\{-i\zeta(\tau)t\}\varphi(t), \qquad (22)$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1. Из (2) находим, что

$$\varphi_2(t) = \Big(\varphi_1(t) - \sum_{k=r+1}^\infty \exp\{it(k - \zeta(\tau))\} p_k\Big)$$

$$\times (1 - P_r)^{-1}. \qquad (23)$$

Отсюда и из (12) видим, что при $r = n - \zeta(\tau)N - zN^{1/\tau}$

$$\varphi_2(t) = (1 - P_r)^{-1} \exp\{-i\zeta(\tau)t\}\varphi_1(t) + o(N^{-1}).$$

Таким образом, в силу (15) неравенство (21) имеет вид:

$$|R^{(s)}((\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-1} + it)| \leqslant |\varphi_1(t)| + o(N^{-1}).$$

Тогда из (16), (18) и (19) получаем такую оценку:

$$|\varphi_{s,\gamma}(t)|^N \leqslant C_7|\varphi(t)|^N. \qquad (24)$$

Разобьем интеграл, стоящий в правой части равенства (20), на сумму двух интегралов, соответствующих следующим значениям переменной интегрирования: $|t| \leqslant \varepsilon N^{1/\tau}$ и $\varepsilon N^{1/\tau} < |t| \leqslant \pi N^{1/\tau}$, где достаточно малое ε будет выбрано ниже. По свойству характеристических функций решетчатых распределений с единичным максимальным шагом при $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t)| \leqslant \exp\{-C_8\}. \qquad (25)$$

Известно [3], что

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \qquad (26)$$

где $\Phi(z, \tau, a)$ — трансцендентная функция Лерча, имеющая вид

$$\Phi(z, \tau, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^\tau} = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1 - ze^{-x}} dx,$$

а $\Gamma(\tau)$ — значение гамма-функции в точке τ. При $t \to 0$ и $\tau \in (1, 2)$ известно [14] следующее асимптотическое разложение:

$$\Phi(e^{it}, \tau, 1) = \zeta(\tau) + \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1} + O(t),$$

поэтому из (26) следует, что

$$\varphi(t) = 1 + it\zeta(\tau) + \Gamma(1-\tau)(-it)^\tau + O(t^2).$$

Отсюда и из (22) видно, что при достаточно малом ε и $|t| \leqslant \varepsilon$

$$|\varphi_1(t)| \leqslant \exp\{-C_9|t|^\tau\}. \qquad (27)$$

Тогда из (20), (24), (25) и (27) следует, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(1)} = n - \zeta(\tau)N\} \leqslant C_{10}N^{-1/\tau}$$
$$\times\Big(\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon N^{1/\tau}} \exp\{-C_9|t|^\tau\}dt$$
$$+ \int\limits_{\varepsilon N^{1/\tau}<|t|\leqslant\pi N^{1/\tau}} \exp\{-NC_8\}dt\Big).$$

Таким образом, при $s = 1$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N,\gamma}^{(s)} = n - \zeta(\tau)N\} < C_{11}N^{-1/\tau}.$$

Аналогичным образом эту оценку нетрудно получить и при $s = 2$. Отсюда, из (8), (16) и (17) следует, что

$$P_1^{(s)} \leqslant C_{12}N^{-1/\tau} \exp\{-1/\gamma\}$$
$$= o(N(n - \zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \qquad (28)$$

Оценим вероятность $P_2^{(s)}$. Очевидно, что

$$P_2^{(s)} = \sum_{M_s} \mathbf{P}\{\xi_N^{(s)} = n - \zeta(\tau) - k\}$$
$$\times \mathbf{P}\{\xi_1^{(s)} + ... + \xi_{N-1}^{(s)} = k - \zeta(\tau)(N-1), \xi_i^{(s)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, ..., N-1\}, \qquad (29)$$

где $M_1 = \{k : N - 1 \leqslant k < n - \zeta(\tau) - \gamma(n - \zeta(\tau)N)\}$, $M_2 = \{k : n - \zeta(\tau) - r \leqslant k < n - \zeta(\tau) - \gamma(n - \zeta(\tau)N)\}$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i^{(s)}(u), i = 1, ..., N, s = 1, 2$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(s)}(u) = k - \zeta(\tau)\}$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1^{(s)} = k - \zeta(\tau) | \xi_1^{(s)} \leqslant u\}. \qquad (30)$$

Ниже будут рассматриваться случайные величины $\xi_i^{(s)}(u)$ при $u = \gamma(n - \zeta(\tau)N)$ и $u = \gamma^{-1}N^{1/\tau}$. Пусть $\zeta_N^{(s)}(u) = \xi_1^{(s)}(u) + ... + \xi_N^{(s)}(u)$. Используя (12), (15), (29) и (30), нетрудно получить, что

$$P_2^{(s)} = (1 + o(1)) \sum_{M_s} \mathbf{P}\{\xi_N^{(s)} = n - \zeta(\tau) - k\}$$
$$\times \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(s)}(\gamma(n - \zeta(\tau)N)) = k - \zeta(\tau)(N-1)\}. \qquad (31)$$

Обозначим через $\varphi_{s,\gamma(n-\zeta(\tau)N)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(s)}(\gamma(n - \zeta(\tau)N))$. Из (2), (6), (12), (15) и (23) находим, что при любом фиксированном t

$$\varphi_{s,\gamma(n-\zeta(\tau)N)}(t/N^{1/\tau}) \to f(t),$$

где характеристическая функция $f(t)$ определена в (4). Поэтому

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(s)}(\gamma(n - \zeta(\tau)N)) \leqslant yN^{1/\tau}\} \to \int\limits_{-\infty}^{y} g(x)dx. \qquad (32)$$

Покажем, что при достаточно больших N, n и $s = 1, 2$

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(s)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leqslant C_{13}\gamma^{\tau}. \tag{33}$$

Учитывая (30) и то, что $\gamma(n-\zeta(\tau)N) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}$, для искомой вероятности получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}\\ &\leqslant (N-1)\,\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}\\ &+\left(\frac{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}}{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}}\right)^{N-1}\\ &\times \mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Используя (12), (14) и (30), нетрудно получить соотношения:

$$(N-1)\,\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leqslant C_{14}\gamma^{\tau},$$

$$\mathsf{E}(\xi_1^{(1)}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}))^2 < C_{15}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}))^{2-\tau}, \tag{35}$$

и, применяя неравенство Чебышева, видим, что

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma^{-1}N^{1/\tau} > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} < C_{16}\gamma^{\tau}. \tag{36}$$

Также из (12) и (15) следует равенство:

$$\left(\frac{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}}{1-\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}}\right)^{N-1} = 1+o(1),$$

поэтому из (34)–(36) получаем оценку (33) для $s = 1$. Повторяя эти рассуждения для $s = 2$, опять приходим к (33).

Из (31) следует, что вероятность $P_2^{(1)}$ можно представить в виде суммы:

$$P_2^{(1)} = R_1^{(1)} + R_2^{(1)} + R_3^{(1)} + R_4^{(1)}, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}R_i^{(1)} &= (1+o(1))\sum_{K_i^{(1)}} \mathsf{P}\{\xi_N^{(1)} = n-\zeta(\tau)-k\}\\ &\times \mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\},\\ K_1^{(1)} &= \{k : N-1 \leqslant k\\ &\leqslant -\gamma^{-1}N^{1/\tau}+\zeta(\tau)(N-1)\},\\ K_2^{(1)} &= \{k : -\gamma^{-1}N^{1/\tau}+\zeta(\tau)(N-1) < k\\ &\leqslant \gamma^{-1}N^{1/\tau}+\zeta(\tau)(N-1)\},\\ K_3^{(1)} &= \{k : \gamma^{-1}N^{1/\tau}+\zeta(\tau)(N-1) < k\\ &\leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/2}(n-\zeta(\tau)N)\},\\ K_4^{(1)} &= \{k : n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/2}(n-\zeta(\tau)N)\\ &< k \leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что область $K_1^{(1)}$ может быть пустой.

Вероятность $P_2^{(2)}$ представим в виде:

$$P_2^{(2)} = R_1^{(2)} + R_2^{(2)} + R_3^{(2)}, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}R_i^{(2)} &= (1+o(1))\sum_{K_i^{(2)}} \mathsf{P}\{\xi_N^{(2)} = n-\zeta(\tau)-k\}\\ &\times \mathsf{P}\{\zeta_{N-1}^{(2)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\},\\ K_1^{(2)} &= \{k : n-r \leqslant k \leqslant \gamma^{-1}N^{1/\tau}+\zeta(\tau)(N-1)\},\\ K_2^{(2)} &= K_3^{(1)}, K_3^{(2)} = K_4^{(1)}.\end{aligned}$$

Из (11) нетрудно получить, что при $k \in K_2^{(1)}$ для $\xi_N^{(1)}$ и $k \in K_1^{(2)}$ для $\xi_N^{(2)}$ выполнено соотношение:

$$\mathsf{P}\{\xi_N^{(s)} = n-\zeta(\tau)-k\} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)} \times(1+o(1)).$$

Отсюда с помощью (8), (32) и (33) получаем, что

$$\begin{aligned}R_2^{(1)} &= \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)),\\ R_1^{(2)} &= \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1))\int_z^{\infty} g(x)dx.\end{aligned} \tag{39}$$

Из (8) и (11) ясно, что при $k \in K_1^{(1)}$

$$\mathsf{P}\{\xi_N^{(1)} = n-\zeta(\tau)-k\} \leqslant C_{17}(n-\gamma^{-1}N^{1/\tau}-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}.$$

Учитывая соотношение $\gamma \to 0$, из (32) находим, что

$$R_1^{(1)} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \tag{40}$$

Пусть $k \in K_3^{(1)}$. Тогда из (8), (11) и (36) следует, что

$$R_3^{(1)} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \tag{41}$$

Рассмотрим $R_4^{(1)}$. Согласно (11),

$$R_4^{(1)} \leqslant C_{18}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)}$$

$$\times \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) \qquad (42)$$
$$> (n-\zeta(\tau)N)(1-\gamma^{1/2})\}.$$

Используя (2), (6) и (16), нетрудно получить, что

$$\mathbf{E}(\xi_1^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)))^2 < C_{19}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{2-\tau},$$

поэтому из неравенства Чебышева следует, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(1)}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > (n-\zeta(\tau)N)(1-\gamma^{1/2})\}$$
$$< C_{20}N\gamma^{1/2}(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau}.$$

Тогда из (8) и (42) получаем оценку:

$$R_4^{(1)} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}). \qquad (43)$$

Учитывая, что слагаемые $R_2^{(2)}$ и $R_3^{(2)}$ оцениваются аналогично $R_3^{(1)}$ и $R_4^{(1)}$ соответственно, из представлений (37), (38) и соотношений (39)–(41), (43) делаем вывод, что

$$P_2^{(1)} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)), \qquad (44)$$

$$P_2^{(2)} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1))\int_z^\infty g(x)dx. \qquad (45)$$

Оценим $P_3^{(1)}$. Заметим, что при $k < n - 2\zeta(\tau) - 2\gamma(n-\zeta(\tau)N)$

$$P_3^{(1)} = N(N-1)2^{-1}\sum_k \mathbf{P}\{\xi_1^{(1)} + ... + \xi_{N-2}^{(1)}$$
$$= k - \zeta(\tau)(N-2)\}$$
$$\times \mathbf{P}\{\xi_{N-1}^{(1)} + \xi_N^{(1)} = n - 2\zeta(\tau) - k,$$
$$\xi_{N-1}^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N),$$
$$\xi_N^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Отсюда следует, что

$$P_3^{(1)} \leqslant C_{21}N^2\sum_k \mathbf{P}\{\xi_1^{(1)} + ... + \xi_{N-2}^{(1)}$$
$$= k - \zeta(\tau)(N-2)\} \qquad (46)$$
$$\times\Big(\sum_K \mathbf{P}\{\xi_{N-1}^{(1)} = j - \zeta(\tau)\}$$
$$\times \mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} = n - k - \zeta(\tau) - j\}\Big),$$

где

$$K = \{j : \gamma(n-\zeta(\tau)N) + \zeta(\tau) < j$$
$$< n - k - \gamma(n-\zeta(\tau)N) + \zeta(\tau)\}.$$

Из (11) видим, что при $j > \gamma(n-\zeta(\tau)N) + \zeta(\tau)$

$$\mathbf{P}\{\xi_{N-1}^{(1)} = j - \zeta(\tau)\} \leqslant C_{22}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)},$$

поэтому из (12) находим, что

$$\sum_K \mathbf{P}\{\xi_{N-1}^{(1)} = j-\zeta(\tau)\}\,\mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} = n-k-\zeta(\tau)-j\}$$
$$\leqslant C_{23}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)}\,\mathbf{P}\{\xi_N^{(1)} > \gamma(n-\zeta(\tau)N)\}$$
$$\leqslant C_{24}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-2\tau-1}.$$

Тогда соотношение (46) выглядит следующим образом:

$$P_3^{(1)} \leqslant C_{25}N^2(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-2\tau-1}$$
$$\times \mathbf{P}\{\xi_1^{(1)} + ... + \xi_{N-2}^{(1)} < (n-\zeta(\tau)N)(1-2\gamma)\} \qquad (47)$$
$$\leqslant C_{26}N^2(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{-2\tau-1}$$
$$= o(N(n-\zeta(\tau)N)^{-(\tau+1)}).$$

Для того чтобы оценить вероятность $P_3^{(2)}$, достаточно повторить рассуждения, приведенные при доказательстве (47) и получить, что

$$P_3^{(2)} = o((N(n-\zeta(\tau)N))^{-(\tau+1)}). \qquad (48)$$

Утверждения леммы 2 теперь очевидным образом, следуют из (9), (28), (44), (45), (47) и (48). □

Предельное поведение $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$

Для исследования асимптотического поведения μ_r мы будем использовать второе утверждение леммы 1, поэтому нам потребуется рассмотреть сумму $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$.

Лемма 3. *Пусть $\tau \in (1,2)$, $N \to \infty$ так, что $(n-\zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$. Тогда равномерно относительно целых неотрицательных k и целых положительных r, для которых $u_r = (k-Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$$
$$= \tau N(n-\xi(\tau)N)^{-(\tau+1)}(1+o(1)).$$

Замечание 1. Из приведенного ниже доказательства понятно, что утверждение леммы 3 верно как при фиксированных r, так и при $r \to \infty$.

Доказательство леммы 3. Мы будем следовать идее доказательства леммы 2. Поскольку при $r \to \infty$ случайные величины $\tilde{\eta}_1^{(r)}, ..., \tilde{\eta}_N^{(r)}$ образуют схему серий, рассмотрим одновременно оба случая: r фиксировано и $r \to \infty$. Из (2), (3), (7) нетрудно получить, что

$$m_r = \mathbf{E}\,\tilde{\eta}_1^{(r)} = \frac{\zeta(\tau) - p_r}{1 - p_r}. \qquad (49)$$

Введем независимые случайные величины $\xi_j^{(r)} = \tilde{\eta}_j^{(r)} - m_r$, $j = 1, 2, ..., N$ и сумму $\Lambda_S^{(r)} = \xi_1^{(r)} + ... + \xi_S^{(r)}$. Покажем, что если $l, S \to \infty$ так, что $l/S^{1/\tau} \to \infty$, то равномерно относительно целых положительных r

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l\} = \frac{S\tau(1 + o(1))}{l^{\tau+1}(1 - p_r)}. \qquad (50)$$

Обозначим

$$\gamma = (S^{1-\tau}/l)^{1/3}, \qquad (51)$$

откуда ясно, что (8) является частным случаем (51). Искомую вероятность представим в виде суммы:

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l\} = P_1(l) + SP_2(l) + P_3(l), \qquad (52)$$

где $P_1(l) = \mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leqslant \gamma l,\ i = 1, ..., S\}$,

$$P_2(l) = \mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l, \xi_i^{(r)} \leqslant \gamma l,$$

$$i = 1, ..., S-1, \xi_S^{(r)} > \gamma l\},$$

$$P_3(l) = \mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l,\ \bigcup_{i \neq j} \{\xi_i^{(r)} > \gamma l, \xi_j^{(r)} > \gamma l\}.$$

Как и при доказательстве леммы 2, начнем с оценки $P_1(l)$. Для этого введем функцию

$$R(w) = \sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} \exp\{w(j - m_r)\}\,\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j - m_r\},$$

заметим при этом, что $\gamma l \to \infty$. Введем новые вспомогательные независимо распределенные случайные величины $\xi_i^{(r)}(\gamma)$, $i = 1, ..., S$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}(\gamma) = j - m_r\} = R^{-1}\left(\frac{1}{\gamma l}\right)\exp\left\{\frac{j - m_r}{\gamma l}\right\}$$

$$\times\,\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}(\gamma) = j - m_r\},$$

где $j \leqslant \gamma l + m_r$. Обозначим $\Lambda_S^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma) + ... + \xi_S^{(r)}(\gamma)$.
Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)}(\gamma) = l\} = R^{-S}(1/(\gamma l))e^{1/\gamma}$$

$$\times\,\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l, \xi_i^{(r)} \leqslant \gamma l,\ i = 1, ..., S\},$$

поэтому

$$P_1(l) = R^S(1/(\gamma l))e^{-1/\gamma}\,\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)} = l\}. \qquad (53)$$

Пусть $f_\gamma^{(r)}(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\xi_1^{(r)}(\gamma)$. Тогда

$$f_\gamma^{(r)}(t) = R(1/(\gamma l) + it)R^{-1}(1/(\gamma l)).$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\Lambda_S^{(r)}(\gamma) = l\} \leqslant \frac{1}{2\pi S^{1/\tau}} \int\limits_{-\pi S^{1/\tau}}^{\pi S^{1/\tau}} \left|f_\gamma^{(r)}\left(\frac{t}{S^{1/\tau}}\right)\right|^S dt.$$

Подставляя это неравенство в (53), получаем, что при $0 < \varepsilon < 1$

$$P_1(l) \leqslant \frac{1}{2\pi S^{1/\tau} e^{1/\gamma}}\Big(\int\limits_{|t| \leqslant \varepsilon S^{1/\tau}} \left|R\left(\frac{1}{\gamma l} + \frac{it}{S^{1/\tau}}\right)\right|^S dt$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon S^{1/\tau} < |t| \leqslant \pi S^{1/\tau}} \left|R\left(\frac{1}{\gamma l} + \frac{it}{S^{1/\tau}}\right)\right|^S dt\Big). \qquad (54)$$

Покажем, что интегралы в правой части (54) ограничены. Для этого докажем, что равномерно по r

$$|R(1/(\gamma l) + it)| \leqslant |\varphi_r(t)| + O((\gamma l)^{-\tau}), \qquad (55)$$

где

$$\varphi_r(t) = \mathbf{E}\,e^{it\tilde{\eta}_1^{(r)}} = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}, \qquad (56)$$

а $\varphi(t)$ как и раньше, означает характеристическую функцию случайной величины ξ_1. Разлагая $\exp\{(i - m_r)/(\gamma l)\}$ по формуле Тейлора, находим, что

$$|R(1/(\gamma l)) + it|$$

$$\leqslant \Big|\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} \exp\{(1/(\gamma l) + it)(j - m_r)\}\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}\Big|$$

$$\leqslant \Big|\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} e^{itj}\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}\Big| \qquad (57)$$

$$+(\gamma l)^{-1}\Big|\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} (j - m_r)\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}\Big|$$

$$+O((\gamma l)^{-2}\sum_{j \leqslant \gamma l + m_r} (j - m_r)^2\,\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_1^{(r)} = j\}).$$

Из (12)–(14) и (49) получаем, что

$$\Big|\sum_{j\leqslant\gamma l+m_r} e^{itj}\,\mathsf{P}\{\tilde\eta_1^{(r)}=j\}\Big|$$

$$\leqslant|\varphi_r(t)|+C_{28}(\gamma l)^{-\tau},$$

$$\Big|\sum_{j\leqslant\gamma l+m_r}(j-m_r)\,\mathsf{P}\{\tilde\eta_1^{(r)}=j\}\Big|\leqslant C_{29}(\gamma l)^{1-\tau},$$

$$\sum_{j\leqslant\gamma l+m_r}(j-m_r)^2\,\mathsf{P}\{\tilde\eta_1^{(r)}=j\}\leqslant C_{30}(\gamma l)^{2-\tau},$$

поэтому из (57) следует (55).

Пусть $\delta\in(0,1)$. В силу того, что для любого фиксированного r найдется $\varepsilon_r>0$ такое, что $|\varphi_r(t)|>\delta$ при $|t|\leqslant\varepsilon_r$, а из (2) и (56) следует, что $\varphi_r(t)\to\varphi(t)$ при $r\to\infty$, находим, что существует такое $\varepsilon>0$, что $|\varphi_r(t)|>\delta$ при $|t|\leqslant\varepsilon$. Учитывая, что $(\gamma l)^{-\tau}S\to0$, из (55) получаем, что

$$|R(1/(\gamma l)+it)|^S\leqslant C_{31}|\varphi_r(t)|^S.$$

Это неравенство означает, что первый интеграл в (54) ограничен. Аналогично получаем, что при $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|R(1/(\gamma l)+it)|\leqslant C_{32}<1,$$

поэтому и второй интеграл ограничен. Отсюда вытекает оценка:

$$P_1(l)\leqslant C_{33}S^{-1/\tau}e^{-1/\gamma}=o(S/\gamma^{\tau+1}). \qquad (58)$$

Найдем асимптотику $P_2(l)$. Ясно, что

$$P_2(l)=\sum_{h>\gamma l+m_r}\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1}^{(r)}=l-h+m_r, \qquad (59)$$

$$\xi_j^{(r)}\leqslant\gamma l, j=1,...,S-1\}.$$

Обозначим $\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=\xi_{1,\gamma l}^{(r)}+...+\xi_{S-1,\gamma l}^{(r)}$, где входящие в сумму случайные величины независимы, одинаково распределены и

$$\mathsf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k-m_r|\xi_1\neq r,\ \xi_1\leqslant\gamma l\}.$$

Тогда, в силу соотношения $(\gamma l)^{-\tau}S\to0$, равномерно по h и r

$$\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1}^{(r)}=l-h+m_r,\ \xi_j^{(r)}\leqslant\gamma l,\ j=1,...,S-1\}$$

$$=(1-(1-p_r)^{-1}\sum_{h>\gamma l+m_r}\mathsf{P}\{\xi_1=h-m_r\})^{S-1}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=l-h+m_r\}$$

$$=\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1}^{(r)}=l-h+m_r\}(1+o(1)),$$

поэтому из (59) следует, что равномерно по r

$$P_2(l)=\sum_{h>\gamma l+m_r}\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=l-h+m_r\}(1+o(1)).$$

Представим эту сумму в следующем виде:

$$P_2(l)=R_1(l)+R_2(l)+R_3(l)+R_4(l), \qquad (60)$$

где

$$R_i(l)=\sum_{H_i}\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}$$

$$\times\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}=l-h+m_r\}(1+o(1)),$$

$H_1=\{h:\ \ \gamma l+m_r<h<l\gamma^{1/2}\}$,
$H_2=\{h:\ \ l\gamma^{1/2}\leqslant h<l-\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$,
$H_3=\{h:\ \ l-\gamma^{-1}S^{1/\tau}\leqslant h\leqslant l+\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$,
$H_4=\{h:h>l+\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$.

Мы рассмотрим сначала слагаемое $R_3(l)$, поскольку оно дает главный вклад в сумму (60). Из (11) и соотношения $S^{1/\tau}/\gamma l\to0$ получаем, что в H_3 равномерно по h

$$\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}=p_h/(1-p_r)$$

$$=\tau(1+o(1))/(h^{1+\tau}(1-p_r))$$

и эта вероятность равна нулю при $h=r$. Отсюда:

$$R_3(l)=\frac{\tau(1+o(1))}{h^{\tau+1}(1-p_r)} \qquad (61)$$

$$\times(1-\mathsf{P}\{|\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}-m_r|>\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}).$$

Аналогично доказательству неравенства (33), легко вывести, что

$$\mathsf{P}\{|\Lambda_{S-1}^{(r)}-m_r|>\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}\leqslant C_{34}\gamma^\tau, \qquad (62)$$

поэтому из (51) и (61) находим, что

$$R_3(l)=\frac{\tau(1+o(1))}{l^{\tau+1}(1-p_r)}. \qquad (63)$$

Оценим $R_4(l)$. Из (11) следует, что $\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)}=h-m_r\}\leqslant C_{35}l^{-(\tau+1)}$, поэтому, учитывая (51) и (62), видим, что

$$R_4(l)\leqslant C_{36}l^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)}-m_r<-\gamma^{-1}S^{1/\tau}\}$$

$$\leqslant C_{37}l^{-(\tau+1)}\gamma^\tau=o(l^{-(\tau+1)}). \qquad (64)$$

Аналогично получаем оценку для $R_2(l)$:

$$\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} = h - m_r\} \leqslant C_{38}(l\gamma^{1/2})^{-(\tau+1)},$$

поэтому

$$R_2(l) \leqslant C_{39}(l\gamma^{1/2})^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)} - m_r > \gamma^{-1}S^{1/\tau}\} \leqslant C_{40}l^{-(\tau+1)}\gamma^{(\tau+1)/2} = o(l^{-(\tau+1)}). \quad (65)$$

Оценим $R_1(l)$. Здесь $\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} = h - m_r\} \leqslant C_{41}(l\gamma)^{-(\tau+1)}$ и, следовательно,

$$R_1(l) \leqslant C_{42}(l\gamma)^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2} + m_r\}.$$

Из (14), (51) и неравенства Чебышева находим, что

$$\mathsf{P}\{\Lambda_{S-1,\gamma l} > l - l\gamma^{1/2} + m_r\} \leqslant C_{43}S(l\gamma)^{2-\tau}/l^2 = C_{43}\gamma^{3\tau},$$

поэтому

$$R_1(l) \leqslant C_{44}l^{-(\tau+1)}\gamma^{2\tau-1} = o(l^{-(\tau+1)}). \quad (66)$$

Из соотношений (60), (63)–(66) заключаем, что равномерно по r

$$P_2(l) = \frac{\tau(1+o(1))}{l^{\tau+1}(1-p_r)}. \quad (67)$$

Осталось оценить $P_3(l)$. Легко видеть, что

$$P_3(l) < S^2 \sum_{h>2(\gamma l+m_r)} \mathsf{P}\{\Lambda_{S-2}^{(r)} = l - h + 2m_r\} \times \mathsf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = h - 2m_r,\ \xi_{S-1}^{(r)}, \xi_S^{(r)} > \gamma l\}.$$

Из (11) следует неравенство $\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} > \gamma l\} \leqslant C_{45}(\gamma l)^{-\tau}$, поэтому при $\gamma l + m_r < j < h - \gamma l - m_r$

$$\mathsf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = h - m_r,\ \xi_{S-1}^{(r)}, \xi_S^{(r)} > \gamma l\} = \sum_j \mathsf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} = j - m_r\}\,\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} = h - j\} \leqslant C_{46}(\gamma l)^{-(\tau+1)}\,\mathsf{P}\{\xi_S^{(r)} > \gamma l\} < C_{47}(\gamma l)^{-(2\tau+1)}.$$

Отсюда и из (68) получаем, что

$$P_3(l) \leqslant C_{47}(\gamma l)^{-(2\tau+1)}S^2\,\mathsf{P}\{\Lambda_{S-2}^{(r)} < l - 2\gamma l\} \leqslant C_{48}S\gamma^{\tau-1}/l^{\tau+1} = o(S/l^{\tau+1}).$$

Таким образом, из (52), (58) и (67) следует (50), а утверждение леммы 3 легко вытекает из (50), если положить $S = N - k$ и учесть вид u_r.

Доказательства теорем

Используя (11), (12), (15) и полагая $r = n - \zeta(\tau)N - zN^{1/\tau}$, находим, что $(1-P_r)^N \to 1$. Отсюда, из первого утверждения леммы 1 и из леммы 2 очевидным образом приходим к утверждению теоремы 1.

Чтобы получить теорему 2, достаточно применить второе утверждение леммы 1, первую часть леммы 2, лемму 3 и нормальное приближение биномиальной вероятности.

Из этих же лемм следует и теорема 3, если использовать пуассоновское приближение биномиальной вероятности.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

2. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения при нарушении условия Крамера // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1969. № 6. С. 17–22.

3. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.

4. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, № 3. С. 20–33.

5. *Павлов Ю. Л.* О типичной структуре конфигурационного Интернет-графа с известным числом числом связей // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. 2011. № 5. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 2. С. 86–96.

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.

7. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011. 136 с.

8. *Cheplyukova I., Pavlov Yu.* Limit distributions of vertex degree in condihional power-law random

graphs. Transactions of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stohastic Models. Ort Braude Colledge, Karniel, Israel, 2007. P. 52–59.

9. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. N. Y.: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

10. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262.

11. *Hofstad R.* Random Graph and Complex Networks. Eindhoven University of Thechnology. 2011. 363 p.

12. *Pavlov Yu.* On the typical structure of the conditional scale-free random graphs // European researder. 2011. N 5. P. 511–513.

13. *Reittu H., Norros I.* On the power-low random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 1. P. 3–23.

14. *Wood D. C.* Technical report 15–92 // Canterbury: University of Kent, 1992. 19 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 761218

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 761218