

УДК 519.83

ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ С МНОГОЧЛЕНАМИ

НИКОЛАЙ Н. ПЕТРОВ*

Удмуртский государственный университет

426034, Ижевск, ул. Университетская, 1

e-mail: kma3@list.ru

Вычислена цена игры и найдены оптимальные по Нэшу стратегии игроков в антагонистической игре, в которой игроки поочередно заменяют коэффициенты многочлена $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - 1$ вещественными числами. Один из игроков стремится к тому, чтобы многочлен имел как можно больше попарно различных вещественных корней. Цель другого противоположная.

Ключевые слова: позиционная игра, равновесие по Нэшу, цена игры, многочлен.

1. Введение

В [3] был рассмотрен следующий класс позиционных антагонистических игр. Дан многочлен

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_n, \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$

Двое поочередно заменяют один из коэффициентов a_i (каждый коэффициент используется только один раз) произвольным вещественным числом. Один из игроков стремится к тому, чтобы многочлен (1.1) имел как можно больше попарно различных вещественных корней (число корней – выигрыш данного игрока), другой – к тому, чтобы многочлен (1.1) имел как можно меньше попарно различных вещественных корней (число корней – проигрыш данного игрока).

Была вычислена цена игры и найдены оптимальные по Нэшу (основные определения можно найти в [4]) стратегии игроков как для многочлена $f(x)$ вида (1.1), так и для многочлена $f(x)$, у которого $a_n = 1$.

Некоторые другие игры с многочленами приведены в [2].

В данной работе будем рассматривать многочлен

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - 1, \quad n \geq 1. \quad (1.2)$$

Обозначим через Γ_1 антагонистическую игру, в которой первый игрок стремится к тому, чтобы многочлен (1.2) имел как можно больше попарно различных вещественных корней (число корней – выигрыш первого игрока), через Γ_2 – антагонистическую игру, в которой второй игрок стремится к тому, чтобы многочлен (1.2) имел как можно больше вещественных корней (число корней – выигрыш второго игрока). Вычислена цена игры и найдены оптимальные по Нэшу стратегии игроков для каждой из игр Γ_1, Γ_2 .

2. Вспомогательные результаты

Лемма 2.1. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Если уравнение $f'(x) = 0$ имеет k попарно различных вещественных корней, то уравнение $f(x) = 0$ имеет не более $k + 1$ попарно различных вещественных корней.

Лемма является следствием теоремы Ролля [1].

Лемма 2.2. Пусть $f(x) = \frac{Q(x)}{x^k}$, где $Q(x)$ – многочлен. Тогда

1. Если f' не имеет корней, то при любом c уравнение $f(x) = c$ имеет не более двух различных вещественных корней.
2. Если f' имеет один корень, то при любом c уравнение $f(x) = c$ имеет не более трех различных вещественных корней.

Доказательство. 1. Если f' не имеет корней, то f' сохраняет знак на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Поэтому функция f строго монотонна на каждом интервалов.

2. Если f' имеет корень x_0 (пусть $x_0 < 0$), то f строго монотонна на каждом из интервалов $(-\infty, x_0)$, $(x_0, 0)$, $(0, \infty)$. \square

Лемма 2.3. Пусть дан многочлен

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad a_0 > 0$$

такой, что $f(x_1) < 0, f(x_2) < 0$ при некоторых $x_1 < 0 < x_2$.

Тогда многочлен f имеет, по крайней мере, два вещественных корня разных знаков, каждый из которых является либо простым, либо корнем нечетной кратности.

Доказательство. Так как $f(0) > 0$, то f имеет не менее двух вещественных корней разных знаков.

Покажем, что все корни многочлена f не могут быть корнями четной кратности. Предположим, что все корни z_1, \dots, z_l многочлена f имеют четную кратность. Тогда

$$f(x) = (x - z_1)^{2k_1} \cdot \dots \cdot (x - z_l)^{2k_l} Q(x),$$

где многочлен Q не имеет вещественных корней. Поэтому $Q(x) > 0$ для всех x . Тогда $f(x_1) \geq 0$. Получили противоречие.

Предположим, что f имеет ровно один корень z_0 нечетной кратности. Тогда

$$f(x) = (x - z_0)^{2l+1} \cdot (x - z_1)^{2k_1} \cdot \dots \cdot (x - z_l)^{2k_l} Q(x),$$

где многочлен Q не имеет вещественных корней. Поэтому $Q(x) > 0$ для всех x . Следовательно, многочлен f имеет четную степень. Значит справа многочлен имеет нечетную степень. Получили противоречие.

Предположим теперь, что f имеет корни y_1, \dots, y_s нечетной кратности только одного знака. Тогда s четно и

$$f(x) = (x - y_1)^{2k_1+1} \cdot \dots \cdot (x - y_s)^{2k_s+1} Q(x),$$

где многочлен $Q(x) \geq 0$ для всех x . Поэтому, если все $y_i > 0$, то $f(x_1) \geq 0$. Если же все $y_i < 0$, то $f(x_2) \geq 0$. Получили противоречие. Следовательно, многочлен f имеет хотя бы два корня разных знаков, каждый из которых является либо простым, либо корнем нечетной кратности. \square

Лемма 2.4. Пусть дан многочлен

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad a_0 > 0.$$

Тогда для любых нечетных натуральных чисел k и l ($k < l$) существуют вещественные числа b_k, b_l такие, что многочлен

$$g(x) = f(x) + b_kx^k + b_lx^l$$

имеет, по крайней мере, два вещественных корня разных знаков, каждый из которых является либо простым, либо корнем нечетной кратности.

Доказательство. Пусть $a = \max_{[-1,1]} f(x)$. Возьмем $\beta > 0$ такое, что

$$(a + \beta) \left(\frac{k}{2l}\right)^{\frac{k}{l-k}} \left(1 - \frac{k}{l}\right) > a.$$

Полагаем

$$b_l = -2(a + \beta), \quad b_k = (a + \beta), \quad y = -\left(\frac{k}{2l}\right)^{\frac{1}{l-k}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1) + b_k + b_l \leq a - (a + \beta) = -\beta < 0, \quad g(0) = a_0 > 0, \\ g(y) &= f(y) + b_ky^k + b_ly^l = f(y) + (a + \beta)y^k [1 - 2y^{l-k}] \leq \\ &\leq a - (a + \beta) \left(\frac{k}{2l}\right)^{\frac{k}{l-k}} \left(1 - \frac{k}{l}\right) < 0. \end{aligned}$$

Получили, что на каждом из интервалов $(y, 0)$, $(0, 1)$ многочлен g имеет хотя бы один корень. Используя лемму 2.3, получаем требуемое утверждение. \square

Лемма 2.5. Пусть дан многочлен

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad (a_0 > 0).$$

Тогда для любого натурального нечетного числа k и любого четного натурального числа l существуют вещественные числа b_k, b_l такие, что многочлен $g(x) = f(x) + b_kx^k + b_lx^l$ имеет, по крайней мере, два вещественных корня разных знаков, каждый из которых является либо простым, либо корнем нечетной кратности.

Доказательство. Пусть $l > k$, $a = \max_{[-1,1]} f(x)$, $p(x) = -b_k x^k - b_l x^l$.

Полагаем $b_k = a$, $b_l = -3a$. Тогда корнями многочлена p' будут $x_1 = 0$, $x_2 = \left(\frac{k}{3l}\right)^{\frac{1}{l-k}}$ при $k > 1$ и x_2 при $k = 1$. Функция p убывает на $(-\infty, x_2]$ и возрастает на $[x_2, \infty)$. Отсюда и из условия $p(0) = 0$ следует, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $p(x) < 0$ для всех $x \in (0, \varepsilon_1)$.

Из условия $a_0 > 0$ следует, что существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $f(x) > 0$ для всех $x \in [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1\}$, $y \in (0, \varepsilon)$. Тогда $p(y) < f(y)$ и

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1) - p(1) \leq a - 2a = -a < 0, \\ g(-1) &= f(-1) - p(-1) \leq a - 4a = -3a < 0, \\ g(y) &= f(y) - p(y) > 0, \quad g(0) = a_0 > 0. \end{aligned}$$

Получили, что на каждом из интервалов $(-1, 0)$, $(y, 1)$ многочлен g имеет хотя бы один корень. Случай $l < k$ рассматривается аналогично. Далее осталось воспользоваться леммой 2.3. \square

Лемма 2.6. Пусть дан многочлен

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad a_0 > 0,$$

имеющий, по крайней мере, два вещественных корня разных знаков, каждый из которых либо простой, либо корень нечетной кратности. Тогда для любого $b \in \mathbb{R}^1$ и любого нечетного $s \in \mathbb{N}$ уравнение $f(x) = bx^s$ имеет хотя бы один вещественный корень, который является либо простым, либо корнем нечетной кратности.

Доказательство. По условию существуют $x_1 < 0 < x_2$ такие, что $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Если $b = 0$, то x_1, x_2 — требуемые корни. Пусть $b \neq 0$. Рассмотрим многочлен $g(x) = f(x) - bx^s$.

а) $b > 0$. Тогда $g(0) = a_0 > 0$, $g(x_2) = f(x_2) - bx_2^s < 0$. Поэтому многочлен g имеет корень на $(0, x_2)$.

б) $b < 0$. Тогда $g(x_1) < 0$, $g(0) > 0$. Поэтому многочлен g имеет корень на $(x_1, 0)$.

Покажем, что среди корней многочлена g имеется либо простой корень, либо корень нечетной кратности. Предположим, что все корни z_1, \dots, z_l многочлена g являются корнями четной кратности. Тогда

$$g(x) = (x - z_1)^{2k_1} \cdot \dots \cdot (x - z_l)^{2k_l} Q(x),$$

где многочлен Q не имеет вещественных корней и поэтому $Q(x) > 0$ для всех x . Тогда $g(x_1) = f(x_1) - bx_1^s = -bx_1^s \geq 0$ и, следовательно, $b \geq 0$. Кроме того, $g(x_2) = f(x_2) - bx_2^s = -bx_2^s \geq 0$ и, следовательно, $b \leq 0$. Получили противоречие. \square

3. Вычисление цены игры

Теорема 3.1. В игре Γ_1 с многочленом

$$f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x - 1$$

цена игры равна 1.

Доказательство. Отметим, что многочлен f имеет хотя бы один корень и последний ход в игре делает второй игрок. Докажем, что существует поведение второго игрока, при котором многочлен f будет иметь не более одного корня. До последнего хода второй игрок делает произвольные ходы.

Пусть a_k – коэффициент, оставшийся второму игроку перед его последним ходом. Уравнение $f(x) = 0$ эквивалентно уравнению

$$g(x) = x^{2n+1-k} + a_{2n}x^{2n-k} + \dots + \frac{a_1}{x^{k-1}} - \frac{1}{x^k} = -a_k.$$

Возможны два случая.

1. k – четно. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Поэтому, выбирая a_k отрицательным и достаточно большим по модулю, второй игрок получит, что уравнение $h(x) = -a_k$ имеет один корень.

2. k – нечетно. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = -\infty.$$

Поэтому, выбирая a_k положительным и достаточно большим, второй игрок получит, что уравнение $h(x) = -a_k$ имеет один корень. \square

Теорема 3.2. В игре Γ_2 с многочленом

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x - 1$$

цена игры равна 2.

Отметим, что многочлен f имеет, по крайней мере, два корня, последний ход в игре делает первый игрок, который стремится к тому, чтобы корней было как можно меньше. Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.3. В игре Γ_1 с многочленом

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x - 1, \quad n \geq 3$$

цена игры равна 4.

Доказательство. Рассмотрим

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \dots + a_1$$

и докажем, что существует поведение второго игрока, при котором f' имеет не более трех корней. Тогда, по лемме 2.1, многочлен f имеет не более четырех корней. Возможны следующие варианты.

1. Первый игрок своим первым ходом выбирает $a_1 \neq 0$. Тогда второй игрок до своего последнего хода действует произвольным образом. Пусть перед последним ходом второго игрока свободными остались коэффициенты a_l и a_k , ($k, l > 1$) и второй игрок выбирает a_l . Уравнение $f'(x) = 0$ эквивалентно уравнению

$$f_1(x) = \frac{g(x)}{x^{k-1}} = -a_k k, \quad (3.1)$$

где $g(x)$ – многочлен, полученный после хода второго игрока. Тогда $f_1'(x) = \frac{g_1(x)}{x^k}$, где

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g'(x) \cdot x - (k-1)g(x) = \\ &= 2n(2n-k)x^{2n-l} + \dots + l(l-k)a_l x^{l-1} + \dots - a_1(k-1). \end{aligned}$$

Уравнение $g_1(x) = 0$ равносильно уравнению

$$h(x) = 2n(2n-k)x^{2n-l} + \dots + \frac{a_1(1-k)}{x^{l-1}} = -a_l l(l-k). \quad (3.2)$$

Тогда имеем

1a. Если l — чётно, $a_1 > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty.$$

1b. Если l — чётно, $a_1 < 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty.$$

1c. Если l — нечётно, $a_1 > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \infty.$$

1d. Если l — нечётно, $a_1 < 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

Следовательно, второй игрок своим последним ходом может выбрать a_l так, чтобы уравнение (3.2) имело один корень. По лемме 2.2 уравнение (3.1), а значит и уравнение $f'(x) = 0$ имеет не более трех корней при любом a_k . Поэтому многочлен $f(x)$ имеет не более четырех корней.

2. Первый игрок своим первым ходом выбирает a_s , $s > 1$. Тогда второй игрок своим первым ходом выбирает $a_1 \neq 0$, а далее действует как в пункте **1**.

3. Первый игрок своим первым ходом выбирает $a_1 = 0$. Тогда второй игрок своим первым ходом выбирает $a_2 < 0$. Далее до своего последнего хода второй игрок выбирает (пока это возможно) коэффициенты при нечетных степенях x (например, равными нулю). Пусть a_k, a_l , ($k, l > 2$) — свободные коэффициенты перед последним ходом второго игрока. Тогда хотя бы одно из чисел k, l чётно (считаем, что l). Покажем, что второй игрок может выбрать a_l так, чтобы уравнение $f''(x) = 0$ имело не более двух корней. В этом случае, многочлен f будет иметь не более четырех корней.

Уравнение $f''(x) = 0$ равносильно уравнению

$$f_1(x) = \frac{g(x)}{x^{k-2}} = -k(k-1)a_k,$$

где $g(x)$ – многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом и свободным членом $2a_2 < 0$. Тогда $f'_1(x) = \frac{g_1(x)}{x^{k-1}}$, где $b_{2n-2} = 2n(2n-1)(2n-k)$,

$$g_1(x) = b_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + l(l-1)(l-k)a_l x^{l-2} + \dots - 2a_2(k-2).$$

Уравнение $f'_1(x) = 0$ равносильно уравнению $g_1(x) = 0$. Последнее уравнение равносильно уравнению

$$\frac{g_2(x)}{x^{l-2}} = -l(l-1)(l-k)a_l, \quad (3.3)$$

где $g_2(x)$ – многочлен степени $(2n-2)$ с положительным старшим коэффициентом и свободным членом $-2a_2(k-2)$. Перед последним ходом второго игрока все коэффициенты многочлена g_2 известны. Так как $-2a_2(k-2) > 0$ и l -четно, то

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g_2(x)}{x^{l-2}} = \lim_{x \rightarrow 0\pm} \frac{g_2(x)}{x^{l-2}} = +\infty,$$

и поэтому второй игрок может выбрать a_l так, чтобы уравнение (3.3) не имело корней. Тогда по лемме 2.2 уравнение $f_1(x) = c$ при любом c имеет не более двух корней. Следовательно, уравнение $f''(x) = 0$ имеет не более двух корней.

Тем самым доказано, что второй игрок может добиться того, чтобы многочлен f имел не более четырех корней.

Докажем, что существует поведение первого игрока, при котором уравнение $f(x) = 0$ будет иметь не менее четырех корней. Так как $f(0) < 0$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, то для этого достаточно доказать, что либо при некоторых $0 < x_1 < x_2$ будут выполняться неравенства

$$f(x_1) > 0, \quad f(x_2) < 0, \quad (3.4)$$

либо при $x_1 < x_2 < 0$ будут выполняться неравенства

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0.$$

Так как общее количество неизвестных коэффициентов многочлена f нечетно, то последний ход делает первый игрок. До своего предпоследнего хода первый игрок выбирает коэффициенты так, чтобы

после каждого его хода среди оставшихся неизвестных коэффициентов число коэффициентов с нечетными индексами было на 2 больше числа коэффициентов с четными индексами, при этом первый игрок должен делать выбор коэффициента с наименьшим номером. Следовательно, перед предпоследним ходом первого игрока оставшиеся коэффициенты a_s, a_m, a_k будут следующими:

а) s, m, k – нечетные числа;

б) s – четно, k, m – нечетные.

Рассмотрим вариант а). Считаем, что $s < k, s < m$. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{f_1(x)}{x^m}$, где $f_1(x) = f(x) - a_m x^m$. Тогда $g'(x) = \frac{f_2(x)}{x^{m+1}}$, где $f_2(x)$ – многочлен степени $2n$ с положительными старшим и свободным коэффициентами. Уравнение $g'(x) = 0$ эквивалентно уравнению $f_2(x) = 0$, которое запишем в виде

$$F(x) + (s - m)a_s x^s + (k - m)a_k x^k = 0, \quad (3.5)$$

где $F(x)$ – многочлен степени $2n$ с положительным свободным членом и положительным старшим коэффициентом, при этом перед предпоследним ходом первого игрока все коэффициенты $F(x)$ известны.

По лемме 2.4 существуют b_s, b_k такие, что уравнение

$$F(x) + b_s x^s + b_k x^k = 0$$

имеет хотя два корня разных знаков. Первый игрок своим предпоследним ходом выбирает $a_s = \frac{b_s}{s-m}$. Уравнение (3.5) представим в виде

$$F(x) + b_s x^s + b_k x^k + ((k - m)a_k - b_k)x^k = 0. \quad (3.6)$$

По лемме 2.6 для любого $b = (k - m)a_k - b_k$ уравнение (3.6) имеет хотя бы один корень x_1^0 , который является простым или корнем нечетной кратности. Получили, что многочлен f_2 имеет хотя бы один корень. Если $b < 0$, то в силу леммы 2.6, x_1^0 – положительный корень. Считаем, что x_1^0 – наименьший положительный корень f_2 . Так как $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$, то существует точка $z \in (0, \infty)$ такая, что $g''(z) = 0$, причем z либо простой корень, либо корень нечетной кратности. Отметим, что $x_1^0 \neq z$. Возьмем в качестве x_2^0 корень g'' являющийся простым или корнем нечетной кратности, причем $x_2^0 > x_1^0$

и на $(0, x_2^0)$ нет других корней g' кроме x_1^0 . Тогда $g'(x) < 0$ для всех $x \in (x_1^0, x_2^0)$. Возьмем $x_1, x_2 \in (x_1^0, x_2^0)$ такие, что $0 < x_1 < x_2$. Тогда $g(x_1) > g(x_2)$. Возьмем b_m так, что

$$g(x_2) < b_m < g(x_1).$$

Первый игрок выбирает своим последним ходом $a_m = -b_m$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + a_m x^m = f_1(x) - b_m x^m, \\ g(x_2) - b_m &= \frac{f_1(x_2)}{x_2^m} - b_m = \frac{f(x_2)}{x_2^m} < 0. \end{aligned}$$

Поэтому $f(x_2) < 0$. Кроме того $g(x_1) - b_m = \frac{f(x_1)}{x_1^m} > 0$. Следовательно, $f(x_1) > 0$. Тем самым доказано существование x_1, x_2 , для которых выполнены неравенства (3.4). Случай $b \geq 0$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь случай б). Пусть $g(x) = \frac{f_1(x)}{x^m}$, где $f_1(x) = f(x) - a_m x^m$. Тогда $g'(x) = \frac{f_2(x)}{x^{m+1}}$, где $f_2(x)$ – многочлен степени $2n$ с положительными старшим и свободным коэффициентами. Уравнение $g'(x) = 0$ эквивалентно уравнению $f_2(x) = 0$, которое запишем в виде

$$F(x) + (s - m)a_s x^s + (k - m)a_k x^k = 0,$$

где $F(x)$ – многочлен степени $2n$ с положительным свободным членом и положительным старшим коэффициентом, при этом перед предпоследним ходом первого игрока все коэффициенты многочлена $F(x)$ известны.

По лемме 2.5 существуют b_s, b_k такие, что уравнение

$$F(x) + b_s x^s + b_k x^k = 0$$

имеет хотя два корня разных знаков. Первый игрок своим предпоследним ходом выбирает $a_s = \frac{b_s}{s-m}$. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично соответствующим рассуждениям пункта а). \square

Теорема 3.4. В игре Γ_1 с многочленом

$$f(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x - 1$$

цена игры равна 2.

Доказательство. Так как многочлен $f(x)$ имеет не менее двух корней, то достаточно доказать, что существует поведение второго игрока, при котором многочлен f имеет не более двух корней.

1. Первый игрок выбирает $a_1 = 0$ ($a_2 = 0$), тогда второй выбирает $a_2 = 0$ ($a_1 = 0$). Получаем $f'(x) = x^2(4x + 2a_3)$.

2. Первый игрок выбирает $a_1 \neq 0$, тогда второй выбирает $a_2 < 0$ так, чтобы $a_1^2 + 3a_2 < 0$. Покажем, что при любом a_3 многочлен имеет не более двух корней. Уравнение $f(x) = 0$ перепишем в виде

$$g(x) = \frac{x^4 + a_2x^2 + a_1x - 1}{x^3} = -a_3.$$

Тогда

$$g'(x) = \frac{x^4 + (-a_2x^2 - 2a_1x + 3)}{x^4}.$$

В силу выбора a_2 , имеем $-a_2x^2 - 2a_1x + 3 > 0$ для всех x .

3. Первый игрок выбирает $a_2 < 0$, второй выбирает a_1 так, чтобы $a_1^2 + 3a_2 < 0$.

4. Первый игрок выбирает $a_2 > 0$, второй выбирает $a_3 = 0$. Тогда $f''(x) = 12x^2 + 2a_2 > 0$ для всех x .

5. Первый выбирает $a_3 = 0$, второй — $a_2 = 0$.

6. Первый выбирает $a_3 \neq 0$, второй выбирает a_2 так, чтобы выполнялось неравенство $9a_3^2 - 24a_2 < 0$. Тогда $f''(x) = 2(6x^2 + 3a_3x + a_2) > 0$ для всех x . \square

Теорема 3.5. В игре Γ_2 с многочленом

$$f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_2x^2 + a_1x - 1, \quad n \geq 2$$

цена игры v удовлетворяет неравенству $3 \leq v \leq 5$.

Доказательство. Отметим, что последний ход в данной игре делает второй игрок. Поэтому он может выбрать своим последним ходом оставшийся коэффициент так, чтобы выполнялось неравенство

$$f(-1) = -2 + (a_{2n} + \dots + a_2) - (a_{2n-1} + \dots + a_1) > 0.$$

Тогда на каждом из интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$ многочлен f имеет хотя бы один корень. Поэтому $v \geq 3$.

Рассмотрим

$$f'(x) = (2n + 1)x^{2n} + \dots + 2a_2x + a_1$$

и докажем, что первый игрок может добиться того, что многочлен f' имеет не более четырех корней. Тогда многочлен f имеет не более пяти корней и, следовательно, $v \leq 5$.

Первый игрок своим первым ходом выбирает $a_1 = -1$ и далее до своего последнего хода действует произвольным образом. Пусть перед последним ходом первого игрока свободными коэффициентами остались $a_k, a_l, k, l \geq 2$ и первый игрок выбирает a_k . Уравнение $f'(x) = 0$ представим в виде

$$f_1(x) = \frac{g(x)}{x^{l-1}} = -a_l \cdot l,$$

где

$$g(x) = (2n + 1)x^{2n} + \dots + a_k k x^{k-1} + \dots + 2a_2x - 1.$$

Тогда

$$f_1'(x) = \frac{(2n + 1)(2n + 1 - l)x^{2n} + \dots + a_k k(k - l)x^{k-1} + \dots + (l - 1)}{x^l}.$$

Уравнение $f_1'(x) = 0$ равносильно уравнению

$$\frac{(2n + 1)(2n + 1 - l)x^{2n} + \dots + (l - 1)}{x^{k-1}} = -a_k k(k - l), \quad (3.7)$$

причем все коэффициенты числителя в правой части перед последним ходом первого игрока определены. Поэтому первый игрок может выбрать a_k так, чтобы уравнение (3.7) имело два корня.

Тогда уравнение $f'(x) = 0$, в силу леммы 2.2, имеет не более четырех корней. \square

Теорема 3.6. *В игре Γ_2 с многочленом*

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$$

цена игры равна 3.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа. Т.1.* М.: Высш.шк., 1988.
2. Петров Н.Н. *Математические игры.* М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
3. Петров Н.Н., Протасова Е.А. *Игры с многочленами // Проблемы управления и информатики.* 1995. № 6. С. 105–115.
4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высш. шк., 1998.

ABOUT THE ONE POLYNOMIAL GAME

Nikolay N. Petrov, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Izhevsk, Dr.Sc., prof. (kma3@list.ru).

Abstract: Game value has been calculated and has been found by Nash player's strategies in zero-sum game in which players alternately change the coefficients of polynomial $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - 1$ with real numbers. One of the players is interested to maximize the number of different roots of the polynomial. The opponent has the opposite goal.

Keywords: polynomial game, Nash equilibrium, game value.