Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.1, с. 61–73

УДК 519.83
ББК 22.18

ФОРМИРОВАНИЕ НОВЫХ КОАЛИЦИОННЫХ СТРУКТУР В ИГРАХ ГОЛОСОВАНИЯ

Ованес Л. Петросян
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский просп., 35
e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru

Работа посвящена изучению и нахождению метода решения модернизированной игры голосования. Модернизация игры состоит в том, что к игре голосования присоединяется еще один игрок, и его задача состоит в максимизации индекса силы, т.е. своей компоненты вектора Шепли–Шубика при заданном капитале. Делается предположение, что игроки беспрепятственно продают часть своей доли или всю ее вновь пришедшему игроку (т.е. делают это без какой-либо выгоды для себя).

Ключевые слова: игра голосования, вектор Шепли–Шубика, вложение, вето-игрок, множество перспективных коалиций, метод Монте–Карло.

1. Введение

Решение класса игр голосования было сформулировано Шубиком на основе вектора Шепли и получило название вектор Шепли–Шубика [1,2,3].

В работе положено начало изучению нового класса задач, в которых происходит последовательное изменение количества игроков в игре голосования с постоянной суммой с последующим изменением индексов силы. В качестве оптимального дележа в играх голосования может использоваться вектор Шепли–Шубика, т.е. вектор индексов силы, соответствующих каждому игроку в голосовании.

В модернизированной или расширенной игре необходимо максимизировать компоненту вектора Шепли–Шубика, соответствующую вошедшему в игру игроку, который может использовать весь или часть своего капитала на покупку долей у игроков, чтобы войти в игру голосования. Искомая компонента вектора Шепли–Шубика зависит от распределения весов игроков до входа в нее нового игрока и от капитала, который может быть использован для покупки долей у разных игроков. В разделе 2 предлагаются описание игры голосования и ее расширения, в разделе 3 формулируется постановка задачи, и доказываются основные утверждения, в разделе 4 предложен метод и алгоритм решения задачи, а также приведены три примера решения и реализации предложенного алгоритма, в разделе 5 сформулировано заключение.

2. Игры голосования

2.1. Основные определения

Определение 2.1. *Вес a_i игрока i – доля, принадлежащая игроку i и удовлетворяющая следующему условию:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1, \\ a_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – вектор распределения весов игроков.

Замечание 2.1. Обычно игра голосования записывается в виде:
$\Gamma = [\omega, a_1, \ldots, a_n]$, где ω – квота в игре голосования такая, что если сумма весов игроков, входящих в коалицию, строго больше этой доли, то коалиция считается выигрышной, в противном случае коалиция считается проигрышной. Также в играх голосования используется термин: «вето-игрок в коалиции S» – игрок, без которого коалиция S проигрышная, а с ним выигрышная.

Компонента Шепли–Шубика i-го игрока записывается в виде:

$$\varphi_i = \sum_{\substack{i \in S: \\ S \in W, \{S \setminus i\} \notin W}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}, \tag{2.2}$$

где $W = \{S : \sum_{i \in S} a_i \geq \omega\}$, т.е. W – множество выигрышных коалиций в игре Γ, a_i удовлетворяет условию (2.1).

Замечание 2.2. Как видно из формулы (2.2), суммирование ведется только по тем коалициям, в которых i-ый игрок является вето-игроком.

2.2. Расширенная игра голосования

Мы описали игру голосования n лиц Γ. Теперь рассмотрим игру после того, как в ней появился новый $(n+1)$-ый игрок. Пусть M – капитал $(n+1)$-го игрока, выраженный в весе, который может приобрести $(n+1)$-ый игрок. Будем считать, что $M \in (0, 1]$, так как капитал больший 1 рассматривать бессмысленно.

Определение 2.2. *Вложение – вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, характеризующий часть доли, приобретенной $(n+1)$-ым игроком у каждого из игроков, удовлетворяющий условию:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq M, \\ 0 \leq \alpha_i \leq a_i, \; i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.3}$$

где α_i – часть доли, купленной $(n+1)$-ым игроком у i-го игрока.

Чтобы присоединиться к игре, игрок $(n+1)$ должен реализовать вложение α.

Соответственно, в расширенной игре игрок i будет иметь вес $(a_i - \alpha_i)$ для любого $i = 1, \ldots, n$, вес $(n+1)$-го игрока равен $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Тогда, новый вектор распределения весов будет выглядеть следующим образом:

$$a' = (a'_1, \ldots, a'_i, \ldots, a'_n, a'_{n+1}) = \\ = (a_1 - \alpha_1, \ldots, a_i - \alpha_i, \ldots, a_n - \alpha_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i).$$

Тогда расширенная игра голосования определяется так:

$$\Gamma' = [\omega, a'_1, \ldots, a'_i, \ldots, a'_n, a'_{n+1}] = \\ = [\omega, a_1 - \alpha_1, \ldots, a_i - \alpha_i, \ldots, a_n - \alpha_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i].$$

Определение 2.3. *Множество допустимых вложений $I = I(a, M)$ (от слова „Investment“) – множество вложений, удовлетворяющих условию* (2.3) *для заданных весов игроков $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и капитала $(n+1)$-го игрока M.*

Определим множество коалиций, в каждой из которых игрок $(n+$ $+1)$ может стать вето-игроком в расширенной игре Γ'. Запишем условие на вложение α для того, чтобы $(n+1)$-ый игрок стал вето-игроком в коалиции $S \cup \{n+1\}$, где $S \subseteq N$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in S} {a'}_i + {a'}_{n+1} = \sum\limits_{i \in S} a_i + \sum\limits_{i \notin S} \alpha_i \geq \omega, \quad \alpha \in I, \\ \sum\limits_{i \in S} {a'}_i = \sum\limits_{i \in S} a_i - \sum\limits_{i \in S} \alpha_i < \omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Замечание 2.3. Первое неравенство в (2.4) показывает, что коалиция S из игры Γ станет выигрышной в игре Γ', если к ней присоединиться $(n+1)$-ый игрок. Второе неравенство в (2.4) показывает, что коалиция S из игры Γ станет проигрышной в игре Γ' из-за того, что $(n+1)$-ый игрок скупил у нее некоторое количество капитала.

Исходя из формулы (2.2), понятно, что каждая коалиция, в которой $(n+1)$-ый игрок является вето-игроком, обеспечивает приращение $(n+1)$-ой компоненте вектора Шепли–Шубика в расширенной игре Γ' на величину:

$$\frac{(|S+1|-1)!(n+1-|S+1|)!}{(n+1)!} = \frac{|S|!(n-|S|)!}{(n+1)!}. \tag{2.5}$$

Определение 2.4. *Множество коалиций, для каждой из которых множество решений системы* (2.4)*, т.е. множество векторов α, удовлетворяющих системе* (2.4)*, не пусто, называется множеством перспективных коалиций или perspective coalitions (PC).*

Замечание 2.4. Множество коалиций $S \subseteq PC$, для которых выполнено (2.4), определяется однозначно при заданном вложении α. Это множество коалиций определяет компоненту вектора Шепли-Шубика $(n+1)$-го игрока. Обозначим это подмножество αPC. Таким образом, задача максимизации компоненты Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока по α фактически эквивалентна ее максимизации по подмножествам множества PC, т.е. по αPC.

Распишем $(n+1)$-ую компоненту вектора Шепли–Шубика в расширенной игре голосования, используя введенные выше понятия. Для этого обозначим:
W' – множество выигрышных коалиций в игре Γ',
$S' \subseteq \{1, \ldots, n, n+1\}$ – коалиция в игре Γ'.
Тогда

$$\varphi_{n+1} = \sum_{\substack{\{n+1\} \in S': \\ S' \in W', \{S' \setminus \{n+1\}\} \notin W'}} \frac{(|S'|-1)!(n+1-|S'|)!}{(n+1)!} =$$
$$= \sum_{S \in PC} \frac{|S|!(n-|S|)!}{(n+1)!} \cdot K_S(\alpha) = \sum_{S \in \alpha PC} \frac{|S|!(n-|S|)!}{(n+1)!}, \quad (2.6)$$

где $S = S' \setminus \{n+1\}$, и множество PC определяется условием (2.4).

$$K_S(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha \in I : \alpha \text{ удовлетворяет (2.4) для } S \subseteq N \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

или $K_S(\alpha) = 0$, для $S : S \in PC \setminus \alpha PC$ и $K_S(\alpha) = 1$, для $S : S \in \alpha PC$.

Замечание 2.5. Очевидно, что функция K_S принимает ненулевые значения только для тех S, для которых i-ый игрок в расширенной игре Γ' является вето-игроком, что следует из определения вектора Шепли–Шубика.

Необходимо определить множество вложений α, которое максимизирует $(n+1)$-ую компоненту вектора Шепли–Шубика в расширенной игре Γ'.

Определение 2.5. *Множество выгодных вложений или Profitable Investment (PI) – множество векторов $\alpha \in I$, для которых $(n+1)$-ая компонента вектора Шепли–Шубика в игре Γ' принимает максимальное значение.*

Обозначим через α^* любое вложение, принадлежащее PI, и через $\alpha^* PC$ подмножество множества PC, соответствующее α^*, тогда

$$\max_{\alpha\in I}\varphi_{n+1} = \max_{\alpha\in I}\sum_{S\in PC}\frac{|S|!(n-|S|)!}{(n+1)!}\cdot K_S(\alpha) =$$
$$= \sum_{S\in PC}\frac{|S|!(n-|S|)!}{(n+1)!}\cdot K_S(\alpha^*) = \sum_{S\in \alpha^* PC}\frac{|S|!(n-|S|)!}{(n+1)!} = \varphi^*_{n+1}.$$

3. Постановка задачи и основные утверждения

Зная распределение весов $a = (a_1, \ldots, a_n)$, квоту ω, капитал $(n+$ $+1)$-го игрока, требуется найти множество PI и соответствующее значение компоненты вектора Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и существует номер $k \in \{1, \ldots, n\}$, такой что $(a_k - \alpha_k) = 0$. Тогда после входа в игру $(n+1)$-го игрока расширенная игра голосования принимает следующий вид:

$$[\omega, a'_1, \ldots, a'_k, \ldots, a'_n, a'_{n+1}] =$$
$$= [\omega, a_1-\alpha_1, \ldots, a_{k-1}-\alpha_{k-1}, 0, a_{k+1}-\alpha_{k+1}, \ldots, a_n-\alpha_n, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i],$$

т.е. на k-ом месте в векторе распределения весов стоит ноль. Возникает вопрос, можно ли не рассматривать k-го игрока в игре голосования, значительно упростив вычисление φ_{n+1}?

Утверждение 3.1. *Рассмотрим игру голосования следующего вида:*

$$[\omega, a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n] \tag{3.1}$$

и игру голосования вида:

$$[\omega, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n]. \tag{3.2}$$

Пусть к игре голосования (3.1) *и* (3.2) *присоединяется еще один игрок, тогда* $\varphi_{n+1} = \varphi'_{n+1}$, *где* φ_{n+1} *– компонента вектора Шепли–Шубика* $(n+1)$*-го игрока в расширенной игре голосования* (3.1), *а* φ'_{n+1} *– компонента вектора Шепли–Шубика* $(n+1)$*-го игрока в игре голосования* (3.2) *(вся нумерация кроме номера* k *сохраняется).*

Доказательство. Чтобы присоединиться к играм голосования (3.1) и (3.2) $(n+1)$-ый игрок должен реализовать вложение $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Так как $(n+1)$-ая компонента вектора Шепли–Шубика зависит только от коалиций, где $(n+1)$-ый игрок является вето-игроком, то следует рассмотреть только множество таких коалиций.

Рассмотрим множество αPC в игре голосования (3.1). Обозначим соответствующее множество в игре голосования (3.2) через $\alpha PC'$. Очевидно, что αPC состоит их коалиций, принадлежащих множеству $\alpha PC'$ и их расширений игроком k, вес которого равен нулю, т.е.:

$$\alpha PC = \{S : S \in \alpha PC'\} \cup \{S' : \forall S \in \alpha PC', S' = S \cup \{k\}\}, \qquad (3.3)$$

Здесь $\{k\}$ – k-ый игрок, т.е. в нашем случае игрок, имеющий вес равный нулю.

Пусть $S \in \alpha PC'$, и $|S| = i$, тогда, в соответствии с (2.5), этой коалиции соответствует приращение в компоненте вектора Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока:

$$\frac{((i+1)-1)!(n-(i+1))!}{n!} = \frac{i!(n-i-1)!}{n!}. \qquad (3.4)$$

Пусть теперь $S \in \alpha PC$ и $|S| = i$ и $|S'| = i+1$, тогда, в соответствии с (2.5), эти две коалиции дают приращение

$$\frac{((i+1)-1)!((n+1)-(i+1))!}{(n+1)!} + \frac{((i+2)-1)!((n+1)-(i+2))!}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{i!(n-i)! + (i+1)!(n-i-1)!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{i!(n-i-1)!(n-i+i+1)}{(n+1)\cdot n!} =$$
$$= \frac{i!(n-i-1)!}{n!}. \qquad (3.5)$$

То есть получили, что $\varphi_{n+1} = \varphi'_{n+1}$. □

Утверждение 3.2. *Функция $\varphi_{n+1}(\alpha)$, где $\alpha \in I$, принимает конечное число значений.*

Доказательство. Вычисление компоненты вектора Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока строится на множестве PC, т.е. каждому элементу множества PC соответствует приращение компоненты вектора

Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока вида (2.5). Множество PC, в свою очередь, конечное, т.к. это множество коалиционных разбиений.

Из выше изложенного следует, что функция $\varphi_{n+1}(\alpha)$ принимает конечное число значений. $\square$

Используя результат, полученный ранее в утверждении 3.2, получаем:

Утверждение 3.3. *Функция $\varphi_{n+1}(\alpha)$, где $\alpha \in I$, достигает своего максимального значения.*

Следующие утверждения приведем без доказательства, т.к. они очевидны:

Утверждение 3.4. *Для любого $a = (a_1, \dots, a_n)$, удовлетворяющего условию (2.1), и для любого $\alpha \in I : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq \omega$, где $\omega \in (0.5, 1]$ справедливо*

$$\varphi_{n+1} = 1.$$

Утверждение 3.5. *Для того, чтобы $\varphi_{n+1} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющее (2.4) хотя бы для одной коалиции S.*

Утверждение 3.6. *Пусть $\varphi_{n+1}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in I} \varphi_{n+1}(\alpha)$, где $\alpha^* \in PI$. Среди таким образом определенных векторов α^* существует вектор $(\alpha^*)'$, для которого $\sum_{i=1}^{n} (\alpha^*)'_i = M$.*

4. Метод Монте–Карло для нахождения приближенно оптимального решения

Метод заключается в генерации случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n)$, i-ая компонента которого подчиняется равномерному вероятностному распределению на отрезке: $[0, \min(M, a_i)]$. Далее отбираются те ξ, которые принадлежат множеству I, что позволяет их идентифицировать, как вложения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Каждому α соответствует компонента вектора Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока: φ_{n+1}. Взяв из полученных значений φ_{n+1} максимальное, получим приближенное решение поставленной задачи.

Определим множество COI, необходимое для реализации метода Монте-Карло следующим образом:

$$COI = \{\alpha : \alpha_i \in [0, \min(M, a_i)]\}.$$

Следующее утверждение приведем без доказательства, т.к. оно очевидно.

Утверждение 4.1. *Для любого $a = (a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющего условию* (2.1)*, и для любого M справедливо*

$$I \subseteq COI.$$

4.1. Алгоритм нахождения вложения $\alpha \in PI$

В данном разделе приведен алгоритм нахождения вложения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, которое соответствует приближенно максимальной компоненте вектора Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока (т.е. $\alpha \in PI$) в игре Γ'.

1. Генерируется выборка объемом R случайных векторов, имеющих равномерное вероятностное распределение на множестве COI.

2. Из полученной выборки удаляются вектора, не принадлежащие множеству I, т.е. удаляются вектора, не являющиеся вложениями.

   Оценивается количество вложений в множестве COI. Для этого вычисляется частота принадлежности вектора из COI множеству I.

3. Для каждого из оставшихся векторов формируется расширенная игра голосования Γ', каждой из которых соответствует компонента вектора Шепли–Шубика $(n+1)$-го игрока.

4. Выбрав максимальное значение компоненты вектора Шепли–Шубика и соответствующее ей вложение α, получается приближенное решение поставленной задачи.

4.2. Пример 1

Выполнено численное моделирование методом Монте–Карло с помощью программного пакета Maple 13 для игры голосования трех лиц:

$$[0.5; 0.3, 0.5, 0.2].$$

Игра голосования расширяется четвертым игроком с капиталом $M = 0.3$. Необходимо найти вложение $\alpha \in PI$, которое максимизирует компоненту вектора Шепли–Шубика, соответствующую 4-му игроку, в расширенной игре вида

$$[0.5; 0.3 - \alpha_1, 0.5 - \alpha_2, 0.2 - \alpha_3, \sum_{i=1}^{3} \alpha_i].$$

Найдена оценка $\widehat{\varphi}_4^*$ для φ_4^*: $\widehat{\varphi}_4^* = 1/3$. И оценки $\widehat{\alpha}^*$ для различных элементов из множества PI:

1. $\widehat{\alpha}^* = (0.0304, 0.1822, 0.0852), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2979$

2. $\widehat{\alpha}^* = (0.0068, 0.0271, 0.1835), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2175$

3. $\widehat{\alpha}^* = (0.0073, 0.2827, 0.0031), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2932$

4. $\widehat{\alpha}^* = (0.0438, 0.1185, 0.0845), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2469$

5. $\widehat{\alpha}^* = (0.0357, 0.0583, 0.1722), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2664$

6. $\widehat{\alpha}^* = (0.0258, 0.1718, 0.0668), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2645$

7. $\widehat{\alpha}^* = (0.0485, 0.1829, 0.0141), \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2455$

Из полученного набора оценок целесообразно выбрать оценку, требующую наименьшего капитала:

$$\widehat{\alpha}^* = (0.0068, 0.0271, 0.1835), \sum_{i=1}^{3} \widehat{\alpha}_i^* = 0.2175.$$

4.3. Пример 2

Рассмотрим игру голосования трех лиц:

$$[0.5; 0.11, 0.38, 0.26, 0.21, 0.04].$$

Игра голосования расширяется четвертым игроком с капиталом $M = 0.34$. Необходимо найти вложение $\alpha \in PI$, которое максимизирует компоненту вектора Шепли–Шубика, соответствующую 6-му игроку, в расширенной игре вида

$$[0.5; 0.11 - \alpha_1, 0.38 - \alpha_2, 0.26 - \alpha_3, 0.21 - \alpha_4, 0.04 - \alpha_5].$$

Найдена оценка $\widehat{\varphi}_6^*$ для φ_6^*: $\widehat{\varphi}_6^* = 1/2$. И оценки $\widehat{\alpha}^*$ для различных элементов из множества PI:

1. $\widehat{\alpha}^* = (0.08614, 0.2035, 0.0101, 0.0091, 0.0191), \sum\limits_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.32814$

2. $\widehat{\alpha}^* = (0.0903, 0.1534, 0.0566, 0.0057, 0.0268), \sum\limits_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.333$

3. $\widehat{\alpha}^* = (0.0643, 0.1075, 0.084, 0.0382, 0.0388), \sum\limits_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.3329$

4. $\widehat{\alpha}^* = (0.0925, 0.1679, 0.0284, 0.023, 0.0208), \sum\limits_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.3329$

5. $\widehat{\alpha}^* = (0.0808, 0.16439, 0.0415, 0.0165, 0.0057), \sum\limits_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.309$

6. $\widehat{\alpha}^* = (0.0294, 0.1877, 0.0865, 0.009, 0.0176), \sum\limits_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.3304$

Из полученного набора оценок целесообразно выбрать оценку, требующую наименьшего капитала:

$$\widehat{\alpha}^* = (0.0808, 0.16439, 0.0415, 0.0165, 0.0057), \sum_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.309.$$

4.4. Пример 3

Рассмотрим игру голосования трех лиц:

$$[0.5; \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}].$$

Игра голосования расширяется четвертым игроком с капиталом $M = 0.34$. Необходимо найти вложение $\alpha \in PI$, которое максимизирует компоненту вектора Шепли–Шубика, соответствующую 8-му игроку, в расширенной игре вида

$$[0.5; \frac{1}{7} - \alpha_1, \frac{1}{7} - \alpha_2, \frac{1}{7} - \alpha_3, \frac{1}{7} - \alpha_4, \frac{1}{7} - \alpha_5, \frac{1}{7} - \alpha_6, \frac{1}{7} - \alpha_7].$$

Найдена оценка $\widehat{\varphi}_8^*$ для φ_8^*: $\widehat{\varphi}_8^* = 1/2$. И оценка $\widehat{\alpha}^*$ для элементов из множества PI:

$$\widehat{\alpha}^* = (0.0401, 0.0494, 0.0471, 0.0548, 0.0523, 0.0421, 0.0495), \sum_{i=1}^{5} \widehat{\alpha}_i^* = 0.3357.$$

5. Заключение

В работе исследовались условия, при которых входящий в игру игрок может обеспечить себе положительную компоненту вектора Шепли–Шубика. Интересным представляется вопрос когда компонента вектора Шепли–Шубика будет превосходить вкладываемый капитал M. Из рассмотренных примеров видно, что $(n+1)$-ый игрок может получить значение компоненты вектора Шепли–Шубика намного большее, чем вкладываемый капитал. Это обстоятельство может быть интерпретировано, как мотивация для вступления $(n+1)$-го игрока в игру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория Игр.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2012.

2. Hu X. *An asymmetric Shapley-Shubik power index* // International Journal of Game Theory. 2006. V. 34. N 1. P. 229–240.

3. Shapley L.S., Shubik M. *A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System* // American Political Science Review. 1954. V. 48. N 3. P. 787–792.

4. Shapley L.S., Shubik M. *On market games* // Journal of Economic Theory. 1969. V. 1. N 1. P. 9–25.

FORMATION OF NEW STRUCTURE OF COALITIONS IN VOTING GAMES

Ovanes L. Petrosian, Saint-Petersburg State University, student (petrosian.ovanes@yandex.ru).

Abstract: The new $(n+1)$st player enters the voting game and buys the stock from another players, investing the vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq M, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$. The optimal investment is defined as α^*, which maximizes the component of Shapley–Shubik value of entering player. The mathematical statement of the problem is given, some properties of the optimal investment are considered and Monte–Karlo method for the calculation of optimal investment is proposed.

Keywords: voting game, Shapley–Shubic value, profitable investment, perspective coalitions, veto-player, Monte–Karlo method.