

УДК 519.833.2

ББК 22.18

# ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ С АСИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ\*

АННА Н. РЕТТИЕВА

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул.Пушкинская, 11

e-mail: annaret@krc.karelia.ru

Исследована теоретико-игровая модель экологического менеджмента в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на бесконечном промежутке времени. Целью работы является определение общего кооперативного выигрыша при наличии различных коэффициентов дисконтирования у игроков. Предложено использование арбитражного решения Нэша для построения общего коэффициента дисконтирования и выигрышей игроков.

*Ключевые слова:* задача управления биоресурсами, асимметричные игроки, арбитражное решение Нэша.

## 1. Введение

В статье исследована теоретико-игровая модель эксплуатации ресурсов в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на бесконечном промежутке времени. В предыдущих работах авторов [1,2,5,6] были исследованы модели с двумя или многими игроками, но при

этом, при кооперативном поведении предполагалось задание одинакового коэффициента дисконтирования. В данной работе игроки используют различные коэффициенты дисконтирования, что можно интерпретировать как их различные предпочтения во времени.

Основной проблемой в данной ситуации является то, что нет возможности определить выигрыши игроков при кооперативном поведении стандартными способами. В работе [3] было предложено построение кооперативного выигрыша как суммы индивидуальных, но данный подход является нетрадиционным для кооперативной теории игр, где при кооперации определяется общий выигрыш всех участников, а потом используются схемы его распределения. Поэтому в данной статье для построения кооперативного выигрыша и общего коэффициента дисконтирования предложено использование арбитражной схемы Нэша. Определены условия существования общего коэффициента дисконтирования в случае, когда кооперативный выигрыш распределяется пропорционально между игроками. В случае, когда кооперативный выигрыш распределяется в пропорции  $\gamma : (1 - \gamma)$ , необходимо определение двух параметров: доли выигрыша и общего коэффициента дисконтирования. Найдены условия существования таких параметров, а для выбора конкретных из них предложено использование арбитражной схемы Нэша.

## 2. Модель и равновесия

Пусть два игрока (страны или рыболовецкие артели) эксплуатируют рыбный ресурс на протяжении бесконечного горизонта планирования. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^\alpha, \quad x_0 = x, \quad (2.1)$$

где  $x_t \geq 0$  – размер популяции в момент  $t$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  – коэффициент смертности,  $\alpha \in (0, 1)$  – коэффициент рождаемости,  $u_{it} \geq 0$  – вылов игрока  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

Предполагаем логарифмический вид функции выигрышей игроков и наличие различных коэффициентов дисконтирования. Общий доход игроков на бесконечном промежутке имеет вид

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_i^t \ln(u_{it}), \quad (2.2)$$

где  $0 < \delta_i < 1$  – коэффициент дисконтирования игрока  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

Определим равновесие по Нэшу и кооперативное равновесие, используя метод динамического программирования (см. [2,6]).

**Теорема 2.1.** *Равновесие по Нэшу в задаче (2.1), (2.2) имеет вид*

$$u_1^N = \frac{a_2(1 - a_1)}{a_1 + a_2 - a_1a_2} \varepsilon x, \quad u_2^N = \frac{a_1(1 - a_2)}{a_1 + a_2 - a_1a_2} \varepsilon x,$$

где  $a_i = \alpha \delta_i$ ,  $i = 1, 2$ . *А индивидуальные выигрыши –*

$$V_i(x, \delta_i) = A_i \ln x + B_i = \frac{1}{1 - a_i} \ln x + B_i, \quad (2.3)$$

где

$$B_i = \frac{1}{1 - \delta_i} \left[ \frac{1}{1 - a_i} \ln \left( \frac{\varepsilon a_j}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \right) + \ln(1 - a_i) + \frac{a_i}{1 - a_i} \ln(a_i) \right], \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

При кооперации целью игроков является максимизация суммы их выигрышей:

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[ \ln(u_{1t}) + \ln(u_{2t}) \right], \quad (2.4)$$

где  $\delta$  – неизвестный общий коэффициент дисконтирования.

**Теорема 2.2.** *Кооперативные стратегии в задаче (2.1), (2.4) имеют вид*

$$u_1^c = u_2^c = \frac{1 - \alpha \delta}{2} \varepsilon x.$$

*А общий кооперативный выигрыш –*

$$V(x, \delta) = A \ln x + B = \frac{2}{1 - \alpha \delta} \ln x + B, \quad (2.5)$$

где

$$B = \frac{2}{1 - \delta} \left[ \frac{1}{1 - \alpha \delta} \ln(\varepsilon) + \ln(1 - \alpha \delta) + \frac{\alpha \delta}{1 - \alpha \delta} \ln(\alpha \delta) - \ln(2) \right].$$

### 3. Общий коэффициент дисконтирования и кооперативные выигрыши

Основной задачей в случае кооперации является построение общего выигрыша при наличии различных коэффициентов дисконтирования. Один из способов был предложен в [3], где функция общего выигрыша строилась как сумма индивидуальных выигрышей кооперирующихся игроков. В данной статье для построения кооперативного выигрыша определяется общий коэффициент дисконтирования с использованием арбитражного решения Нэша.

В разделе 3.1. показано, что в случае пропорционального распределения кооперативного выигрыша общий коэффициент дисконтирования существует, и найдены условия его существования.

В разделе 3.2. предполагается, что кооперативный выигрыш распределяется в пропорции  $\gamma V(x, \delta) : (1 - \gamma)V(x, \delta)$ , где  $\gamma$  – неизвестный параметр. Найдены ограничения на  $\delta$  и  $\gamma$  для выполнения условий рациональности.

В результате получено допустимое множество параметров  $\delta$  и  $\gamma$ . Для определения решения предложено использовать арбитражную схему Нэша. Найдены условия существования аналитического решения, в остальных случаях решение может быть получено численно.

#### 3.1. Пропорциональное разделение

Предположим, что кооперативный выигрыш распределяется между игроками пропорционально их коэффициентам дисконтирования. Найдём условия, которым должен удовлетворять общий коэффициент дисконтирования  $\delta$ , чтобы кооперативное поведение было рациональным, т.е.

$$\frac{\delta_i}{\delta_1 + \delta_2} V(x, \delta) \geq V_i(x, \delta_i), \quad i = 1, 2.$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\delta_2 > \delta_1$ . Если  $\delta_1 V_2(x, \delta_2) - \delta_2 V_1(x, \delta_1) < 0$ , то общий коэффициент дисконтирования удовлетворяет неравенству

$$\delta < \delta_1,$$

иначе

$$\delta < \delta_2,$$

где

$$usl_i = \frac{K_i + (1 + \alpha)M_i}{2\alpha M_i} + \frac{\sqrt{(K_i + (1 + \alpha)M_i)^2 + 8a_i(1 - a_i)M_i(\ln(\varepsilon) - 1 - (1 - \alpha)\ln(2))}}{2\alpha M_i},$$

$$M_i = (\delta_1 + \delta_2)(\ln(x) + B_i(1 - a_i)), K_i = 2\delta_i(1 - a_i)(\alpha \ln(2) - \ln(x)).$$

*Доказательство.* Рассмотрим первое неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}V(x, \delta) - V_1(x, \delta_i) &= \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}A - A_1\right)\ln(x) + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}B - B_1 > \\ &\quad \left(\frac{2\delta_1}{(\delta_1 + \delta_2)(1 - \alpha\delta)} - \frac{1}{1 - a_1}\right)\ln(x) + \\ &\quad + \frac{2\delta_1}{(\delta_1 + \delta_2)(1 - \delta)}\left(\frac{1}{1 - \alpha\delta}(\ln(\varepsilon) - 1) - \ln(2)\right) - B_1 = \\ &= \frac{P}{(\delta_1 + \delta_2)(1 - a_1)(1 - \delta)(1 - \alpha\delta)}, \end{aligned}$$

где  $P$  – выпуклая парабола с вершиной

$$\frac{2\delta_1(1 - a_1)(\alpha \ln(2) - \ln(x)) + (1 + \alpha)M_1}{2\alpha M_1}.$$

Поскольку  $M_1$  отрицательно и  $K_1 = 2\delta_1(1 - a_1)(\alpha \ln(2) - \ln(x)) + (1 + \alpha)M_1 > 0$ , то вершина отрицательна, и имеем два корня: один из них больше чем 1, а другой имеет вид  $-usl_1$ . Поэтому для выполнения первого условия должно быть выполнено

$$\delta < usl_1.$$

Аналогично из второго условия рациональности получим, что должно быть выполнено  $\delta < usl_2$ .

Исследуем, какое из условий достаточно для выполнения, если  $\delta_2 > \delta_1$ .

Во-первых, заметим, что

$$\frac{\partial B_1}{\partial \delta_2} > 0, \quad \frac{\partial B_2}{\partial \delta_2} < 0.$$

Поэтому функция  $B_1 - B_2$  возрастает по  $\delta_2$  и  $B_1 = B_2 = 0$ , если  $\delta_2 = \delta_1$ , следовательно  $B_1 > B_2$ .

Несложно показать, что  $M_1 > M_2$  и  $K_1 < K_2$ .

Рассмотрим разницу

$$usl_1 - usl_2 = \frac{1}{2\alpha} \frac{K_1 M_2 - M_1 K_2 + M_2 \sqrt{D_1} - M_1 \sqrt{D_2}}{M_1 M_2},$$

где  $D_i = (K_i + (1 + \alpha)M_i)^2 + 8a_i(1 - a_i)M_i(\ln(\varepsilon) - 1 - (1 - \alpha)\ln(2))$ .

$$K_1 M_2 - M_1 K_2 = 2(\alpha \ln(2) - \ln(x))(\delta_1(1 - a_1)M_2 - \delta_2(1 - a_2)M_1) < 0,$$

если

$$\delta_1(1 - a_1)M_2 - \delta_2(1 - a_2)M_1 < 0. \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & M_2 \sqrt{D_1} - M_1 \sqrt{D_2} = \\ = & \frac{\delta_1(1 - a_1)M_2 - \delta_2(1 - a_2)M_1}{M_2 \sqrt{D_1} + M_1 \sqrt{D_2}} (2(\alpha \ln(2) - \ln(x))(K_1 M_2 + K_2 M_1) + \\ & + 4M_1 M_2(-3\alpha(1 - \alpha)\ln(2) + 4\alpha(\ln(\varepsilon) - 1) - (1 - \alpha)\ln(x))) < 0 \end{aligned}$$

поскольку выполняется (3.1) и  $K_1 M_2 + K_2 M_1 = K_1 M_2 - K_2 M_1 + 2M_1 K_2 < 0$ .

Следовательно

$$usl_1 < usl_2,$$

а (3.1) эквивалентно следующему неравенству

$$\delta_1 V_2(x, \delta_2) - \delta_2 V_1(x, \delta_1) < 0. \quad \square$$

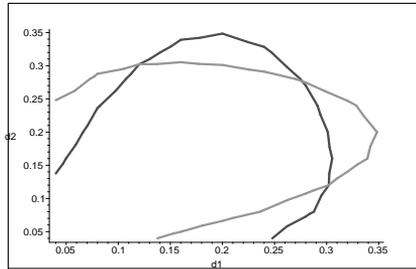


Рис. 1: Условия на  $\delta$ : темная линия —  $usl_1$ , светлая линия —  $usl_2$

На рис. 1 изображены области выполнения условий рациональности. При моделировании были использованы следующие параметры:  $\alpha = 0.8$ ,  $\varepsilon = 0.95$ ,  $x_0 = 0.8$ . Область, ограниченная сверху кривой темного цвета, соответствует случаю выполнения  $usl_1$ , а область, ограниченная справа светлой кривой –  $usl_2$ . Заметим, что, когда  $\delta_1$  и  $\delta_2$  малы и близки по значению оба условия выполняются.

### 3.2. Арбитражное решение

Предположим, что кооперативный выигрыш распределяется в пропорции  $\gamma V(x, \delta) : (1 - \gamma)V(x, \delta)$ , где  $\gamma$  – неизвестный параметр. Найдем условия на  $\delta$  и  $\gamma$  для рациональности кооперации

$$\gamma V(x, \delta) \geq V_1(x, \delta_1), \quad (1 - \gamma)V(x, \delta) \geq V_2(x, \delta_2). \quad (3.2)$$

Из (3.2) выпишем условия на  $\gamma$ :

$$\frac{V(x, \delta) - V_2(x, \delta_2)}{V(x, \delta)} \leq \gamma \leq \frac{V_1(x, \delta_1)}{V(x, \delta)}.$$

Обозначим  $r_1 = \frac{V_1(x, \delta_1)}{V(x, \delta)}$  и  $r_2 = \frac{V(x, \delta) - V_2(x, \delta_2)}{V(x, \delta)}$ .

Поскольку  $\frac{\partial V(x, \delta)}{\partial \delta} < 0$  функция  $r_1$  возрастает по  $\delta$ , а  $r_2$  убывает по  $\delta$ . Следовательно, получим условия в виде

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} r_2 \leq \gamma \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} r_1,$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} r_1 = \frac{V_1(x, \delta_1)}{2 \ln(\varepsilon x / 2)}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} r_2 = 1 - \frac{V_2(x, \delta_2)}{2 \ln(\varepsilon x / 2)}.$$

Поэтому решение существует, если

$$2 - V_2(x, \delta_2) / \ln(\frac{\varepsilon x}{2}) < 2\gamma < V_1(x, \delta_1) / \ln(\frac{\varepsilon x}{2}). \quad (3.3)$$

А условия существования  $\delta$  (см. раздел 3.1) принимают вид

$$\delta < \min \left\{ \frac{\gamma K_i + (1 + \alpha) M_i}{2\alpha M_i} + \frac{\sqrt{(\gamma K_i + (1 + \alpha) M_i)^2 + 8\alpha\gamma(1 - a_1) M_i (\ln \varepsilon - 1 - \ln 2(1 - \alpha))}}{2\alpha M_i}, i = 1, 2 \right\}.$$

Мы получили множество допустимых параметров  $\delta$  и  $\gamma$ . Для построения решения предлагается использовать арбитражную схему Нэша

$$g = (\gamma V(x, \delta) - V_1(x, \delta_1))((1 - \gamma)V(x, \delta) - V_2(x, \delta_2)) \rightarrow \max_{\delta, \gamma} .$$

Исследуем функцию  $g$ :

$$\frac{\partial g}{\partial \delta} = \frac{\partial V(x, \delta)}{\partial \delta} ((1 - \gamma)(\gamma V(x, \delta) - V_1(x, \delta_1)) + \gamma((1 - \gamma)V(x, \delta) - V_2(x, \delta_2))) < 0$$

поскольку  $\frac{\partial V(x, \delta)}{\partial \delta} < 0$  и условия (3.2) должны выполняться.

Следовательно  $g$  убывает по  $\delta$  и максимум достигается при  $\delta \rightarrow 0$ . Максимум по  $\gamma$  существует, т.к.  $\frac{\partial^2 g}{\partial \gamma^2} = -2V(x, \delta)^2 < 0$ .

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g = (2\gamma \ln(\frac{\varepsilon x}{2}) - V_1(x, \delta_1))(2(1 - \gamma) \ln(\frac{\varepsilon x}{2}) - V_2(x, \delta_2)) ,$$

откуда

$$\gamma^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(V_1(x, \delta_1) - V_2(x, \delta_2)) / \ln(\frac{\varepsilon x}{2}) . \quad (3.4)$$

Для данного аналитического решения

$$\delta = 0, \quad \gamma = \gamma^*$$

условия (3.3) и  $0 < \gamma < 1$  должны выполняться, что эквивалентно

$$\begin{aligned} V_1(x, \delta_1) + V_2(x, \delta_2) &< 2 \ln(\frac{\varepsilon x}{2}) , \\ 2 \ln(\frac{\varepsilon x}{2}) &< V_1(x, \delta_1) - V_2(x, \delta_2) < 2 \ln(\frac{2}{\varepsilon x}) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

В остальных случаях решение может быть найдено численно.

В качестве первого примера рассмотрим следующие параметры:  $\delta_1 = 0.1$ ,  $\delta_2 = 0.2$ . Легко проверить, что условия (3.5) выполняются и (3.3) принимает вид  $0.070 < \gamma < 0.494$ . Следовательно существует аналитическое решение:  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 0.183$ . Также можно найти его и численно как показано на рис. 2, где был получен следующий результат:  $\delta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.2$ . Выигрыши игроков принимают вид:  $V_1^c = -0.390$ ,  $V_2^c = -1.560$ .

Теперь рассмотрим случай с большими коэффициентами дисконтирования:  $\delta_1 = 0.8$  и  $\delta_2 = 0.9$ . Получим, что условия (3.5) не выполняются и будем искать решение численно. Как показано на рис. 3 мы

получили  $\delta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.1$  и кооперативные выигрыши  $V_1^c = -0.195$ ,  $V_2^c = -1.755$ .

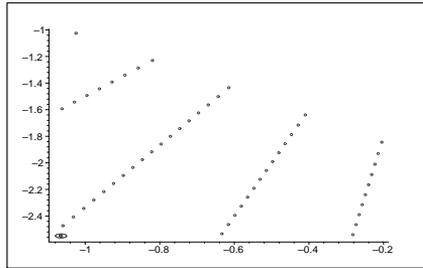


Рис. 2: Переговорное множество при  $\delta_1 = 0.1$ ,  $\delta_2 = 0.2$

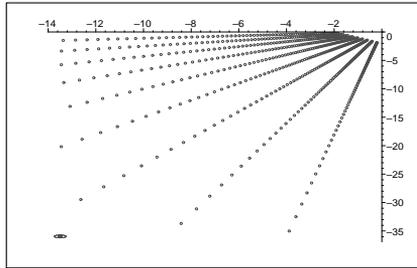


Рис. 3: Переговорное множество при  $\delta_1 = 0.8$ ,  $\delta_2 = 0.9$

#### 4. Заключение

В статье исследована модель эксплуатации биоресурсов с асимметричными игроками, которые используют различные коэффициенты дисконтирования. Для определения кооперативного поведения предложено построение общего коэффициента дисконтирования. Рассмотрены два случая разделения кооперативного выигрыша: пропорционально коэффициентам дисконтирования и в некоторой неизвестной пропорции. В первом случае найдены условия существования общего коэффициента дисконтирования, а во втором – предложено использование арбитражного решения Нэша для определения неизвестных параметров.

Дальнейшим развитием данной работы является построение кооперативных стратегий без использования общего коэффициента дисконтирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами* // Доклады АН. 2010. Т. 432. Вып. 3. С. 308–311.
2. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Дискретная задача разделения биоресурсов* // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 259-270
3. Breton M., Keoula M.Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Cahiers du GERAD G-2010-73, December 2010.
4. Levhari D., Mirman L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // The Bell J. of Economics 1980. V. 11(1). P. 322–334.
5. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars and cooperation maintenance* // Ecological Modelling. 2010. V. 221. P. 1545–1553.
6. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars with many players* // International Game Theory Review. 2010. V. 12. N 4. P. 385–405.

DISCRETE-TIME BIORESOURCE MANAGEMENT  
PROBLEM WITH ASYMMETRIC PLAYERS

**Anna N. Rettieva**, Institute of Applied Mathematical Research  
Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc.  
(annaret@krc.karelia.ru).

*Abstract:* Discrete-time game-theoretic model related to a bioresource management problem (fish catching) is investigated. The players (countries or fishing firms) which harvest the fish stock are the participants of the game. Players differ in their time preferences and use different discount factors. The main question arising here is how to construct value function for cooperative solution in this case. The Nash bargaining procedure is proposed to use for determining the joint discount factor and players' payoffs.

*Keywords:* bioresource management problem, asymmetric players, Nash bargaining solution.