

УДК 519.711.7

ББК 22.1

ЦЕНА АНАРХИИ В ИГРЕ БАЛАНСА ЗАГРУЗКИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Юлия В. Чиркова*

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул.Пушкинская, 11

e-mail: julia@krc.karelia.ru

В работе исследуется игра баланса загрузки системы обслуживания с N машинами, где n игроков распределяют свои задачи различного объема между машинами, различающимися скоростями обслуживания. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи на выбранной им машине. Затратами системы является максимальное время работы среди всех машин. Для данной модели получена оценка верхней границы цены анархии. Найдены условия, при которых она является точной оценкой цены анархии. Найдены условия возникновения парадокса Браесса в системе. Рассмотрена модель с тремя машинами, для которой реализован алгоритм для вычисления точного значения цены анархии и проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением.

Ключевые слова: система обслуживания, баланс загрузки, равновесие по Нэшу, цена анархии.

©2012 Ю.В. Чиркова

* Работа частично поддержана программой фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» и грантом РФФИ № 13-01-91158-ГФЕН_а.

1. Модель системы N машин

Рассматривается система $S = S(N, s)$ из N обслуживающих машин со скоростями s_i , $i = 1, \dots, N$. Система используется множеством игроков $U = U(n, w)$, в котором n игроков, а каждый игрок j имеет задачу объема w_j , $j = 1, \dots, n$. Общий объем задач равен $W = \sum_j w_j$. Здесь и далее будем считать, что если в обозначении $\sum$, $\max$, $\min$ не указаны пределы для индексов, то перебираются все возможные значения индексов. Например, $\sum_i$ обозначает суммирование

по всем машинам $\sum_{i=1}^N$, $\min_{j:l_j=i}$ обозначает $\min_{j=1, \dots, n: l_j=i}$. Время выполнения задачи объема w на свободной машине i со скоростью s_i равно w/s_i .

Игра $\Gamma = \langle S(N, s), U(n, w), \lambda \rangle$ рассматривается в чистых стратегиях, каждый игрок может выбирать любую машину. Стратегией игрока j является номер машины l_j , которую он выбрал для обслуживания своей задачи. Соответственно, $L = (l_1, \dots, l_n)$ обозначается профиль стратегий игроков в игре Γ . Суммарный объем задач $\delta_i(L) = \sum_{j:l_j=i} w_j$, владельцы которых выбрали машину i , называется загрузкой машины i .

Все задачи поступают на обслуживание одновременно. Результат выполнения задачи машина, на которой она обслуживается, выдает по окончании выполнения всей своей работы. То есть время обслуживания или задержку задачи на машине i определяет функция

$$\lambda_i(L) = \sum_{j:l_j=i} w_j/s_i = \frac{\delta_i(L)}{s_i},$$

которая принимает одинаковое значение для всех задач, выполняющихся на данной машине.

Затратами системы на обслуживание является время

$$SC(L) = \max_i \lambda_i(L),$$

потраченное на выполнение всей работы, от момента поступления задач до завершения выполнения последней задачи последней машиной. Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L - \text{профиль в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

оптимальное значение затрат системы, где минимальное значение находится по всем допустимым профилям в игре $\Gamma(S, U, \lambda)$. Это значение может быть гарантированно достигнуто при централизованном управлении системой. В данной же модели каждый игрок действует эгоистично в собственных интересах, выбирая машину для выполнения своей задачи так, чтобы минимизировать ее задержку. В таком случае игроками достигается ситуация равновесия.

Профиль стратегий игроков L , в котором ни один из игроков не имеет возможности единолично переместить свою задачу с выбранной им машины на другую, уменьшив при этом ее задержку, называется равновесием по Нэшу. Для того, чтобы дать формальное определение равновесия, введем следующее обозначение. Для профиля стратегий L обозначим $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$ профиль, где игрок j переместил свою задачу с машины l_j на машину i , а остальные игроки при этом не изменили свои стратегии.

Определение 1.1. Профиль стратегий L называется равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждый игрок выбрал машину с минимальной задержкой, то есть для любого игрока j $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$ для любой машины i .

Числовым критерием, показывающим, насколько ухудшаются временные характеристики производительности системы в случае отказа от централизованного управления, является цена анархии.

Определение 1.2. Наихудшим равновесием в игре будем называть такой равновесный по Нэшу профиль, затраты системы в котором максимальные среди всех равновесий по Нэшу в данной игре.

Определение 1.3. Ценой анархии системы называется максимальное отношение значения затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к оптимальному значению затрат:

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}{OPT(S, U)}.$$

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии для системы S достаточно рассмотреть только те множества игроков, игры с которыми имеют оптимальные затраты, равные 1.

Теорема 1.1. *Цена анархии для системы машин S равна*

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U_1, \lambda) \max SC(L).$$

Доказательство. Пусть L – наихудшее равновесие в игре $\Gamma(S, U, \lambda)$ с произвольным множеством игроков $U(n, w)$, где объем задачи каждого игрока j равен w_j , а L_{OPT} – оптимальный профиль в этой игре. Значение затрат системы в L равно SC , и затраты системы в оптимальном профиле равны OPT . Отношение затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным равно $\frac{SC}{OPT}$. Так как L – равновесие, то для любого игрока j $\frac{\sum_{k:l_k=l_j} w_k}{s_{l_j}} \leq \frac{\sum_{k:l_k=i} w_k + w_j}{s_i}$ для любой машины i .

Рассмотрим теперь игру с тем же набором машин и игроков, но где у каждого игрока j объем задачи равен $\frac{w_j}{OPT}$. Значение затрат системы в L равно $\frac{SC}{OPT}$, и затраты системы в L_{OPT} равны 1. Благодаря свойству линейной однородности задержек на машинах относительно их загрузок профили L и L_{OPT} являются, соответственно, наихудшим равновесием и оптимальным профилем в новой игре. В частности, L является равновесием в новой игре, так как для любого игрока j $\frac{\sum_{k:l_k=l_j} w_k}{s_{l_j} OPT} \leq \frac{\sum_{k:l_k=i} w_k + w_j}{s_i OPT}$ для любой машины i . Пусть L – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие L' с затратами системы $\frac{SC'}{OPT}$, такое что затраты системы в L' больше затрат системы в L , то есть $\frac{SC'}{OPT} > \frac{SC}{OPT}$. Но тогда в исходной игре профилю L' соответствуют затраты системы $SC' > SC$, и равновесие L' хуже равновесия L . Аналогично, L_{OPT} является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным в новой игре также равно $\frac{SC}{OPT}$.

Следовательно, любой игре $\Gamma(S, U, \lambda)$ соответствует игра $\Gamma(S, U_1, \lambda)$ с объемами задач, нормированными таким образом, что $OPT(S, U_1) = 1$. При этом отношения затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальные затраты равны 1. $\square$

2. Оценка цены анархии

В работах [1–3] получены следующие оценки для цены анархии:

- $PoA(S) = O(\frac{\log N}{\log \log N})$ для N одинаковых машин [3];
- $PoA(S) = \frac{\sqrt{4N-3}+1}{2}$ для $N = 2, 3$ одинаковых машин [1];
- для двух машин с различными скоростями 1 и s , $1 \leq s$ [2]

$$PoA(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2}, & \text{если } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ s, & \text{если } \sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{если } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq s. \end{cases} \quad (2.1)$$

В общем случае для затрат системы справедливы следующие очевидные оценки:

- Равновесное значение затрат системы не может быть больше, чем в ситуации, когда все задачи направляются на самую быструю машину:

$$SC(L) \leq \frac{W}{\max_i s_i}.$$

- Оптимальное значение затрат системы не может быть меньше, чем в ситуации, когда все задачи были бы разделяемыми и машины были бы нагружены ими пропорционально своим скоростям:

$$OPT \geq \frac{W}{\sum_i s_i}. \quad (2.2)$$

- Оптимальное значение затрат системы не может быть меньше, чем время выполнения самой объемной задачи на самой быстрой машине:

$$OPT \geq \frac{\max_j w_j}{\max_i s_i}. \quad (2.3)$$

Из первых двух пунктов непосредственно следует верхняя оценка для цены анархии:

$$PoA(S) \leq \frac{\sum_i s_i}{\max_i s_i}. \quad (2.4)$$

Покажем, что существуют области значений скоростей машин, для которых данная верхняя оценка является точной оценкой цены анархии.

Теорема 2.1. *Для системы S , состоящей из $N \geq 3$ машин со скоростями $s_1 = 1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{N-1} = r \leq s_N = s$, такими, что*

$$1) (s - r) \sum_i s_i \leq \frac{s}{\max_{i=1, \dots, N-2} s_i} \left(s^2 - r \sum_i s_i \right) \text{ и}$$

$$2) (s - r) \sum_i s_i \leq \frac{s^2}{\max_{i=1, \dots, N-2} s_i},$$

цена анархии равна $PoA(S) = \frac{\sum_i s_i}{s}$.

Доказательство. Для любой системы с N машинами справедлива верхняя оценка цены анархии (2.4). Покажем, что при выполнении условий теоремы она является точной.

Рассмотрим пример системы, где $N + 1$ игроков отправляют в систему задачи с объемами $w_1 = r \sum_i s_i$, $w_2 = s^2 - r \sum_i s_i$, $w_{2+i} = ss_i$ для $i = 1, \dots, N - 1$.

Условие теоремы 1) гарантирует неотрицательность w_2 .

В оптимальном случае задачи размещаются на машинах так, что задержки на всех машинах равны s : задачи объемом w_1 и w_2 на машине со скоростью s , и каждая задача w_{2+i} на машине со скоростью s_i для $i = 1, \dots, N - 1$.

В равновесном случае задача w_1 помещается на машину со скоростью r – это самая загруженная машина с задержкой $\sum_i s_i$. Остальные задачи помещаются на машину со скоростью s , задержка на которой равна $\frac{(s-r) \sum_i s_i}{s}$. Задачу w_1 переводить на другую машину нет смысла, так как ее задержка на машине со скоростью s не изменится, а на любой машине со скоростью $s_k \leq r$ станет $\frac{r \sum_i s_i}{s_k} \geq \sum_i s_i$. Условия теоремы 1) и 2) гарантируют, что задачам w_i , где $i \geq 2$, нет смысла переходить ни на какую из машин со скоростью $s_k \leq r$.

Для данного примера отношение равновесных затрат системы к оптимальным равно $\frac{\sum_i s_i}{s}$, а так это верхняя оценка цены анархии, то это значение отношения является максимальным. $\square$

Наличие точной оценки цены анархии дает возможность полу-

читать достаточное условие для возникновения парадокса Браесса [4–7], то есть такой ситуации, когда добавление новых ресурсов в систему ухудшает ее характеристики. Покажем, когда добавление в систему новой машины может увеличить значение цены анархии для новой системы по сравнению с ее первоначальным значением.

Теорема 2.2. *Для системы S , состоящей из $N \geq 2$ машин со скоростями $s_1 = 1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_N = s$ при добавлении в систему новой машины со скоростью s' , такой, что*

1) для новой системы с $N+1$ машинами выполняются условия теоремы 2.1 и

$$2) s' < s \text{ или } s' > s \frac{\sum_i s_i}{\sum_i s_i - s},$$

цена анархии строго увеличивается.

Доказательство. Для системы S цена анархии $PoA(S) \leq \frac{\sum_i s_i}{s}$.

Если $s' < s$ и выполняются условия теоремы 2.1 для новой системы, то цена анархии для новой системы станет равной $\frac{\sum_i s_i + s'}{s} > \frac{\sum_i s_i}{s}$.

Если $s' > s$ и выполняются условия теоремы 2.1 для новой системы, то цена анархии для новой системы станет равной $\frac{\sum_i s_i + s'}{s'}$, что больше $\frac{\sum_i s_i}{s}$ при $s' > s \frac{\sum_i s_i}{\sum_i s_i - s}$. $\square$

2.1. Оценка цены анархии в модели с двумя машинами

Докажем справедливость оценки (2.1) для систем двух машин с различными скоростями $1 \leq s$.

Теорема 2.3. *Для системы S двух машин со скоростями $1 \leq s$, цена анархии имеет точную оценку (2.1).*

Доказательство. Рассмотрим некоторое равновесие по Нэшу L . Пусть i – номер машины с наибольшей задержкой такой, что $\lambda_i(L) = SC(L)$. Ее скорость равна s_i . Номер и скорость другой машины обозначим, соответственно, $-i$ и s_{-i} . Обозначим $w_k = \min_{j:l_j=k} w_j$ – минимальная по объему задача на машине i , $a = \sum_{j \neq k:l_j=i} w_j$ – объем всех

остальных задач на машине i . Тогда

$$\lambda_i(L) = \frac{w_k + a}{s_i} \leq \frac{W - a}{s_{-i}}. \quad (2.5)$$

Выразим a из (2.5)

$$a \leq \frac{W s_i - w_k s_{-i}}{s_i + s_{-i}}$$

и оценим правую часть (2.5)

$$\frac{w_k + a}{s_i} \leq \frac{w_k + \frac{W s_i - w_k s_{-i}}{s_i + s_{-i}}}{s_i} = \frac{W + w_k}{s_i + s_{-i}}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим два случая: в первом на машине i находится более одной задачи, во втором – одна задача.

- $a > 0$. Тогда $w_k \leq a$, откуда $\frac{2w_k}{s_i} \leq \frac{w_k + a}{s_i}$, и из (2.6) $w_k \leq \frac{W s_i}{s_i + 2s_{-i}}$ и $SC(L) \leq \frac{2W}{s_i + 2s_{-i}}$. Используем оценку (2.2), откуда $OPT \geq \frac{W}{s_i + s_{-i}}$, и тогда $PoA \leq 1 + \frac{s_i}{s_i + 2s_{-i}} \leq \max \left\{ 1 + \frac{1}{2s+1}, 1 + \frac{s}{s+2} \right\} = 1 + \frac{s}{s+2}$.
- $a = 0$. Тогда $SC(L) = \frac{w_k}{s_i} \leq \frac{\max_j w_j}{1}$. Из (2.3) получаем $OPT \geq \frac{\max_j w_j}{s}$ и $PoA \leq s$.

Из (2.4) получаем еще одну оценку, справедливую для обоих рассмотренных выше случаев, $PoA(S) \leq \frac{s+1}{s}$.

Таким образом, получаем следующую оценку сверху для цены анархии $PoA(S) \leq \min \left\{ \max \left\{ 1 + \frac{s}{s+2}, s \right\}, \frac{s+1}{s} \right\}$, которая преобразуется в правую часть выражения (2.1). Покажем, что данная оценка является точной, для чего достаточно привести примеры игр с системой S , в которых значение цены анархии совпадает с его верхней оценкой.

- Пример для $PoA(S) = 1 + \frac{s}{s+2}$, $s \leq \sqrt{2}$. В игре 4 игрока. В равновесии по Нэшу задачи объемом $w_1 = w_2 = s^2 + s$ размещаются на машине со скоростью s , а задачи с объемами $w_3 = s$ и $w_4 = 2 - s^2$ – на более медленной со скоростью 1. Равновесное значение затрат системы равно $SC(L) = 2s + 2$. В оптимальном случае w_2 и w_3 размещаются на машине со скоростью s , а w_1 и w_4 – на машине со скоростью 1. Оптимальные затраты системы равны $OPT = s + 2$.

- Пример для $PoA(S) = s$, $\sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В игре 2 игрока. В равновесии по Нэшу задача $w_1 = s$ помещается на медленную машину со скоростью 1, задача $w_2 = 1$ на быструю машину со скоростью s . Равновесные затраты системы равны $SC(L) = s$. В оптимальном случае происходит размещение наоборот. Оптимальные затраты системы равны $OPT = 1$.
- Пример для $PoA(S) = \frac{s+1}{s}$, $s \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В игре 3 игрока. В равновесии по Нэшу задача $w_1 = s + 1$ помещается на машину со скоростью 1, $w_2 = s$ и $w_3 = s^2 - s - 1$ на машину со скоростью s . Равновесные затраты системы равны $SC(L) = s + 1$. В оптимальном случае задачи w_1 и w_3 размещаются на машине со скоростью s , w_2 – на машине со скоростью 1. Оптимальные затраты равны $OPT = s$.

□

2.2. Оценка цены анархии в модели с тремя машинами

Пусть в системе три обслуживающие машины со скоростями $1 \leq \leq r \leq s$. Рассмотрим некоторый профиль L .

Пусть i – номер машины с наибольшей задержкой в данном профиле, машина j имеет среднюю по порядку задержку, l – наименьшую. То есть затраты системы для данного профиля равны $SC(L) = \lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$.

Лемма 2.1. *Для равновесного по Нэшу профиля L в системе с тремя машинами, где i, j, l – номера машин по порядку убывания задержки, а s_i, s_j, s_l – их скорости, справедливо*

$$\frac{SC(L)}{OPT} \leq \max \left\{ \frac{s}{s_i}, Est(s_i, s_j, s_l) \right\}, \text{ где}$$

$$Est(s_i, s_j, s_l) = \begin{cases} \frac{2(1+r+s)}{s_i+2s_j}, & \text{если } 2s_l \leq s_i, \\ \frac{1+r+s}{s_j+s_l}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторый профиль L . Пусть на машине i находится только одна задача объемом w_{k_i} . Тогда $SC(L) =$

$$= \frac{w_{k_i}}{s_i} \leq \frac{\max_k w_k}{s_i}. \text{ Используя оценку (2.3) для } OPT, \text{ получаем } PoA(S) \leq \frac{s}{s_i}.$$

Пусть на машине i выполняется более одной задачи и объем наименьшей среди них задачи равен $w_{k_i} = \min_{k:l_k=i} w_k$, а суммарный объем остальных задач на этой машине равен $a = \sum_{k \neq k_i: l_k=i} w_k$. Суммарный объем задач на машине l равен $c = \sum_{k:l_k=l} w_k$. На машине j суммарный объем задач равен $W - a - c - w_{k_i}$.

Необходимым условием для того, чтобы профиль L был равновесием по Нэшу, является выполнение неравенств, показывающих, что в равновесии даже задачу наименьшего объема невыгодно перемещать с самой загруженной машины на любую другую:

$$\frac{w_{k_i} + a}{s_i} \leq \frac{W - a - c}{s_j} \quad \text{и} \quad \frac{w_{k_i} + a}{s_i} \leq \frac{c + w_{k_i}}{s_l}. \quad (2.7)$$

Заметим, что это условие не является достаточным, так как требуется также неравенство, показывающее, что невыгодно перемещать задачи с машины со средней задержкой на машину с наименьшей задержкой.

Из первого неравенства (2.7) получим

$$\frac{w_{k_i} + a}{s_i} \leq \frac{W - c + w_{k_i}}{s_i + s_j}, \quad (2.8)$$

откуда, учитывая, что $w_{k_i} \leq a$, получаем

$$w_{k_i} \leq \frac{s_i(W - c)}{2s_j + s_i}. \quad (2.9)$$

Из второго неравенства (2.7) и $w_{k_i} \leq a$ получаем

$$c \geq \frac{w_{k_i}(s_l - s_i) + as_l}{s_i} \geq \frac{w_{k_i}(2s_l - s_i)}{s_i},$$

откуда, учитывая, что суммарный объем задач на машине l – неотрицательная величина,

$$c \geq \max \left\{ 0, \frac{w_{k_i}(2s_l - s_i)}{s_i} \right\}.$$

Если $2s_l - s_i \leq 0$, то $c \geq 0$ – более точная оценка для c , и тогда из (2.8) и (2.9) получаем

$$SC(L) = \frac{w_{k_i} + a}{s_i} \leq \frac{W + \frac{W s_i}{2s_j + s_i}}{s_j + s_i} = \frac{2W}{2s_j + s_i},$$

откуда, используя оценку (2.2) для OPT , получаем

$$PoA(S) \leq \frac{2(s_i + s_j + s_l)}{2s_j + s_i} = \frac{2(1 + r + s)}{s_i + 2s_j}.$$

Если $2s_l - s_i \geq 0$, то $c \geq \frac{w_{k_i}(2s_l - s_i)}{s_i}$ – более точная оценка для c , и тогда из (2.8) получаем

$$\frac{w_{k_i} + a}{s_i} \leq \frac{W + w_{k_i} \left(1 - \frac{2s_l - s_i}{s_i}\right)}{s_j + s_i} = \frac{W + 2w_{k_i} \left(\frac{s_i - s_l}{s_i}\right)}{s_j + s_i}.$$

Отсюда, учитывая, что $w_{k_i} \leq a$, получаем $w_{k_i} \leq \frac{W s_i}{2(s_j + s_l)}$. Подставляя полученную оценку w_{k_i} в предыдущее неравенство, получим в итоге

$$\frac{w_{k_i} + a}{s_i} \leq \frac{W}{s_j + s_l},$$

откуда, используя оценку (2.2) для OPT , получаем

$$PoA(S) \leq \frac{s_i + s_j + s_l}{s_j + s_l} = \frac{1 + r + s}{s_j + s_l}.$$

□

Применяя лемму 2.1 ко всем возможным перестановкам $1, r, s$ получаем верхнюю оценку для цены анархии:

$$PoA(S) \leq \max\{s, Est(1, r, s), Est(1, s, r), Est(r, 1, s), Est(r, s, 1), Est(s, 1, r), Est(s, r, 1)\},$$

$$\text{где } Est(s_i, s_j, s_l) = \begin{cases} \frac{2(1+r+s)}{s_i + 2s_j}, & \text{если } 2s_l \leq s_i, \\ \frac{1+r+s}{s_j + s_l}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Кроме того, всегда справедлива оценка (2.4), имеющая здесь вид

$$PoA(S) \leq \frac{1 + r + s}{s}. \quad (2.10)$$

Тогда получаем обобщенную верхнюю оценку цены анархии для системы с тремя машинами.

Теорема 2.4. Для системы S трех машин со скоростями $1 \leq r \leq \leq s$, цена анархии имеет верхнюю оценку

$$PoA(S) \leq \min\left\{\frac{1+r+s}{s}, \max\left\{s, Est(1, r, s), Est(1, s, r), Est(r, 1, s), \right. \right. \\ \left. \left. Est(r, s, 1), Est(s, 1, r), Est(s, r, 1)\right\}\right\}, \quad (2.11)$$

$$где \quad Est(s_i, s_j, s_l) = \begin{cases} \frac{2(1+r+s)}{s_i+2s_j}, & \text{если } 2s_l \leq s_i, \\ \frac{1+r+s}{s_j+s_l}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что для достаточно больших значений s выражение обобщенной верхней оценки цены анархии сокращается до (2.10). Для этого рассмотрим выражение (2.11). Пусть максимальное из значений в скобках под знаком $\max$ равно est' . Если $est' = s$, то $\min\left\{\frac{1+r+s}{s}, est'\right\} = \frac{1+r+s}{s}$ при всех $s \geq \frac{1+\sqrt{4r+5}}{2}$. Если же $est' > s$, то $\min\left\{\frac{1+r+s}{s}, est'\right\} = \frac{1+r+s}{s}$ при всех $s \geq s'$, где s' – некоторое значение, не превосходящее $\frac{1+\sqrt{4r+5}}{2}$. То есть, по крайней мере для $s \geq \frac{1+\sqrt{4r+5}}{2}$ нет необходимости учитывать значения под знаком $\max$ в выражении (2.11).

Более того, существует область значений s и r , в которой оценка цены анархии (2.10) становится точной. Следующая теорема для трех машин является частным случаем теоремы 2.1.

Теорема 2.5. Для системы S трех машин со скоростями $1 \leq r \leq \leq s$, такими, что $(s-r)(1+r+s) \leq s(s^2-r(1+r+s))$ и $s \leq r(r+1)$, цена анархии равна $PoA(S) = \frac{1+r+s}{s}$.

Область значений s и r , в которой цена анархии равна $PoA(S) = \frac{1+r+s}{s}$, показана на рис. 1. Как показывают численные эксперименты, при росте s , выводящем точку (r, s) за пределы данной области, оценка $PoA(S) \leq \frac{1+r+s}{s}$ близка к точной, но не равна ей. Это связано с изменением структуры наихудшего равновесия с ростом s по сравнению с равновесием, приведенным в доказательстве теоремы.

3. Нахождение точного значения цены анархии в модели с тремя машинами

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений для компонент векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$.

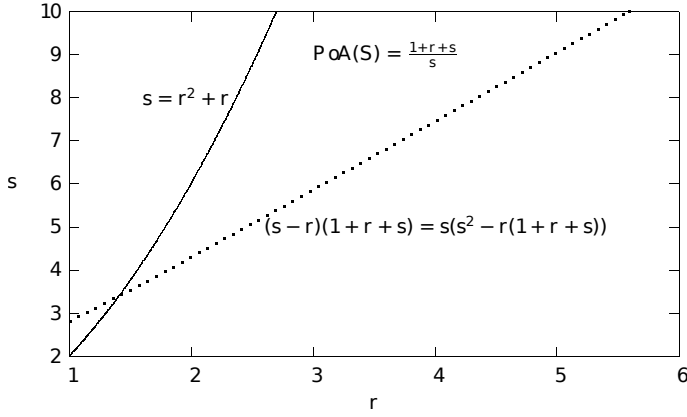


Рисунок 1. Область, где $PoA(S) = \frac{1+r+s}{s}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2+a_3}{s_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:a_k>0} a_k} \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{s_i} \leq \frac{s_j}{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:b_k>0} b_k} \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{s_j} \leq \frac{s_l}{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:b_k>0} b_k} \text{ или } \max_k b_k = 0 \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{s_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{s_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{s_l} \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Данная система представляет собой набор гиперплоскостей в 9-мерном пространстве, проходящих через точку $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, и множество решений представляет собой область пространства, ограниченную данными гиперплоскостями. Система совместна, так как, например, $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha s_i$, $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha s_j$, $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha s_l$ является ее решением для всех $\alpha > 0$. При этом множество ее решений не ограничено, так как α может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим систему S с тремя обслуживающими машинами со скоростями $1 \leq r \leq s$. Пусть L – равновесие по Нэшу для игры с тремя машинами и n игроками, такое, что i – номер машины с наибольшей задержкой в данном профиле, машина j имеет среднюю по порядку задержку, l – наименьшую. Положим, что в равновесии L на машине с номером i находится суммарный объем задач, равный

$$\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3, \text{ на } j - \text{объем} \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$$

и на l – объем $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$. Объем задач на каждой машине некоторым образом разделен на три части, так, что каждая из компонент трехмерных векторов a, b, c либо нулевая, либо положительная и включает в себя объем не менее, чем одной задачи.

Лемма 3.1. *Если L – вышеописанное равновесие по Нэшу в игре с системой обслуживания S с тремя машинами и n игроками, то соответствующие значения компонент векторов a, b, c являются решением системы (3.1).*

Доказательство. L – равновесие по Нэшу и наибольшая задержка на машине i , средняя – на машине j и минимальная – на машине l . Тогда по определению выполняются неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k:l_k=i} w_k}{s_i} \leq \frac{\sum_{k:l_k=j} w_k + \min_{k:l_k=i, w_k>0} w_k}{s_j} \\ \frac{\sum_{k:l_k=i} w_k}{s_i} \leq \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k + \min_{k:l_k=i, w_k>0} w_k}{s_l} \\ \frac{\sum_{k:l_k=j} w_k}{s_j} \leq \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k + \min_{k:l_k=j, w_k>0} w_k}{s_l} \end{array} \right. \text{ или } \max_{k:l_k=i} w_k = 0$$

$$\frac{\sum_{k:l_k=i} w_k}{s_i} \geq \frac{\sum_{k:l_k=j} w_k}{s_j} \geq \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{s_l}.$$

А так как ненулевые из значений $a_k, b_k, c_k, k = 1, 2, 3$ включают в себя объемы не менее одной задачи на соответствующей машине, то все они больше нуля и справедливо $\min_{k:a_k>0} a_k \geq \min_{k:l_k=i, w_k>0} w_k$ и $\min_{k:b_k>0} b_k \geq \min_{k:l_k=j, w_k>0} w_k$. А это означает выполнение системы (3.1). $\square$

Лемма 3.2. *Любое решение системы (3.1) определяет равновесие по Нэшу в игре с системой S трех машин и числом игроков, равным числу ненулевых компонент векторов a, b, c , которые соответствуют объемам задач этих игроков, а i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки на них.*

Доказательство. Пусть компоненты векторов a, b, c являются решением системы (3.1). Пусть профиль L такой, что владельцы задач с объемами $a_k > 0$ выбрали машину i , владельцы задач с объемами $b_k > 0$ выбрали машину j и остальные выбрали машину l . Так как выполнены неравенства системы (3.1), то профиль L является равновесием по Нэшу. $\square$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Любому равновесию по Нэшу L в игре с системой обслуживания S с тремя машинами и n игроками соответствует равновесный профиль для игры с той же системой обслуживания S и множеством не более 9 игроков, где на каждой машине находится не более трех задач и значения задержек на машинах совпадают с задержками в профиле L исходной системы.*

Доказательство. L – равновесие по Нэшу в игре с системой обслуживания S и n игроками. Пусть наибольшая задержка – на машине i , средняя – на машине j , минимальная на машине l . Лемма 3.1 гарантирует наличие соответствующего решения a, b, c системы (3.1) для любого равновесия по Нэшу в игре с любым числом игроков. Лемма 3.2 гарантирует, что данное решение определяет равновесие в игре, где компоненты вектора a соответствуют объемам задач на машине i , компоненты b – задачам на j и c – задачам на l . По определению векторов a, b, c суммы их компонент равны суммам объемов задач на соответствующих машинах в исходной игре в профиле L . Значит задержки на них также совпадают. $\square$

Из данной теоремы следует, что достаточно рассматривать только те игры, где в равновесии на каждой машине находится не более трех задач и равновесие является решением системы (3.1). При этом область значений затрат системы совпадает с областью значений для игр с произвольным числом игроков.

Пусть компоненты векторов a, b, c выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем минимум затрат системы, на машине i находится суммарный объем задач, равный $a_1 + b_1 + c_1$, на j – объем $a_2 + b_2 + c_2$, на l – объем $a_3 + b_3 + c_3$. При этом в оптимальном профиле наибольшей может оказаться задержка на любой из трех машин. Кроме того, согласно теореме 1.1, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптимальном профиле максимальная среди всех машин задержка была строго равна 1. В нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned}
a_1 + b_1 + c_1 &\leq s_i, \\
a_2 + b_2 + c_2 &\leq s_j, \\
a_3 + b_3 + c_3 &\leq s_l,
\end{aligned}$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

Лемма 3.3. *Решение задачи линейного программирования относительно компонент векторов a, b, c*

$$LPP(s_i, s_j, s_l) : \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow \max \\ (r1) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{s_i} \leq \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \min_{k: a_k > 0} a_k}{s_j} \\ (r2) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{s_i} \leq \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \min_{k: a_k > 0} a_k}{s_l} \\ (r3) \quad \frac{b_1 + b_2 + b_3}{s_j} \leq \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \min_{k: b_k > 0} b_k}{s_l} \text{ или } \max_k b_k = 0 \\ (r4) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{s_i} \geq \frac{b_1 + b_2 + b_3}{s_j} \geq \frac{c_1 + c_2 + c_3}{s_l} \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3 \\ (r6) \quad a_1 + b_1 + c_1 \leq s_i \\ (r7) \quad a_2 + b_2 + c_2 \leq s_j \\ (r8) \quad a_3 + b_3 + c_3 \leq s_l \end{array} \right. \quad (3.2)$$

дает максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждой машине, i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки, а оптимальные затраты системы равны 1.

Доказательство. По лемме 3.2 любое решение неравенств $(r1) - (r5)$ задачи $LPP(s_i, s_j, s_l)$ определяет равновесие в игре с тремя машинами, где на каждой машине находится не более трех задач и i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена сверху только гиперплоскостями, соответствующими неравенствам $(r6) - (r8)$. Неравенства $(r1) - (r5)$ допускают сколь угодно большие значения целевой функции, например, для решения $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha s_i$ для любого значения $\alpha > 0$, при $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha s_j$, $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha s_l$. Следовательно, максимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение

одного из них как равенства, а значит, оптимальные затраты для игры, соответствующей решению задачи $LPP(s_i, s_j, s_l)$, строго равны 1. $\square$

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы S с тремя машинами нужно решить ряд задач линейного программирования $LPP(s_i, s_j, s_l)$ для всех перестановок $(1, r, s)$. Максимальное из этих решений даст значение $PoA(S)$. То есть, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Цена анархии для системы трех машин S равна*

$$PoA(S) = \max_{(s_i, s_j, s_l) - \text{перестановки } (1, r, s)} \left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_3}{s_i} \mid a, b, c - \text{решение } LPP(s_i, s_j, s_l) \right\},$$

где $LPP(s_i, s_j, s_l)$ – задача линейного программирования (3.2).

Доказательство. Согласно лемме 3.3, решение задачи (3.2) дает максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу, где i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждой машине, а оптимальные затраты равны 1. Максимум решения среди задач для всех возможных перестановок $(1, r, s)$ в качестве значений (s_i, s_j, s_l) даст максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждой машине, а оптимальные затраты равны 1.

По теореме 3.1 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех машин S и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же машинами и множеством не более 9 игроков, где на каждой машине находится не более трех задач, причем затраты системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждой машине находится не более трех задач.

По теореме 1.1 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где затраты системы в оптимальном профиле строго равны 1. $\square$

4. Численные эксперименты

Для нахождения оценок цены анархии в модели с тремя машинами разработано программное обеспечение, позволяющее визуально сравнить на графике значения верхней оценки $PoA(S)$ и численно найденного путем решением ряда задач линейного программирования точного значения $PoA(S)$. Параметры системы S задаются как опции программы, при этом скорость первой машины считается равной 1, для второй задается точное значение, а для скорости третьей машины задается диапазон значений. Таким образом можно наблюдать, как изменяется значение цены анархии для конкретного значения при изменении скорости одной из машин. Кроме того программа случайным образом генерирует различные наборы задач пользователей U , находит для каждой полученной игры $\Gamma(S, U)$ отношение затрат системы в наихудшем случае равновесия по Нэшу к оптимальным затратам и выводит на экран соответствующие точки. Все эти точки на графике располагаются ниже полученных линий оценки цены анархии, что показывает корректность данных оценок.

На графиках рис. 2 и рис. 3 представлены примеры оценок цены анархии для значений скорости второй машины $s_2 = 1.5$ и $s_2 = 5$ соответственно. Скорость первой машины $s_1 = 1$, а скорость третьей машины s_3 меняется от 1 до 10. Вертикальная линия $s_3 = s_2$ разделяет области графика так, что в левой области вторая машина является самой быстрой, а в правой – третья. То есть, $s_2 = s$ и $s_3 = r$ при $s_3 \leq s_2$ и $s_2 = r$ и $s_3 = s$ иначе.

5. Заключение

Для системы обслуживания с N машинами и n игроками получена оценка верхней границы цены анархии в игре баланса загрузки. Найденны условия, при которых она является точной оценкой цены анархии. Найденны условия возникновения парадокса Браесса в системе.

Более детально рассмотрена модель с тремя машинами, для которой разработана методика вычисления точного значения цены анархии. Данная методика может быть обобщена на системы с большим количеством машин, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число

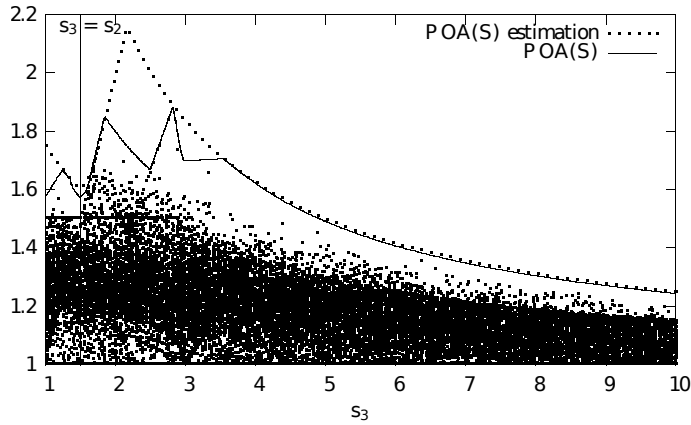


Рисунок 2. Оценки цены анархии для системы S , где $s_1 = 1, s_2 = 1.5, s_3 \in [1, 10]$. Пунктиром обозначена обобщенная верхняя оценка цена анархии.

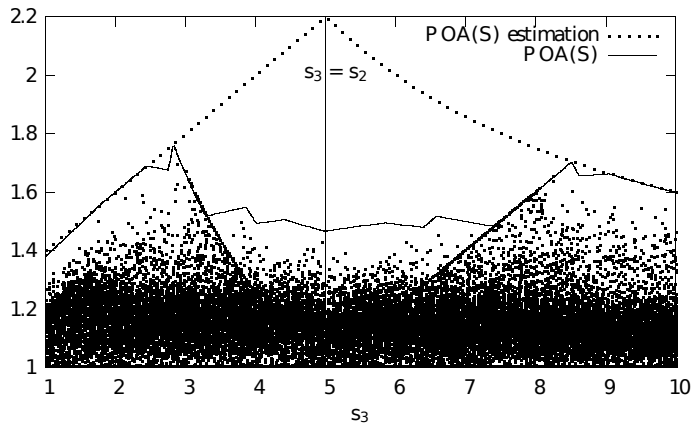


Рисунок 3. Оценки цены анархии для системы S , где $s_1 = 1, s_2 = 5, s_3 \in [1, 10]$. Пунктиром обозначена обобщенная верхняя оценка цена анархии.

переменных и ограничений в них. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Czumaj A., Vöcking B. *Tight bounds for worst-case equilibria* // Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'02). 2002. P. 413–420.
2. Epstein L. *Equilibria for two parallel links: the strong price of anarchy versus the price of anarchy* // Acta Informatica. 2010. V. 47 (7-8). P. 375–389.
3. Feldmann R., Gairing M., Lücking T., Monien B. and Rode M. *Nashification and the coordination ratio for a selfish routing game* // In Proc. of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2003). 2003. P. 514–526.
4. Korilis Y. A., Lazar A. A., Orda A. *Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks* // J. Appl. Prob. 1999. V. 36. P. 211–222.
5. Mazalov V., Monien B., Schoppmann F., Tiemann R. *Wardrop equilibria and price of stability for bottleneck games with splittable traffic* // Lecture Notes in Computer Science. 2006. V. 4286. P. 331–342.
6. Murchland J. D. *Braess's paradox of traffic flow* // Transportation Research. 1970. V. 4. P. 391–394.
7. Roughgarden T., Tardos É. *How bad is selfish routing?* // Journal of the ACM. 2002. V. 49. N 2. P. 236–259.

PRICE OF ANARCHY FOR MACHINE LOAD
BALANCING GAME

Julia V. Chirkova, IAMR KRC RAS, Cand.Sc. (julia@krc.karelia.ru).

Abstract: The Machine Load Balancing Game with N machines is considered. A set of n jobs is to be assigned to a set of N machines with different speeds. Jobs choose machines to minimize their own delays. The social cost of a schedule is the maximum delay among all machines, i.e. *makespan*. For this model the upper bound estimation of the Price of Anarchy is obtained. Conditions, when this upper bound estimation is an exact estimation of the Price of Anarchy, are found. Conditions of Braess's Paradox appearing in the system are found. For the case of 3 machines the exact value of Price of Anarchy is obtained numerically with the algorithm that was developed.

Keywords: machine load balancing game, Nash equilibrium, price of anarchy.