

УДК 517.957+517.988+519.833.2+519.837

ББК 22.18

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ε -РАВНОВЕСИЯ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЯМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, УПРАВЛЯЕМЫХ МНОГИМИ ИГРОКАМИ

АНДРЕЙ В. ЧЕРНОВ*

Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа посвящена обоснованию одного сравнительно простого алгоритма построения ε -равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх, связанных с эволюционными полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, управляемых независимо многими игроками. Стратегии игроков предполагаются кусочно программными, шаг по времени – фиксированным, а управления – кусочно постоянными векторами со значениями из заданного компакта в конечномерном пространстве. Идея алгоритма заключается в аппроксимации исходной игры конечной многшаговой игрой с полной информацией и последующем применении алгоритма

©2013 А.В. Чернов

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Куна. Основу изучаемого алгоритма составляют два утверждения – о тотальном сохранении глобальной разрешимости управляемых распределенных систем, а также о непрерывной зависимости решений от кусочно постоянных управлений, доказанные автором ранее. Изложение проводится на примере первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка достаточно общего вида.

Ключевые слова: бескоалиционная игра со многими участниками, полулинейные уравнения в частных производных, кусочно программные стратегии, кусочно постоянные управления, ε -равновесие.

1. Введение

На сегодняшний день существует обширная литература, посвященная изучению различных вопросов теории дифференциальных игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Что касается распределенных управляемых систем, то относящиеся к ним игровые задачи даже для случая двух игроков изучены, на наш взгляд, пока еще недостаточно. По поводу известных результатов на эту тему, см., например, библиографию в [10]. Игры многих лиц, связанные с полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, по-видимому, практически не исследовались.

В работе [10] был предложен метод сведения дифференциальных игр для полулинейных распределенных систем к так называемым функционально-операторным играм, а также описано применение этого метода для доказательства существования ситуации ε -равновесия (в кусочно-программных стратегиях) в антагонистическом случае. Там же приведены примеры сведения дифференциальных игр, связанных с управляемыми распределенными системами, к функционально-операторным играм.

Данная статья посвящена обоснованию одного сравнительно простого алгоритма построения ε -равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх, связанных с эволюционными полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, управляемых независимо многими игроками. При этом в качестве основного инструмента исследования так же, как и раньше, используется нелинейное

функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна с вольтерровым оператором в правой части. Стратегии игроков предполагаются кусочно программными (см., например, [3, глава V]); шаг по времени – фиксированным, а управления – кусочно постоянными векторами со значениями из заданного компакта в конечномерном пространстве. Идея алгоритма заключается в аппроксимации исходной игры конечной многошаговой игрой с полной информацией и последующем применении известного алгоритма Куна. Основу изучаемого алгоритма составляют два утверждения: первое – о тотальном сохранении глобальной разрешимости управляемых распределенных систем [11] (см. также [14]), и второе – о непрерывной зависимости решений от кусочно постоянных управлений, доказанные автором ранее. Изложение проводится на примере первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка достаточно общего вида. Перейдем к конкретным формулировкам.

Прежде всего, для измеримого (измеримость здесь и далее понимается в смысле Лебега) ограниченного множества $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, чисел $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ и лебеговых пространств $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Pi)$ функций, измеримых и суммируемых с индексами из $[1; +\infty]$ на множестве Π , определим класс $\mathbb{F}(\ell, s, m; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z})$ всех функций $f(t, x, w) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $\{x, w\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и таких, что

F₁) для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $w \in \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f(\cdot, x(\cdot), w(\cdot)) \in \mathcal{Z}^m$.

F₂) Существует неубывающая функция $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\left\| f(\cdot, y(\cdot), w(\cdot)) - f(\cdot, z(\cdot), w(\cdot)) \right\|_{\mathcal{Z}^m} \leq \mathcal{N}(M) \|y - z\|_{\mathcal{X}^\ell}$$

для всех $y, z \in \mathcal{X}^\ell$, $w \in \mathcal{U}^s$, $\|y\|, \|z\|, \|w\| \leq M$.

2. Постановка игровой задачи

Пусть $T > 0$ – некоторое число, $n, s, \nu \in \mathbb{N}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область переменных $\bar{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ с границей ∂Q , принадлежащей классу \mathcal{C}^2 ; $\Pi_T = Q \times (0, T)$ – заданный цилиндр в пространстве \mathbb{R}^{n+1} переменных $t = \{t_0, \bar{t}\}$; $S_T = \partial Q \times (0; T)$ – боковая поверхность цилиндра Π_T .

Определим число $q_n = \left\{ \begin{array}{l} 2n/(n-2), \text{ если } n > 2; \\ +\infty, \text{ если } n = 1, 2 \end{array} \right\}$ и выберем некоторые числа $q_0 \in (2, q_n)$ и $r_0 > 2$ так, чтобы выполнялось равенство $r_0^{-1} + n(2q_0)^{-1} = n/4$. Обозначим $\bar{q} = \min\{q_0, r_0\}$ и выберем $q \in (2, \bar{q})$. Будем предполагать, что

$$f \in \mathbb{F}(1, s\nu, 1; L_q(\Pi_T), L_\infty(\Pi_T), L_2(\Pi_T)).$$

Рассмотрим управляемую независимо ν игроками распределенную систему, поведение которой описывается первой краевой задачей для параболического уравнения вида

$$\begin{cases} x'_{t_0} - L[x] = f\left(t, x(t), u[1](t), \dots, u[\nu](t)\right), & t = \{t_0, \bar{t}\} \in \Pi = \Pi_T, \\ x|_{t_0=0} = \varphi(\bar{t}), \quad \bar{t} \in Q; & x|_{S_T} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x = x(t) = x(t_0, \bar{t})$ – неизвестная функция; $u[j] \in \mathcal{D}_j$ – управление j -го игрока, $\mathcal{D}_j \subset L_\infty^s(\Pi_T)$ – заданное ограниченное множество, $j = \overline{1, \nu}$; L – дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$L[x] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(\bar{t}) x'_{t_i} \right)'_{t_j} + \sum_{j=1}^n b_j(\bar{t}) x'_{t_j}. \quad (2.2)$$

Мы предполагаем здесь, что коэффициенты a_{ij} вместе с производными $(a_{ij})'_{t_j}$ и коэффициентами b_j для $1 \leq i, j \leq n$ принадлежат классу $\mathbb{C}^1(\bar{Q})$ и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности

$$\gamma_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\bar{t}) \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 |\xi|^2, \quad \bar{t} \in \bar{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Решение задачи (2.1) понимаем в сильном обобщенном смысле, подробнее об этом см. в разделе 6.

Обозначим $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_\nu$. Будем считать, что выполнено предположение

Ψ) Существует функция $\psi(t, \xi) : \Pi \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная и не убывающая по $\xi \in \mathbb{R}_+$ и такая, что имеет место оценка $\left| f(\cdot, y(\cdot), w(\cdot)) \right| \leq \psi(\cdot, |y|(\cdot)) \in L_2(\Pi) \quad \forall y \in L_q(\Pi), w \in \mathcal{D}$, и кроме того, мажорантная задача

$$\begin{cases} x'_{t_0} - L[x] = \psi\left(t, x(t)\right), & t = \{t_0, \bar{t}\} \in \Pi = \Pi_T, \\ x|_{t_0=0} = |\varphi(\bar{t})|, \quad \bar{t} \in Q; & x|_{S_T} = 0 \end{cases}$$

имеет неотрицательное решение x_* .

В разделе 6 мы покажем, что предположение Ψ) обеспечивает, во-первых, однозначную глобальную разрешимость задачи (2.1) для всех управлений $w = \{u[1], \dots, u[\nu]\} \in \mathcal{D}$, и во-вторых, оценку $|x[w]| \leq x_*$. Достаточные условия выполнения предположения Ψ) можно получить из [14].

Пусть задан набор функций $\Phi_j(t, x, w) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, \nu}$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $(x, w) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\nu$ и удовлетворяющих условию

G) для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $w \in \mathcal{U}^\nu$ суперпозиция $\Phi_j(\cdot, x(\cdot), w(\cdot))$ принадлежит пространству $L_1(\Pi)$, $j = \overline{1, \nu}$.

Определим набор функционалов вида

$$J_j[w] = \int_{\Pi} \Phi_j(t, x[w](t), w(t)) dt, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad w \in \mathcal{D}.$$

Целью игры для j -го игрока является максимизация своего выигрыша, заданного функционалом $J_j[w]$, $w = \{u[1], \dots, u[\nu]\} \in \mathcal{D}$, с помощью управления $u[j] \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$.

Приведем простейший пример прикладной задачи, приводящей к подобной игровой постановке. Предположим, в печь поступает металлический стержень, покрытый слоем загрязнителей (шлак, краска, остатки изоляции и т.п. в заранее неизвестных пропорциях), которые в процессе нагрева полностью разрушаются за некоторое время γ . Пусть $\sigma > 0$ – некоторое число такое, что $T - \sigma > 0$. Требуется на финальном отрезке времени $[T - \sigma; T]$ привести распределение температуры стержня к заданному распределению y . Время будем обозначать буквой τ , пространственную переменную – буквой ξ . Будем считать, что на концах стержня поддерживается нулевая¹ температура, а начальное распределение температуры вдоль стержня известно. Тогда закон изменения температуры $x = x(\tau, \xi)$ стержня описывается, как известно, первой краевой задачей для уравнения

¹Это не принципиально, поскольку зависит от точки отсчета.

теплопроводности

$$\begin{cases} x'_\tau - x''_{\xi\xi} = f(\tau, \xi, x, u[1], u[2], u[3]), & \{\tau, \xi\} \in \Pi_T = [0; T] \times [0; L], \\ x|_{\tau=0} = \varphi(\xi), \xi \in Q = (0; L); & x|_{S_T} = 0. \end{cases}$$

Здесь: $u[1](\tau, \xi)$ отражает влияние загрязнителей, $u[2](\tau, \xi)$ – влияние раскаленных газов, на которые, в свою очередь, влияет испарение загрязнителей, $u[3](\tau, \xi)$ – влияние нагревательных элементов (плотность источников тепла, действующих на стержень), которыми мы управляем. Предположим, температуру газовой смеси мы замеряем с помощью лишь одного датчика и показания фиксируются через промежутки времени $\Delta\tau$. Тогда естественно считать, что $u[2] \equiv \text{const}$ при $\tau \in [\tau_{i-1}; \tau_i]$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \Delta\tau$, $i = \overline{1, k}$; $\tau_0 = 0$, $\tau_k \geq T$. Величину $u[1]$ замеряем по той же схеме. Управление $u[3]$ тоже можем считать ступенчатым. Факторы $u[1]$ и $u[2]$ вносят неконтролируемые помехи в процесс управления. Абстрагируясь, можем считать, что они являются управлениями игроков, действующих против нас. Учитывая, что игрок 1 может противодействовать нам лишь на промежутке времени $[0; \gamma]$, причем степень его противодействия убывает при разрушении загрязнителя, а игрок 2 – на всем промежутке времени, со степенью противодействия, зависящей от температуры оставшихся загрязнителей и температуры газов, можем считать, что функционалы выигрышей игроков имеют вид

$$J_1[w] = \int_0^\gamma d\tau \int_0^L [x[w](\tau, \xi) - y(\xi)]^2 Q_1(\tau, u[1]) d\xi,$$

$$J_2[w] = \int_0^T d\tau \int_0^L [x[w](\tau, \xi) - y(\xi)]^2 Q_2(\tau, u[1], u[2]) d\xi,$$

$$J_3[w] = - \int_{T-\sigma}^T d\tau \int_0^L [x[w](\tau, \xi) - y(\xi)]^2 d\xi, \quad w = \{u[1], u[2], u[3]\}.$$

3. Формулировка основного результата

Будем считать, что задано некоторое разбиение промежутка по времени $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = T$. Обозначим $h_i = \Pi_{\tau_i} \setminus \Pi_{\tau_{i-1}}$, P_i –

оператор умножения на характеристическую функцию множества h_i , $i = \overline{1, k}$.

Шагом номер i в нашей игре Γ_τ будем называть выбор всеми игроками шаговых управлений $u[i, j]$ на промежутке времени $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$. Будем предполагать, что игроки подчиняются следующей иерархии: на каждом шаге игроку ν известен как свой выбор, так и выбор остальных игроков на всех предыдущих шагах и на данном шаге; игроку j – свой выбор и выбор игроков $i = \overline{1, j-1}$ на данном шаге, а также свой выбор и выбор всех остальных игроков на всех предыдущих шагах, $j = \overline{1, \nu-1}$. Задача (2.1) предполагается известной всем игрокам (игра с полной информацией).

Кусочно-программной стратегией j -го игрока в нашей игре Γ_τ будем называть отображение, ставящее в соответствие каждому h_i и наборам $\{w_\kappa \in P_\kappa \mathcal{D} : \kappa = \overline{1, i-1}\}$, а также (с учетом дискриминации предыдущих игроков) набору $u[i, \kappa] \in P_i \mathcal{D}_\kappa$, $\kappa = \overline{1, j-1}$, управление $u[i, j] \in P_i \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$.

Далее будем считать, что $P_i \mathcal{D}_j$ есть семейство функций, равных нулю вне множества h_i , а на множестве h_i принимающих некоторое постоянное значение из компакта $V_{ij} \subset \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$. Ясно, что каково бы ни было число $\delta > 0$, для каждого из компактов V_{ij} найдется конечная δ -сеть V_{ij}^δ , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$.

Игру, которая отличается от игры Γ_τ тем, что множество альтернатив для j -го игрока на i -м шаге сужается с множества V_{ij} до конечного множества V_{ij}^δ , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$, будем обозначать Γ_τ^δ . Понятно, что игра Γ_τ^δ является конечной многошаговой игрой с полной информацией. Поэтому ее можно решить (найти равновесие по Нэшу), пользуясь известным алгоритмом Куна (см., например, [1, теорема 13.1, с.150]). Весь вопрос в том, как игра Γ_τ^δ связана с игрой Γ_τ .

Теорема 3.1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всякого $\delta \in (0; \delta_\varepsilon)$ и каждого набора стратегий игроков в исходной игре Γ_τ найдется набор стратегий в конечной игре Γ_τ^δ такой, что значения функционалов выигрышей каждого из игроков на управлениях, реализовавшихся в результате применения этих двух наборов, будут отличаться менее, чем на ε .*

Замечание 3.1. Таким образом, от исходной игры Γ_τ мы вправе перейти к конечной игре Γ_τ^δ при любом достаточном малом $\delta > 0$. А для решения игры Γ_τ^δ можно использовать алгоритм Куна². В этом и состоит представляемый алгоритм решения игры Γ_τ . Данный подход отличается от подходов, применяемых обычно к решению игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями и основанных на анализе структуры множеств достижимости. К сожалению, в случае уравнений с частными производными исследовать структуру множеств (а тем более, трубок) достижимости было бы достаточно затруднительно. А в рамках предлагаемого подхода это и не требуется. Кроме того, из теоремы 3.1 получаем также существование для любого $\varepsilon > 0$ ситуации ε -равновесия в игре Γ_τ .

Доказывать теорему 3.1 будем в два этапа. Прежде всего, построим соответствующую абстрактную теорию для функционально-операторных игр по схеме, в каком-то смысле уже отработанной в статьях [10,13]. Делаем мы это по двум причинам: 1) нам понадобится использовать результаты о тотальном сохранении глобальной разрешимости [11] и о непрерывной зависимости решения от кусочно постоянного управления [15], а оба они доказывались для управляемых функционально-операторных уравнений, рассматриваемых далее; 2) полученный нами результат для функционально-операторных игр впоследствии может быть применен к исследованию игр, связанных с управляемыми распределенными системами гораздо более широкого класса. После завершения этого первого этапа мы докажем, что все наши абстрактные предположения, сделанные относительно функционально-операторной игры, выполняются для нашего конкретного случая.

4. Функционально-операторная игра

Пусть $n, m, \ell, s, \nu \in \mathbb{N}$ – заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$ – лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1; +\infty]$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$ – лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1; +\infty)$,

²Собственно, только ради этого нам требуется определенная иерархия игроков. Для утверждения об аппроксимации исходной игры конечной игрой конкретный вид иерархии (или ее отсутствие) не играет никакой роли.

$\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{D}_j \subset \mathcal{U}^s$, $j = \overline{1, \nu}$, – заданные множества, $A : \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{X}^\ell$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Рассмотрим функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна, управляемое (независимо) игроками $j = \overline{1, \nu}$:

$$x(t) = \theta(t) + A \left[f(\cdot, x, u[1], \dots, u[\nu]) \right] (t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \quad (4.1)$$

где $u[j] \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$, – управления игроков, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$ – заданный элемент, $f \in \mathbb{F}(\ell, s\nu, m; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z})$. Как было показано в [10,11,14,15], к уравнению (4.1) путем обращения главной части дифференциального уравнения может быть сведен довольно широкий класс управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ). Это обстоятельство позволяет использовать данное уравнение как инструмент исследования различных вопросов теории управляемых распределенных систем, в частности, глобальной разрешимости [11,14], сходимости численных методов оптимизации [12], управляемости [15], существования ситуации ε -равновесия в дифференциальных играх, связанных с уравнениями в частных производных, [10,13] и т.д.

Положим $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_\nu$. Будем считать выполненными следующие априорные предположения

Н) Для каждого $w = \{u[1], \dots, u[\nu]\} \in \mathcal{D}$ уравнение (4.1) имеет, и притом единственное, решение $x = x[w] \in \mathcal{X}^\ell$. Более того, существует функция $x_* \in \mathcal{X}$ такая, что $|x[w]| \leq x_*$ для всех $w \in \mathcal{D}$.

Замечание 4.1. Достаточные условия, обеспечивающие выполнение предположений **Н)**, можно найти в [9,11,14].

Пусть задан набор функций $\Phi_j(t, x, w) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{s\nu} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, \nu}$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $(x, w) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{s\nu}$ и удовлетворяющих условию

Г) для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $w \in \mathcal{U}^{s\nu}$ суперпозиция $\Phi_j(\cdot, x(\cdot), w(\cdot))$ принадлежит пространству $L_1(\Pi)$, $j = \overline{1, \nu}$.

Условия **Н)** позволяют определить набор функционалов вида

$$J_j[w] = \int_{\Pi} \Phi_j(t, x[w](t), w(t)) dt, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad w \in \mathcal{D}.$$

Целью игры для j -го игрока является максимизация своего выигрыша, заданного функционалом $J_j[w]$, $w = \{u[1], \dots, u[\nu]\} \in \mathcal{D}$, с помощью управления $u[j] \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$. Далее мы будем предполагать, что множества \mathcal{D}_j , $j = \overline{1, \nu}$, имеют специальную структуру и применяются кусочно программные стратегии в смысле [10].

Определение 4.1. Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества Π , P_H – оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \in \Sigma$. Тогда систему $\mathcal{B}(A) = \{H \in \Sigma : P_H A P_H = P_H A\}$ будем, следуя [8], называть системой вольтерровых множеств оператора A .

Для всякого $H \in \mathcal{B}(A)$ мы можем получить H -локальный аналог уравнения (4.1), подействовав на него оператором P_H , и решение этого локального аналога искать в пространстве $P_H \mathcal{X}^\ell$. Указанное решение будем понимать как H -локальное решение уравнения (4.1). При этом Π -локальное решение естественно назвать глобальным решением уравнения (4.1). Очевидно, что если уравнение (4.1) имеет глобальное решение $x = x[w] \in \mathcal{X}^\ell$, то для всякого $H \in \mathcal{B}(A)$ оно имеет H -локальное решение $P_H x[w]$.

Определение 4.2. Подсистему

$$\mathcal{T} = \left\{ \emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k = \Pi \right\} \subset \mathcal{B}(A)$$

системы вольтерровых множеств оператора A будем, следуя [6], называть вольтерровой цепочкой этого оператора. Если, кроме того, при некотором $\delta > 0$ выполняется неравенство $\|P_h A P_h\| < \delta$ для каждого $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1, k}$, то цепочку \mathcal{T} будем, следуя [6,7], называть вольтерровой δ -цепочкой оператора A .

В дополнение к перечисленным во введении, будем считать выполненным следующее условие.

А) ЛОО A обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ -цепочкой.

Замечание 4.2. Условие А) часто выполняется в приложениях, см. [11,8].

Кроме того, будем предполагать, что игроки подчиняются следующей иерархии: на каждом шаге (о понятии шага в функционально-

-операторной игре см. ниже) игроку ν известен как свой выбор, так и выбор остальных игроков на всех предыдущих шагах и на данном шаге; игроку j – свой выбор и выбор игроков $i = \overline{1, j-1}$ на данном шаге, а также свой выбор и выбор всех остальных игроков на всех предыдущих шагах, $j = \overline{1, \nu-1}$. Уравнение (4.1) предполагается известным всем игрокам (игра с полной информацией).

Далее мы введем понятие шага в игре, а также определим кусочно-программные стратегии, которые используются в данной игре.

Всякую вольтеррову цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\} \subset \mathcal{B}(A)$ будем называть *вольтерровой цепочкой в данной игре*. При этом систему множеств $\mathcal{T}^{(-)} = \{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1, k}\}$ будем называть *вольтерровым разбиением множества Π в данной игре*.

Для вольтеррова разбиения $\mathcal{T}^{(-)} = \{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1, k}\}$, состоящего из k элементов, уравнение (4.1) распадается в систему k уравнений вида:

$$x_i = \theta_i[x_1, \dots, x_{i-1}] + P_i A P_i \left[f(\cdot, x_i, w_i) \right], \quad x_i \in P_i \mathcal{X}^\ell, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.2)$$

где приняты обозначения:

$$P_i = P_{h_i}, \quad \theta_i = P_i \theta + \sum_{j=1}^{i-1} P_i A P_j \left[f(\cdot, x_j, w_j) \right], \quad w_i = P_i w \in P_i \mathcal{D}, \quad i = \overline{1, k}.$$

В свою очередь, систему (4.2) можно решать последовательно от первого уравнения к k -му: зная решение первого уравнения x_1 , находим решение второго уравнения x_2 ; зная решения x_1, x_2 первых двух уравнений, находим решение третьего уравнения x_3 и т.д. Соответственно этому, при заданном вольтерровом разбиении $\mathcal{T}^{(-)}$ множества Π *ходом j -го игрока на i -м шаге* будем называть выбор управления $u[i, j] \in P_i \mathcal{D}_j$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$. После того, как каждый из игроков сделал свой ход, i -й шаг завершается формированием набора управлений $w_i = \{u[i, 1], \dots, u[i, \nu]\}$ и отысканием соответствующего решения x_i i -го уравнения системы (4.2), $i = \overline{1, k}$. В силу предположений **Н**) указанное решение существует и единственно на каждом шаге. С k -м шагом игра завершается, по найденным w_i и x_i , $i = \overline{1, k}$, найдутся соответственно реализовавшийся набор управлений $w = \sum_{i=1}^k w_i$

и отвечающее ему решение $x = x[w] = \sum_{i=1}^k x_i$ уравнения (4.1), а по ним, в свою очередь, определяются выигрыши игроков $J_j[w]$, $j = \overline{1, \nu}$. Определенную таким образом игру будем обозначать $\Gamma_{\mathcal{T}}$.

Следующее понятие мы вводим в некотором смысле по аналогии с кусочно-программной стратегией в дифференциальной игре, связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из [3, глава V]. Но есть и отличие: в [3, глава V] было только два игрока, и они управляли двумя разными уравнениями, а определяемые стратегии учитывали возможность независимого выбора игроками вольтеррова разбиения. Мы же считаем здесь вольтеррово разбиение фиксированным.

Кусочно-программной стратегией j -го игрока в нашей игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будем называть отображение, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{w_{\kappa} \in P_{\kappa}\mathcal{D} : \kappa = \overline{1, i-1}\}$, а также (с учетом дискриминации предыдущих игроков) набору $u[i, \kappa] \in P_i\mathcal{D}_{\kappa}$, $\kappa = \overline{1, j-1}$, управление $u[i, j] \in P_i\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$.

Множество всех кусочно-программных стратегий j -го игрока обозначим $\Sigma_{\mathcal{T}}^{(j)}$, $j = \overline{1, \nu}$. Управления $w = \sum_{i=1}^k w_i \in \mathcal{D}$, реализовавшиеся в результате выбора набора стратегий $\sigma = \{\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(\nu)}\} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)} \times \dots \times \Sigma_{\mathcal{T}}^{(\nu)}$, будем обозначать w^{σ} , а соответствующее им решение уравнения (4.1), построенное описанным выше движением по цепочке, — x^{σ} . Тогда выигрыш j -го игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будет определяться как

$$K_j[\sigma] = J_j[w^{\sigma}], \quad j = \overline{1, \nu}.$$

Напомним (см., например, [3]), что для любого $\varepsilon > 0$ набор (чистых) стратегий $\sigma_{\varepsilon} = \{\sigma_{\varepsilon}^{(1)}, \dots, \sigma_{\varepsilon}^{(\nu)}\} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)} \times \dots \times \Sigma_{\mathcal{T}}^{(\nu)}$ называется *ε -оптимальным* в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$, если

$$K_j[\sigma_{\varepsilon}] \geq K_j[\sigma^{(j)} = \xi^{(j)}, \sigma^{(i)} = \sigma_{\varepsilon}^{(i)}, i \neq j] - \varepsilon \quad \forall \xi^{(j)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(j)}, \quad j = \overline{1, \nu}.$$

Если такой набор σ_{ε} существует, то говорят, что игра имеет ситуацию ε -равновесия.

Далее будем считать, что $P_i\mathcal{D}_j$ есть семейство функций, равных нулю вне множества h_i , а на множестве h_i принимающих некоторое постоянное значение из компакта $V_{ij} \subset \mathbb{R}^s$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$.

Игру, которая отличается от игры $\Gamma_{\mathcal{T}}$ тем, что множество альтернатив для j -го игрока на i -м шаге сужается с множества V_{ij}^{δ} до конечного множества V_{ij}^{δ} , образующего δ -сеть для него, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$, будем обозначать $\Gamma_{\mathcal{T}}^{\delta}$.

Теорема 4.1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_{\varepsilon} > 0$ такое, что для всякого $\delta \in (0; \delta_{\varepsilon})$ и каждого набора стратегий игроков в исходной игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ найдется набор стратегий в конечной игре $\Gamma_{\mathcal{T}}^{\delta}$ такой, что значения выигрышей каждого из игроков на этих двух наборах будут отличаться менее, чем на ε . Тем самым, для любого $\varepsilon > 0$ игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ имеет ситуацию ε -равновесия.*

Замечание 4.3. Что касается самого по себе существования ситуации ε -равновесия в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$, то оно, видимо, может быть получено как частный случай результатов [4, лемма 1], [5, теорема 2.3.1, с.163].

Доказательство теоремы 4.1 проводится в разделе 5 и опирается на некоторые свойства управляемой задачи, формулируемые в теореме 5.1. Доказательство последней можно найти в [15, теорема 3.1]. Как видно из этого доказательства, теорема 5.1, а следовательно, и теорема 4.1, остается справедливой и в случае $\mathcal{Z} = L_{\infty}$, если предположение **F**₂) заменить следующим.

F₂') Существует неубывающая функция $\mathcal{N} : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}_{+}$ такая, что

$$\left\| f(\cdot, x, w) - f(\cdot, \bar{x}, \bar{w}) \right\|_{\mathcal{Z}^m} \leq \mathcal{N}(M) \left\{ \|x - \bar{x}\|_{\mathcal{X}^{\ell}} + \|w - \bar{w}\|_{\mathcal{U}^{s\nu}} \right\}$$

для всех $x, \bar{x} \in \mathcal{X}^{\ell}$, $w, \bar{w} \in \mathcal{U}^s$, $\|x\|, \|\bar{x}\|, \|w\|, \|\bar{w}\| \leq M$.

5. О непрерывной зависимости функционалов от управления

Мы продолжаем рассматривать функционально-операторную игру, определенную в предыдущем параграфе. При сделанных предположениях существует взаимно однозначное соответствие между множеством \mathcal{D} и компактом $W \subset \mathbb{R}^{sk\nu}$ векторов с компонентами v_{rij} , $r = \overline{1, s}$, $v_{ij} \in V_{ij}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$, которое устанавливается формулой:

$$u_r[j](t) = v_{rij}, \quad t \in h_i, \quad w = \{u[1], \dots, u[\nu]\} \in \mathcal{D}, \quad v \in W.$$

В этом смысле будем использовать обозначения:

$$w = w\{v\}, \quad x\{v\} = x[w\{v\}], \quad J_j\{v\} = J_j[w\{v\}], \quad j = \overline{1, \nu}.$$

Кроме того, положим $J = \{J_1, \dots, J_\nu\}$.

Теорема 5.1. *Отображение $g : W \rightarrow \mathbb{R}^\nu$, определяемое формулой $g\{v\} = J\{v\}$, непрерывно (а следовательно, равномерно непрерывно).*

Как уже было сказано, теорема 5.1 доказана (достаточно нетривиальным образом) в [15, теорема 3.1].

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 5.1, найдется число $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|J_j\{v\} - J_j\{\bar{v}\}| < \varepsilon \quad \forall v, \bar{v} \in W, \quad |v - \bar{v}| < \gamma, \quad j = \overline{1, \nu}.$$

Пусть $i \in \overline{1, k}$, $j \in \overline{1, \nu}$. Поскольку V_{ij} есть компакт, то для любого числа $\delta > 0$ в нем существует конечная δ -сеть V_{ij}^δ . По доказанному, мы можем выбрать число $\delta_\varepsilon > 0$ так, чтобы замена множеств V_{ij} на множества V_{ij}^δ при $\delta \in (0; \delta_\varepsilon)$ в игре Γ_T приводила к изменению значения функционалов $J_j\{v\}$ на величину, меньшую ε . Отсюда очевидным образом следует доказательство теоремы 4.1.

6. Доказательство основного результата

Для того, чтобы получить утверждение теоремы 3.1 как следствие теоремы 4.1, нам необходимо: во-первых, дать строгое определение того, как мы понимаем решение задачи (2.1); во-вторых, привести задачу (2.1) к функционально-операторному уравнению (4.1); в-третьих, проверить для полученного уравнения все наши предположения, сформулированные в разделе 4.

Далее мы используем следующие функциональные пространства (см. [2, §1.1]):

$L_{q,r}(\Pi_T)$, $q, r \geq 1$, – банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Π_T функций с конечной нормой:

$$\|x\|_{L_{q,r}(\Pi_T)} = \left\| \|x(\cdot, t)\|_{L_q(Q)} \right\|_{L_r(0,T)};$$

$W_2^{1,0}(\Pi_T)$ – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $x \in L_2(\Pi_T)$, имеющих все обобщенные производные x'_{t_i} , $i \in \overline{1, n}$,

суммируемые с квадратом на Π_T ; норма

$$\|x\|_{W_2^{1,0}(\Pi_T)} \equiv \left(\|x\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|\nabla_{\bar{t}}x\|_{L_2^n(\Pi)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\nabla_{\bar{t}}x = \{x'_{t_1}, \dots, x'_{t_n}\}$;

$V_2(\Pi_T)$ – банахово пространство, состоящее из всех $x \in W_2^{1,0}(\Pi_T)$, имеющих конечную норму

$$\|x\|_{V_2(\Pi_T)} \equiv \operatorname{vraisup}_{0 \leq t_0 \leq T} \|x(t_0, \cdot)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla_{\bar{t}}x\|_{L_2^n(\Pi)};$$

$V_2^{1,0}(\Pi_T)$ – подпространство пространства $V_2(\Pi_T)$, состоящее из всех $x \in V_2(\Pi_T)$, имеющих на всех сечениях $Q_\tau \equiv \{t \in \Pi_T : t_0 = \tau\}$ цилиндра Π_T , $0 \leq \tau \leq T$, следы из $L_2(Q_\tau)$, непрерывно меняющиеся при изменении τ в норме $L_2(Q)$: $\|x(\tau + \Delta\tau, \cdot) - x(\tau, \cdot)\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0$ при $\Delta\tau \rightarrow +0$; норма $\|x\|_{V_2^{1,0}(\Pi_T)} \equiv \max_{0 \leq t_0 \leq T} \|x(t_0, \cdot)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla_{\bar{t}}x\|_{L_2^n(\Pi_T)}$;

$\overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Pi_T)$ – подпространство $W_2^{1,0}(\Pi_T)$, плотное множество в котором образуют гладкие функции, равные нулю вблизи S_T ;

$V_2^{\circ 1,0}(\Pi_T) = V_2^{1,0}(\Pi_T) \cap \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Pi_T)$ – подпространство $V_2^{1,0}(\Pi_T)$, в котором плотное множество образуют гладкие функции, равные нулю вблизи S_T .

Рассмотрим управляемую распределенную систему (2.1). При нашем выборе чисел q_0, r_0 справедливо [2, §2.3, с.89] непрерывное (то есть ограниченное) вложение $V_2(\Pi) \subset L_{q_0, r_0}(\Pi)$. Кроме того, мы взяли число $q \in (2, \bar{q})$, $\bar{q} = \min\{q_0, r_0\}$. При таком выборе имеем $L_{q_0, r_0}(\Pi) \subset \subset L_{q, q}(\Pi) = L_q(\Pi)$. Таким образом,

$$V_2(\Pi) \subset L_q(\Pi) \subset L_2(\Pi). \quad (6.1)$$

Установленное вложение весьма существенно для наших дальнейших построений. Условия относительно функции f выполняются очевидным образом при $m = \ell = s = 1, p = 2$.

Чтобы определить понятие решения и установить свойства оператора обращения главной части задачи (2.1), рассмотрим далее вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} x'_{t_0} - L[x] = z(t), & t = \{t_0, \bar{t}\} \in \Pi, \\ x|_{t_0=0} = \varphi(\bar{t}), \quad \bar{t} \in Q; & x|_{S_T} = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

предполагая, что $z \in L_2(\Pi)$. Решение задачи (6.2) будем понимать в указанном в [2, §3.1, с.161] обобщенном смысле и искать его соответственно в пространстве $V_2^{\circ 1,0}(\Pi)$.

Замечание 6.1. Заменяя число T на $\tau \in (0, T)$ и множество $\Pi = \Pi_T$ на Π_τ , аналогичным образом получаем определение обобщенного решения задачи (6.2) на цилиндре Π_τ . Из [2, §3.1, с.161] ясно, что всякое решение на множестве Π (глобальное решение) является решением и на множестве Π_τ (локальным решением) для всех $\tau \in (0, T)$. При этом решение на Π_τ никоим образом не зависит от значений функции $z(\cdot)$ вне множества Π_τ .

В соответствии с условиями, наложенными на функцию $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, и установленным вложением (6.1), под обобщенным решением задачи (2.1) естественно понимать функцию $x(\cdot)$ из $V_2^{\circ 1,0}(\Pi)$, которая является обобщенным решением задачи (6.2) при $z(\cdot) = f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$.

Из [2, глава 3, теоремы 2.1, 4.2] вытекает

Лемма 6.1. *Каково бы ни было $n \geq 1$, задача (6.2) имеет при любых $\varphi \in L_2(Q)$ и $z \in L_2(\Pi)$ единственное в пространстве $V_2^{\circ 1,0}(\Pi)$ решение $x(\cdot)$. Для этого решения справедливо энергетическое неравенство*

$$\|x\|_{V_2^{\circ 1,0}(\Pi)} \leq C \cdot \left(\|z\|_{L_2(\Pi)} + \|\varphi\|_{L_2(Q)} \right), \quad (6.3)$$

где постоянная C не зависит от z и φ .

Обозначим $A[z]$ – решение задачи (6.2) при $\varphi = 0$, $\Theta[\varphi]$ – решение задачи (6.2) при $z = 0$. Непосредственно из определения решения видно, что оба этих оператора линейны. Кроме того, согласно лемме 6.1, A можно рассматривать как ЛОО

$$A : L_2(\Pi) \rightarrow V_2^{\circ 1,0}(\Pi) \subset V_2(\Pi) \subset L_q(\Pi),$$

и аналогично, Θ можно рассматривать как ЛОО

$$\Theta : L_2(Q) \rightarrow V_2^{\circ 1,0}(\Pi) \subset V_2(\Pi) \subset L_q(\Pi).$$

При этом решение задачи (6.2) представляется в виде $x = \Theta[\varphi] + A[z]$. В таком случае очевидно, что $x \in V_2^{\circ 1,0}(\Pi)$ будет являться обобщенным решением задачи (2.1) в том, и только в том случае, когда $x(\cdot)$

является решением функционально-операторного уравнения

$$x = \Theta[\varphi] + A \left[f(., x(.), u(.)) \right], \quad x \in V_2^{1,0}(\Pi). \quad (6.4)$$

В силу условий, наложенных на функцию $f(., ., .)$, а также установленных свойств операторов Θ и A и вложения $V_2^{1,0}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$ уравнение (6.4) эквивалентно уравнению

$$x = \Theta[\varphi] + A \left[f(., x(.), u(.)) \right], \quad x \in L_q(\Pi), \quad (6.5)$$

причем можем считать, что $\theta = \Theta[\varphi] \in L_q(\Pi)$, а A рассматривается как ЛОО $A : L_2(\Pi) \rightarrow L_q(\Pi)$.

Остается лишь проверить выполнение предположений **А)** и **Н)**. Непосредственно из замечания 6.1 получаем, что если для некоторого $\tau \in (0, T)$ сужение $z \Big|_{\Pi_\tau} = 0$, а x – решение задачи (6.2) при $\varphi = 0$, то $x \Big|_{\Pi_\tau} = 0$. Иными словами, для $H = \Pi_\tau$, $\tau \in (0, T)$ и оператора P_H умножения на характеристическую функцию χ_H множества H справедливо равенство $P_H A P_{\Pi \setminus H} = 0$. А в таком случае

$$P_H A = P_H A (P_H + P_{\Pi \setminus H}) = P_H A P_H + P_H A P_{\Pi \setminus H} = P_H A P_H,$$

то есть $H = \Pi_\tau \in \mathcal{B}(A)$ для всех $\tau \in (0, T)$. Выберем произвольно число $\sigma > 0$, а также $\tau', \tau'' \in (0, T)$ так, чтобы $0 < \tau'' - \tau' < \sigma$. Рассмотрим множество $h = \Pi_{\tau''} \setminus \Pi_{\tau'}$. Оценим норму $\|P_h A P_h\|_{L_2 \rightarrow L_q}$.

Из проведенных ранее построений видно, что разрешающий оператор A может рассматриваться как ЛОО $A : L_2(\Pi) \rightarrow L_\kappa(\Pi)$ для любого $\kappa \in (q, \bar{q})$. Поэтому для произвольного $z \in L_2(\Pi)$, $\|z\| \leq 1$, имеем: $y = A[\chi_h z] \in L_\kappa(\Pi)$, следовательно, $|y|^q \in L_\alpha(\Pi)$, где $\alpha = \kappa/q > 1$, и таким образом,

$$\left\| |y|^q \right\|_{L_\alpha}^\alpha = \|y\|_{L_\kappa}^\kappa = \left\| A[\chi_h z] \right\|_{L_\kappa}^\kappa \leq \|A\|_{L_2 \rightarrow L_\kappa}^\kappa \cdot \|z\|_{L_2}^\kappa \leq \|A\|_{L_2 \rightarrow L_\kappa}^\kappa \equiv \gamma^\alpha.$$

По неравенству Гельдера, $\left\| P_h A P_h[z] \right\|_{L_q}^q = \left\| \chi_h y \right\|_{L_q}^q \leq \gamma \|\chi_h\|_{L_\beta}$, где $\beta^{-1} + \alpha^{-1} = 1$. Отсюда понятно, что

$$\|P_h A P_h\|_{L_2 \rightarrow L_q} \leq \gamma^{1/q} (\text{mes } h)^{1/(q\beta)} \leq \gamma^{1/q} (\sigma)^{1/(q\beta)} (\text{mes } Q)^{1/(q\beta)} \rightarrow +0$$

при $\sigma \rightarrow +0$. Отсюда ясно, что оператор A обладает вольтерровой δ -цепочкой для всех $\delta > 0$, то есть условие **А)** выполняется.

Таким образом, кроме априорного предположения **H**), все предположения относительно уравнения (6.5), рассматриваемого как уравнение вида (4.1), выполняются. Выполнение предположения **H**) следует непосредственно из предположения **Ψ**), а также результатов [11] и [16].

Пользуясь теоремой 4.1, заключаем, что теорема 3.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А., Морозов В.В. *Введение в теорию игр с приложениями к экономике*. М.: МГУ, 2003.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр*. М.: Высшая школа, 1998.
4. Слобожанин Н.М. *Теорема существования для бесконечных позиционных игр* // Сб. «Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики». Якутск: ЯГУ, 1977. Вып.1. С. 37–42.
5. Слобожанин Н.М. *Информация и управление в динамических играх*. С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. гос. ун-та, 2002.
6. Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
7. Сумин В.И. *Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Матем. моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2(19). С. 138–151.
8. Сумин В.И., Чернов А.В. *Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

9. Чернов А.В. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.
10. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве* // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
11. Чернов А.В. *Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
12. Чернов А.В. *О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
13. Чернов А.В. *О существовании ε -равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации* // Матем. теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 1. С. 74–92.
14. Чернов А.В. *О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
15. Чернов А.В. *О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
16. Чернов А.В. *О неотрицательности решения первой краевой задачи для параболического уравнения* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5 (1). С. 167–170.

ON SOME APPROACH TO CONSTRUCTION OF
 ε -EQUILIBRIUM IN NONCOOPERATIVE N -PERSON
GAMES ASSOCIATED WITH PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State Technical University,
Cand. Sc., Associate Professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is devoted to justification of some comparatively simple algorithm for construction of the Nash ε -equilibrium in noncooperative n -person games associated with evolutionary semilinear partial differential equations. Here, we consider piecewise program strategies, the time step is assumed to be fixed and controls are assumed to be piecewise constant vectors with values from a given compact set in a finite dimensional space. The main idea of the algorithm consists in the approximation of an original game by a finite multistep perfect information game with subsequent applying of the Kuhn algorithm. The basis of the algorithm under study consists in two assertions concerning, firstly, the total preservation of global solvability of controlled distributed parameter systems, and, secondly, the continuous dependence of solutions to them on piecewise constant controls, both having been proved by the author formerly. The paper is conducted on the example of the first boundary value problem associated with a parabolic second order equation of a rather general form.

Keywords: noncooperative n -person game, semilinear partial differential equations, piecewise program strategies, piecewise constant controls, ε -equilibrium.