

УДК 519.217.8, 519.833

ББК 22.18

ИГРЫ СРЕДНЕГО ПОЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОЦЕССАМИ УСТОЙЧИВОГО ТИПА

ВАСИЛИЙ Н. КОЛОКОЛЬЦОВ*

Факультет Статистики

Университет Варвик

Великобритания, Ковентри, CV4 7AL, UK

e-mail: v.kolokoltsov@warwick.ac.uk

МАРИАННА С. ТРОЕВА**

Северо-Восточный федеральный университет

677000, Якутск, ул. Белинского, 58

e-mail: troeva@mail.ru

ВЕЙ ЯНГ

Факультет Математики и Статистики

Университет Стратклайд

Великобритания, Глазго, G1 1XH, UK

e-mail: w.yang@strath.ac.uk

Исследуются игры среднего поля большого числа N агентов, связанные с нелинейными процессами устойчивого типа.

©2013 В.Н. Колокольцов, М.С. Троева, В. Янг

* Работа выполнена при поддержке Института проблем информатики РАН, РФФИ (проекты 11-01-12026, 12-07-00115), частично поддержана Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР

** Работа частично поддержана Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР

Основным результатом является утверждение, что любое решение предельной системы связанных обратного и прямого уравнений Колмогорова (т.е. основной системы уравнений игры среднего поля) порождает $1/N$ -Нэш равновесие для аппроксимирующей игры N агентов.

Ключевые слова: процессы устойчивого типа, кинетическое уравнение, система прямых и обратных уравнений, динамический закон больших чисел, скорость сходимости, меченые частицы, ε -Нэш равновесие.

1. Введение

Игры среднего поля (mean field game (MFG)) впервые были введены и исследованы Ж.-М. Ласри и П.-Л. Лионсом (см. [38, 18]), М. Хуанг, Р.П. Маламэ и П. Кейнсом (см. [19–24]) и активно развиваются в работах других авторов.

В основе методологии теории игр среднего поля лежит понятие «среднего поля», которое используется в физике элементарных частиц для описания взаимодействия между большим количеством частиц. Это взаимодействие учитывает воздействие «среднего поля» на каждую частицу, а вклад каждой частицы считается бесконечно малым.

В играх среднего поля исследуются управляемые процессы с большим числом N агентов посредством изучения предела при $N \rightarrow \infty$, когда вклад каждого агента становится пренебрежимо малым и их взаимодействие осуществляется через некоторые характеристики среднего поля, которые могут быть выражены в терминах эмпирических мер. Характерной особенностью MFG-анализа является изучение связанной системы «обратного» уравнения для функций (уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана) и «прямого» уравнения для вероятностных законов (уравнение Колмогорова).

В препринте [33] развита общая методология, основанная на теории полугрупп операторов в бесконечномерных функциональных пространствах, для анализа игр среднего поля и получения точной скорости сходимости для игр с произвольными базовыми марковскими процессами. На основе этой методологии в работе [35] исследована

сходимость аппроксимации средним полем управляемого нелинейного диффузионного процесса с большим числом игроков.

В данной работе развивается этот подход для случая нелинейных процессов устойчивого типа с переменными коэффициентами. При работе с процессами устойчивого типа применение операторных методов, какие здесь используются, становятся еще насущнее, чем для диффузионных процессов, где использование хорошо развитой техники стохастических дифференциальных уравнений Ито является естественным альтернативным подходом. Теория стохастических дифференциальных уравнений для процессов устойчивого типа по существу находится в зачаточном состоянии (см., например, [6]).

Новыми техническими ингредиентами, необходимыми для работы с устойчивыми процессами (по сравнению с ранее исследованными диффузиями) являются модифицированные оценки сглаживания для решения соответствующего прямого уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, а также новые представления для операторов предельных полугрупп, порожденных решениями кинетических уравнений, и возникающих при анализе нелокальных генераторов, которые описывают марковские процессы с прыжками (например, устойчивые движения Леви).

Устойчивые законы и устойчивые процессы являются естественным обобщением гауссовских (нормальных) законов и гауссовских процессов. Общие устойчивые законы характеризуются (классифицируются) параметром $\alpha \in (0, 2)$, называемым иногда индексом устойчивости; гауссовское распределение соответствует индексу $\alpha = 2$.

Поскольку техника работы с процессами с $\alpha \in (1, 2)$ и $\alpha \in (0, 2)$ слегка отличается, данная работа концентрируется на случае $\alpha \in (1, 2)$. Заметим также, что α считается постоянным для упрощения изложения. Предложенные методы почти автоматически переносятся на случай переменной функции $\alpha(x)$ со значениями в замкнутом подинтервале из $(1, 2)$.

Основное отличие устойчивых законов от нормального закона заключается в существовании, так называемых, «тяжелых хвостов». В распределениях с «тяжелыми хвостами» вероятность отклонений от средних значений существенно больше чем в нормальном распределении, и уменьшается не экспоненциально (как в случае нормального

распределения), а как степень x при $x \rightarrow \infty$.

Значение устойчивых законов в теории вероятностей связано с тем, что, с одной стороны, пределы сумм надлежащим образом масштабированных независимых одинаково распределенных случайных величин с бесконечной дисперсией всегда распределяются (если они существуют) в соответствии с устойчивым законом, и с другой стороны, устойчивые законы дают важный частный случай безгранично делимых распределений. Устойчивые процессы представляют простейшие негауссовские примеры общих процессов Леви (процессы со стационарными независимыми приращениями).

Теория устойчивых процессов и процессов устойчивого типа в настоящее время активно развивается (см., например, [27, 28, 34, 45, 46, 2]) и представляет интерес не только с точки зрения теории случайных процессов, но и в связи с тем, что они могут найти широкое применение в моделировании многих физических явлений, реальных процессов в экономике, медицине и других областях (например, в моделировании значений фондовых индексов, прибылей финансовых активов, техногенных аварий, природных катастроф и др.).

Предположим, что положение агента описывается точкой в $\mathbf{R}^d$. Положение N агентов определяется тогда точкой в пространстве $\mathbf{R}^{dN}$. Естественным пространством состояний для описания переменного числа агентов является объединение $\hat{\mathcal{X}} = \cup_{j=1}^{\infty} \mathbf{R}^{dj}$. Обозначим через $C_{\text{sym}}(\mathbf{R}^{dN})$ банаховы пространства симметричных (относительно перестановки всех аргументов), ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}^{dN}$ и через $C_{\text{sym}}(\hat{\mathcal{X}})$ соответствующее пространство функций на полном пространстве $\hat{\mathcal{X}}$. Будем обозначать элементы $\hat{\mathcal{X}}$ жирными буквами, например, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Уменьшение множества наблюдаемых до $C_{\text{sym}}(\hat{\mathcal{X}})$ означает фактически, что наше пространство состояний не является $\hat{\mathcal{X}}$ (или $\mathbf{R}^{dN}$ в случае фиксированного числа агентов), а скорее, фактор-пространством $S\hat{\mathcal{X}}$ (или $S\mathbf{R}^{dN}$ соответственно), полученным факторизацией относительно действия группы перестановок, которое позволяет отождествления $C_{\text{sym}}(\hat{\mathcal{X}}) = C(S\hat{\mathcal{X}})$ и $C_{\text{sym}}(\mathbf{R}^{dN}) = C(S\mathbf{R}^{dN})$. Очевидно, что $S\hat{\mathcal{X}}$ можно отождествить с множеством всех конечных наборов точек из $\mathbf{R}^d$, причем порядок не имеет значения.

Ключевую роль в теории мерозначных пределов систем взаимо-

действующих частиц играет включение $S\hat{\mathcal{X}}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ (множество вероятностных законов на $\mathbf{R}^d$), заданное следующим отображением:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \mapsto \frac{1}{N}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_N}) = \frac{1}{N}\delta_{\mathbf{x}}, \quad (1.1)$$

которое определяет биекцию между $S\mathbf{R}^{dN}$ и подмножеством $\mathcal{P}_{\delta}^N(\mathbf{R}^d)$ (нормализованные суммы масс Дирака) множества $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$.

Замечание 1.1. С небольшим нарушением правил обозначения, мы используем $\delta_{\mathbf{x}}$ чтобы обозначить сумму мер Дирака на $\mathbf{R}^d$, т.е.

$$\delta_{\mathbf{x}} := \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_N},$$

и не является мерой Дирака на $\hat{\mathcal{X}}$ с носителем в точке $\mathbf{x}$.

Приведем обозначения некоторых пространств функций, которые будут использованы в работе.

$C^n(\mathbf{R}^d)$ – банахово пространство n раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных функций f на $\mathbf{R}^d$ таких, что каждая производная вплоть до порядка n ограничена, снабженное нормой $\|f\|_{C^n}$, которая является точной верхней гранью сумм абсолютных величин всех производных вплоть до порядка n .

$C_{\infty}(\mathbf{R}^d)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ с $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, снабженное $\sup$ -нормой.

$C_{\infty}^n(\mathbf{R}^d)$ – замкнутое подпространство пространства $C^n(\mathbf{R}^d)$, содержащее такие функции f , что $f^{(l)} \in C_{\infty}(\mathbf{R}^d)$, $l = 0, \dots, n$; иногда мы используем короткое обозначение C_{∞}^n и C_{∞} , соответственно.

Пусть $\{A[t, \mu, u]\}$ – семейство генераторов процессов устойчивого типа $\mathbf{R}^d$ с индексом устойчивости $\alpha \in (1, 2)$, где $t \geq 0$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ (множество положительных Борелевских мер на $\mathbf{R}^d$) и $u \in \mathcal{U}$ (компактное метрическое пространство, рассматриваемое как множество допустимых управлений). Точнее пусть

$$A[t, \mu, u]f(z) = (h(t, z, \mu, u), \nabla f(z)) - a(z)|\Delta|^{\alpha/2}f(z), \quad (1.2)$$

с коэффициентом сноса $h(t, z, \mu, u)$, непрерывно зависящим от $t \in [0, \infty)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ и $z \in \mathbf{R}^d$, коэффициентом масштаба $a(z)$, непрерывно зависящим от $z \in \mathbf{R}^d$. Естественной областью определения $A[t, \mu, u]$ является пространство $C_{\infty}^2(\mathbf{R}^d)$.

Напомним, что дробный лапласиан может быть представлен в виде интегрального оператора:

$$|\Delta|^{\alpha/2} f(z) = \int \left(f(x+y) - f(x) - \frac{(f'(x), y)}{1+|y|^2} \right) \frac{dy}{|y|^{d+\alpha}}. \quad (1.3)$$

Предположим, что управление каждого агента задается некоторым отображением $\gamma : [0, \infty) \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathcal{U}$. Для любого N определим следующее (зависящее от времени) семейство операторов на $C_{\text{sym}}(\mathbf{R}^{dN})$:

$$\hat{A}_t^N[\gamma]f(\mathbf{x}) = \hat{A}_t^N[\gamma]f(x_1, \dots, x_N) := \sum_{i=1}^N A^i[t, \mu, u_i]f(x_1, \dots, x_N), \quad (1.4)$$

где

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} = \frac{1}{N} \delta_{\mathbf{x}}$$

есть эмпирическое распределение агентов, $u_i = \gamma(t, x_i)$ и $A^i[t, \mu, u_i]f$ означает действие оператора $A[t, \mu, u_i]$ на i -ую переменную функции f . При стандартных предположениях о непрерывности коэффициентов сноса и масштаба в $A[t, \mu, u]$, семейство $\hat{A}_t^N[\gamma]$ порождает марковский процесс $X^N = \{X^N(t) = (X_1^N(t), \dots, X_N^N(t) : t \geq 0)\}$ на $\mathbf{R}^{dN}$ для любого N [34]. Мы будем называть его управляемым (посредством управления γ) процессом с N агентами, взаимодействующими посредством среднего поля.

Используя отображение (1.1), мы можем перенести наш процесс с N агентами из $S\mathbf{R}^{dN}$ в $\mathcal{P}_\delta^N(\mathbf{R}^d)$. Это приводит к следующему оператору на $C(\mathcal{P}_\delta^N(\mathbf{R}^d))$ (множество непрерывных ограниченных функций на $\mathcal{P}_\delta^N(\mathbf{R}^d)$):

$$\hat{A}_t^N[\gamma]F(\delta_{\mathbf{x}}/N) = \hat{A}_t^N[\gamma]f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N A^i[t, \mu, u_i]f(x_1, \dots, x_N), \quad (1.5)$$

где $f(\mathbf{x}) = F(\delta_{\mathbf{x}}/N)$ и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

Как будет показано, при выполнении определенных условий регулярности на коэффициенты a и h в (1.2) соответствующая марковская эволюция эмпирических мер $\delta_{\mathbf{x}}/N$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к детерминированной эволюции, определяемой слабым кинетическим уравнением

$$\frac{d}{dt}(f, \mu_t) = (A[t, \mu_t, \gamma(t, \cdot)]f, \mu_t), \quad \mu_0 = \mu, \quad (1.6)$$

которое должно выполняться для всех гладких $f \in C_\infty^2(\mathbf{R}^d)$. Здесь (f, μ_t) означает обычное спаривание функции f и меры μ_t , т.е.

$$(f, \mu_t) = \int f(x) \mu_t(dx).$$

Предположим, что, для заданного конечного момента $T > 0$, плата каждого агента имеет интегральную составляющую с плотностью $J : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ и терминальную составляющую $V^T : \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$.

Пусть $\{\mu_t^N\} = \{\mu_t^N : t \in [0, T]\}$ обозначает семейство эмпирических мер процесса X^N

$$\mu_t^N := \frac{1}{N}(\delta_{X_1^N(t)} + \dots + \delta_{X_N^N(t)}), \quad t \in [0, T].$$

Для заданного $\{\mu_t^N\} = \{\mu_t^N, t \in [0, T]\}$ с начальным значением $\mu_0^N \in \mathcal{M}$ и стратегии управления $\{u_{i,\cdot}\} = \{u_{i,t}, t \in [0, T]\}$ ожидаемый выигрыш i -го игрока $V_i : [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ в момент времени t и состоянии x определяется в виде

$$\begin{aligned} V_i(t, x; \mu_0^N)[\{u_{i,\cdot}\}] &= \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_t^T J(s, X_i^N(s), \mu_s^N, u_{i,s}) ds + V^T(X_i^N(T), \mu_T^N) \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Предположим, что каждый агент пытается максимизировать свой ожидаемый общий выигрыш. Следовательно, при любой заданной кривой $\{\mu_t\} = \{\mu_t, t \in [0, T]\}$, функция значения $V : [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ любого агента в среднем поле в момент времени t и состоянии x определяется в виде:

$$\begin{aligned} V(t, x; \{\mu_s : s \in [t, T]\}) &:= \\ &= \sup_{\{u_\cdot\}} \mathbb{E}_x \left[\int_t^T J(s, X_s, \mu_s, u_s) ds + V^T(X_T, \mu_T) \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

где супремум берется по допустимому классу управлений $\{u_\cdot\}$. Согласно принципу динамического программирования при выполнении соответствующих условий регулярности, значение функции V удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t}(t, x; \{\mu_\cdot\}) &= H_t(x, \nabla V(t, x; \{\mu_\cdot\}), \mu_t) - a(x)|\Delta|^{\alpha/2} V(t, x; \{\mu_\cdot\}), \\ V(T, x; \{\mu_\cdot\}) &= V^T(x; \mu_T), \end{aligned} \quad (1.9)$$

с гамильтонианом $H : [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$, определяемым в виде

$$H_t(x, p, \mu) := \max_{u \in \mathcal{U}} \{h(t, x, \mu, u)p + J(t, x, \mu, u)\}. \quad (1.10)$$

Для любой заданной кривой $\{\mu_\cdot\}$, корректность (1.9) хорошо известный факт, см., например, [31] для доказательства существования и единственности мягкого решения уравнения (1.9). Обозначим получающееся из (1.10) оптимальное управление через

$$\Gamma(t, x, \{\mu_{\geq t}\}) := \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \{h(t, x, \mu_t, u) \nabla V(t, x; \{\mu_\cdot\}) + J(t, x, \mu_t, u)\},$$

где $\{\mu_{\geq t}\}$ – сокращенная запись для $\{\mu_s : s \geq t\}$.

Таким образом, если каждый агент выбирает управление с помощью уравнения НЖВ (1.9), заданного кривой эмпирических мер $\{\hat{\mu}_t : t \in [0, T]\}$, т.е. с

$$\gamma(t, x) = \Gamma(t, x, \{\hat{\mu}_{\geq t}\}), \quad (1.11)$$

то реальная нелинейная эволюция мер $\{\mu_t : t \in [0, T]\}$ определяется как решение кинетического уравнения (1.6). Соответствующее *условие MFG-согласованности (или фиксированной точки)* $\{\hat{\mu}_\cdot\} = \{\mu_\cdot\}$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt}(f, \mu_t) = (A[t, \mu_t, \Gamma(t, \cdot, \{\mu_{\geq t}\})]f, \mu_t), \quad (1.12)$$

которое выражает связь нелинейного марковского процесса, определяемого уравнением (1.12) и задачи оптимального управления, определяемой уравнением НЖВ (1.9). Локальная корректность и глобальное существование решений (1.12) при более общих предположениях получены в [32].

Теперь разумно ожидать, что, если число агентов N стремится к бесконечности таким образом, что предельная эволюция корректно определена и удовлетворяет предельному уравнению (1.12) с Γ , выбранным из решения вышеприведенного уравнения НЖВ (1.9), тогда управление γ (1.11) и соответствующие выигрыши представляют ε -Нэш равновесие для управляемой системы N агентов, с $\varepsilon \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Это утверждение (или гипотеза) представляет суть *методологии MFG*.

При определенных предположениях о семействе операторов $\{A[t, \mu, u]\}$ в (1.2), мы собираемся обосновать это утверждение, показывая, что порядок ε будет $1/N$.

Оставшаяся часть работы организована следующим образом. В разделе 2 приведены некоторые вспомогательные результаты, необходимые для нашего анализа. Раздел 3 посвящен гладкой зависимости (чувствительности) нелинейных марковских процессов от входных данных. Эта гладкая зависимость является главным ингредиентом в доказательстве динамических законов больших чисел и получения соответствующих оценок погрешностей, что изложено в разделе 4. Раздел 5 завершает нашу программу, подтверждая аппроксимацию N -агентной стохастической игры пределом среднего поля.

В работе будут использованы следующие основные обозначения:

Для банахова пространства $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^*$ – сопряженное банахово пространство с нормой $\|\mu\|_{\mathbf{B}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathbf{B}} \leq 1} |(f, \mu)|$.

Для линейного оператора L между Банаховыми пространствами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$, мы используем стандартное обозначение для его нормы

$$\|L\|_{\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}} = \sup_{\|g\|_{\mathbf{D}}=1} \|Lg\|_{\mathbf{B}};$$

в частности, $\|L\|_{\mathbf{B}} = \|L\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}}$.

Если $\mathcal{M}$ замкнутое подмножество Банахова пространства $\mathbf{B}$, то

$C([0, T], \mathcal{M})$ – метрическое пространство непрерывных функций $t \rightarrow \mu_t \in \mathcal{M}$ с расстоянием $\|\eta - \xi\|_{C([0, T], \mathcal{M})} = \sup_{t \in [0, T]} \|\eta_t - \xi_t\|_{\mathbf{B}}$. Элемент из $C([0, T], \mathcal{M})$ записывается как $\{\mu.\} = \{\mu_t, t \in [0, T]\}$.

2. Вспомогательные результаты

В данном разделе мы приведем некоторые предварительные сведения, в основном известные, необходимые для нашего анализа.

Для функции $F : \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$, ее *вариационная производная* $\frac{\delta F}{\delta \mu(y)}(\mu)$ в $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ по направлению $y \in \mathbf{R}^d$ определяется соотношением

$$\frac{\delta F}{\delta \mu(y)}(\mu) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{F(\mu + s\delta_y) - F(\mu)}{s},$$

если предел существует, где $\delta_y \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ обозначает дельта-функцию на $\mathbf{R}^d$.

Для множества S семейство отображений $U^{t,r}$ из S в себя, параметризованное парой чисел $r \leq t$ (соответственно $t \leq r$) из заданного конечного или бесконечного интервала, называется *прямым пропагатором* (соответственно *обратным пропагатором*) в S , если $U^{t,t}$ – единичный оператор в S для всех t и следующее *цепное правило* (*правило композиции*) или *пропагаторное уравнение* выполняется для $r \leq s \leq t$ (соотв. для $t \leq s \leq r$):

$$U^{t,s}U^{s,r} = U^{t,r}.$$

Обратный пропагатор $U^{t,r}$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ называется *сильно непрерывным*, если операторы $U^{t,r}$ зависят сильно непрерывно от t и r .

Предположим $U^{t,r}$ – сильно непрерывный обратный пропагатор ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве с общей инвариантной областью определения $\mathbf{D}$. Пусть L_t , $t \geq 0$ – семейство ограниченных линейных операторов: $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}$, зависящих непрерывно от t . Будем говорить, что семейство L_t порождает $U^{t,r}$ на $\mathbf{D}$, если для любого $f \in \mathbf{D}$ выполняются уравнения

$$\frac{d}{ds}U^{t,s}f = U^{t,s}L_s f, \quad \frac{d}{ds}U^{s,r}f = -L_s U^{s,r}f, \quad 0 \leq t \leq s \leq r, \quad (2.1)$$

где производные существуют в топологии банахова пространства $\mathbf{B}$.

Часто приходится оценивать разность двух пропагаторов, когда доступна разность их генераторов. Для этого можно использовать следующий довольно стандартный прием, который мы сформулируем сейчас в абстрактной форме (доказательство см., например, [27]).

Утверждение 2.1. Пусть L_t^i , $i = 1, 2$, $t \geq 0$ – два семейства, непрерывных по t , ограниченных линейных операторов: $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}$ ($\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – два банаховых пространства, снабженных непрерывным включением $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$) и $U_i^{t,r}$ – два обратных пропагатора в $\mathbf{B}$ с $\|U_i^{t,r}\|_{\mathbf{B}} \leq c_1$, $i = 1, 2$, т.ч. для любого $f \in \mathbf{D}$ уравнения (2.1) выполняются в $\mathbf{B}$ для обеих пар (L_i, U_i) . Пусть $\mathbf{D}$ инвариантна относительно $U_1^{t,r}$ и $\|U_1^{t,r}\|_{\mathbf{D}} \leq c_2$. Тогда

$$U_2^{t,r} - U_1^{t,r} = \int_t^r U_2^{t,s}(L_s^2 - L_s^1)U_1^{s,r} ds \quad (2.2)$$

и

$$\|U_2^{t,r} - U_1^{t,r}\|_{\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}} \leq c_1 c_2 (r - t) \sup_{t \leq s \leq r} \|L_s^1 - L_s^2\|_{\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}}. \quad (2.3)$$

Как следствие, мы получаем следующий результат о непрерывной зависимости пропагаторов от параметра.

Утверждение 2.2. Пусть $\{L[t, \alpha] : t \geq 0, \alpha \in \mathbf{R}\}$ – семейство непрерывных по t и α , ограниченных линейных операторов: $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}$ ($\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – два банаховых пространства, снабженных непрерывным включением $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$) и $U_\alpha^{t,r}$ – обратные пропагаторы в $\mathbf{B}$, порожденные $\{L[t, \alpha]\}$ на общей инвариантной области определения $\mathbf{D}$, т.ч. $\|U_\alpha^{t,r}\|_{\mathbf{B}}$ и $\|U_\alpha^{t,r}\|_{\mathbf{D}}$ – равномерно ограниченные. Тогда семейство $\{U_\alpha^{t,r}\}$ сильно непрерывно зависит от α , как семейство операторов в $\mathbf{B}$.

Затем, нам будет нужен простой результат о непрерывной зависимости неподвижной точки от параметров сжатых отображений.

Утверждение 2.3. Пусть $\mathbf{B}$ – банахово пространство, Π – его замкнутое подпространство, $\{v_\alpha\}$ – ограниченное семейство векторов из $\mathbf{B}$ и F_α – семейство непрерывных линейных операторов: $\mathbf{B} \rightarrow \Pi$, оба семейства непрерывно зависящие от параметра α , взятого из произвольного метрического пространства, и такие, что $\sup_\alpha \|F_\alpha\| < 1$. Пусть Π_α – множество $\Pi_\alpha = \{v_\alpha + w : w \in \Pi\}$ такое, что отображение $\Phi_\alpha : p \mapsto v_\alpha + F_\alpha p$ отображает Π_α в себя. Тогда для любого α отображение Φ_α имеет единственную неподвижную точку в Π_α , которая непрерывно зависит от α .

Доказательство. Так как

$$\Phi_\alpha(p_1) - \Phi_\alpha(p_2) = F_\alpha(p_1 - p_2),$$

и $\sup_\alpha \|F_\alpha\| < 1$, то Φ_α есть сжатие, и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку, обозначаемую p_α . Более того, для всех α_1, α_2

$$\begin{aligned} p_{\alpha_1} - p_{\alpha_2} &= \Phi_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}) - \Phi_{\alpha_2}(p_{\alpha_2}) = v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} + F_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}) - F_{\alpha_2}(p_{\alpha_2}) \\ &= v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} + F_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}) - F_{\alpha_2}(p_{\alpha_1}) + F_{\alpha_2}(p_{\alpha_1} - p_{\alpha_2}), \end{aligned}$$

так что

$$p_{\alpha_1} - p_{\alpha_2} = (1 - F_{\alpha_2})^{-1}[v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2} + F_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}) - F_{\alpha_2}(p_{\alpha_1})].$$

Следовательно $p_{\alpha_1} \rightarrow p_{\alpha_2}$, когда $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, в силу непрерывности v_α и F_α . $\square$

Вернемся к генераторам процессов устойчивого типа. Для семейства операторов $A[t, \mu] : C_\infty^2(\mathbf{R}^d) \rightarrow C_\infty(\mathbf{R}^d)$

$$A[t, \mu]f(z) = (h(t, z, \mu), \nabla f(z)) - a(z)|\Delta|^{\alpha/2}f(z), \quad (2.4)$$

зависящего от μ из выпуклого замкнутого множества мер

$$\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) : \Lambda^{-1} \leq \|\mu\| \leq \Lambda\}$$

с любым $\Lambda > 1$, введем следующие условия:

C1) $a \in C_\infty^2(\mathbf{R}^d)$ и удовлетворяет условию

$$\Omega^{-1} \leq a(z) \leq \Omega$$

для всех $z \in \mathbf{R}^d$ и постоянной $\Omega > 1$;

C2) h непрерывна по t и является Липшиц-непрерывной как функция от z , равномерно по другим переменным;

C3) Вариационная производная

$$\frac{\delta h}{\delta \mu(y)}(t, z, \mu)$$

принадлежит $C_\infty^2(\mathbf{R}^d)$ как функции от y равномерно по другим переменным.

Отметим, что во всех практических приложениях функционалы от мер μ задаются в виде интегралов

$$\int g(x_1, \dots, x_m) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_m).$$

В этом случае гладкость в смысле вариационных производных эквивалентна обычной гладкости функции плотности g .

Топология на $\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$, удобная для дальнейшего, является топологией сопряженного банахова пространства $(C_\infty^2(\mathbf{R}^d))^*$, т.е. для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{(C_\infty^2(\mathbf{R}^d))^*} := \sup\{(f, \mu_1 - \mu_2) : \|f\|_{C_\infty^2(\mathbf{R}^d)} \leq 1\}.$$

Как легко видеть, эта метрика порождает на $\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$ обычную слабую топологию.

Приведем следующий результат о некоторых свойствах гладкости в процессах устойчивого типа [34].

Утверждение 2.4. (i) При выполнении условий C1), C2) для любого заданного $\mu \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$, существует единственный обратный пропагатор $U^{t,s}$, порожденный генератором $A[t, \mu]$ и определяющий Феллеровский процесс устойчивого типа. (ii) Более того, пространства $C_\infty^1(\mathbf{R}^d)$ и $C_\infty^2(\mathbf{R}^d)$ являются инвариантными относительно этого пропагатора и $U^{t,s}$ являются равномерно ограниченными отображениями $C^1(\mathbf{R}^d) \rightarrow C^1(\mathbf{R}^d)$ и $C_\infty^1(\mathbf{R}^d) \rightarrow C_\infty^1(\mathbf{R}^d)$ для $0 \leq t < s \leq T$. (iii) Наконец, если снос $h = 0$, то операторы $U^{t,s}$ отображают $C_\infty(\mathbf{R}^d)$ в $C_\infty^1(\mathbf{R}^d)$ при $t < s$, и

$$\|U^{t,s}\phi\|_{C_\infty^1(\mathbf{R}^d)} \leq \frac{c}{(s-t)^{1/\alpha}} \|\phi\|_{C_\infty(\mathbf{R}^d)} \quad (2.5)$$

для $t < s < T$, $\alpha \in (1, 2)$, всех $\phi \in C_\infty(\mathbf{R}^d)$ и постоянной $c > 0$.

Утверждение 2.5. (i) При выполнении условий C1) - C3), задача Коши

$$\frac{d}{dt}(f, \mu_t) = (A[t, \mu_t]f, \mu_t), \quad \mu_s = \mu, \quad t \geq s, \quad (2.6)$$

является корректной, т.е. имеет единственное решение для любого заданного $\mu_s \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$.

Доказательство. Следует из основной теоремы 7.9 из [28], если принять во внимание, что условие C3) влечет за собой свойство непрерывности по Липшицу h :

$$\|h(t, z, \{\xi.\}) - h(t, z, \{\eta.\})\| \leq c_1 \sup_{t \in [0, T]} \|\xi_t - \eta_t\|_{(C_\infty^1(\mathbf{R}^d))^*}, \quad (2.7)$$

для положительной постоянной c_1 . □

Замечание 2.1. Напомним, наконец, что если A_t – семейство операторов, порождающих обратный пропагатор $U^{t,r}$ и F_t – семейство отображений в $C_\infty(\mathbf{R}^d)$, то интегральное уравнение

$$g_t = U^{t,r} g_r + \int_t^r U^{t,s} F_s g_s ds \quad (2.8)$$

называется мягкой формой дифференциальной задачи Коши

$$\dot{g} = A_t g + F_t g, \quad g_r = g. \quad (2.9)$$

Функция g_t , которая удовлетворяет интегральному уравнению (2.8) с начальным условием g_r , называется *мягким решением* задачи Коши (2.9).

(Понятие «мягкое решение» для абстрактной задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения было рассмотрено, например, в работе [44]. В русскоязычной научной литературе этот термин употребляется редко, но в последнее время встречается в некоторых работах, см., например, [1]).

3. Гладкая зависимость нелинейных процессов от начальных данных

Далее зафиксируем наши банаховы пространства

$$\mathbf{D} = C_\infty^2(\mathbf{R}^d), \quad \mathbf{B} = C_\infty(\mathbf{R}^d).$$

Сопряженное пространство $\mathbf{B}^*$ – пространство ограниченных Борелевских зарядов (мер со знаком) на $\mathbf{R}^d$. Действие элементов $\mathbf{D}^* = (C_\infty^2(\mathbf{R}^d))^*$ на функции из $\mathbf{D}$ может быть описано интегрированием производных относительно определенных мер, см. [28].

В данном разделе, наша цель – доказать гладкость решений μ_t кинетического уравнения

$$\frac{d}{dt}(f, \mu_t) = (A[t, \mu_t]f, \mu_t) \quad (3.1)$$

относительно начальных данных $\mu_0 \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$, где для каждого $(t, \mu) \in [0, T] \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$, $A[t, \mu] : C_\infty^2(\mathbf{R}^d) \rightarrow C_\infty(\mathbf{R}^d)$

$$A[t, \mu]f(z) = (h(t, z, \mu), \nabla f(z)) - a(z)|\Delta|^{\alpha/2}f(z) \quad (3.2)$$

удовлетворяют условиям C1)-C3).

На самом деле, нам нужно существование и регулярность вариационной производной μ_t первого и второго порядка относительно μ_0 . Как следствие, мы собираемся доказать, что пропагатор линейных преобразований функционалов от мер вида

$$(\Phi^{s,t}F)(\mu_s) := F(\mu_t(\mu_s)), \quad 0 \leq s \leq t \quad (3.3)$$

сохраняет множество дважды дифференцируемых функционалов $F(\mu)$, где $\mu_t(\mu_s)$ обозначает решение кинетического уравнения (3.1) с начальным условием μ_s в момент времени $s \geq 0$.

Для семейства исходных данных μ_0^α , зависящих от вещественного параметра α , нас интересует производная по этому параметру

$$\xi_t^\alpha = \frac{\partial \mu_t^\alpha}{\partial \alpha}, \quad \text{для всех } t \geq 0 \quad (3.4)$$

соответствующих решений μ_t^α уравнения (3.1).

Дифференцируя (3.1) по α , получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}(f, \xi_t^\alpha) = (A[t, \mu_t^\alpha]f, \xi_t^\alpha) + (\phi_t[\mu_t^\alpha]f, \xi_t^\alpha), \quad (3.5)$$

с начальным условием

$$\xi_0 = \xi_0^\alpha = \frac{\partial \mu_0^\alpha}{\partial \alpha}, \quad (3.6)$$

где

$$\phi_t[\mu]f(y) = \int \frac{\delta A[t, \mu]}{\delta \mu(y)} f(z) \mu_t^\alpha(dz) \quad (3.7)$$

с

$$\frac{\delta A[t, \mu]}{\delta \mu(y)} f(z) = \left(\frac{\delta h}{\delta \mu(y)}(t, z, \mu), \nabla f(z) \right). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.5) является сопряженным к уравнению

$$\frac{d}{dt} f_t^\alpha = -A[t, \mu_t^\alpha]f_t^\alpha - \phi_t[\mu_t^\alpha]f_t^\alpha. \quad (3.9)$$

По предположению С3), оператор $\phi_t[\mu]$ в (3.5) – ограниченный линейный оператор: $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ и $C_\infty^1(\mathbf{R}^d) \rightarrow C_\infty^1(\mathbf{R}^d)$. Следовательно, по стандартной теории возмущений и утверждению 2.4, мягкие решения (3.9) корректно определены и образуют ограниченный пропагатор в $\mathbf{D}$ и в $C_\infty^1(\mathbf{R}^d)$. Следовательно, сопряженный ему прямой пропагатор определен в $\mathbf{D}^*$ и $(C_\infty^1(\mathbf{R}^d))^*$, и дает единственное мягкое решение задачи Коши для уравнения (3.5), которое является решением мягкой формы этого уравнения:

$$\xi_r^\alpha = (U_\alpha^{t,r})^* \xi_t^\alpha + \int_t^r (U_\alpha^{s,r})^* \phi_s^*[\mu_s^\alpha] \xi_s^\alpha ds, \quad t \leq r, \quad (3.10)$$

или в слабой форме

$$(f, \xi_r^\alpha) = (U_\alpha^{t,r} f, \xi_t^\alpha) + \int_t^r (\phi_s[\mu_s^\alpha] U_\alpha^{s,r} f, \xi_s^\alpha) ds, \quad f \in \mathbf{D}. \quad (3.11)$$

где $\phi_t^*[\mu]$ – сопряженный оператор к $\phi_t[\mu]$ и $(U_\alpha^{t,r})^*$ – сопряженный оператор к $U_\alpha^{t,r}$.

Теорема 3.1. *При предположениях C1)-C3), пусть производная*

$$\xi_0^\alpha = \frac{\partial \mu_0^\alpha}{\partial \alpha}$$

определена в $\mathbf{D}^$ для некоторого семейства начальных данных $\mu_0^\alpha \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)$ (с производными, существующими в топологии, задаваемой нормой $\mathbf{D}^*$). Тогда правая часть (3.4) существует для всех $\alpha \in \mathbf{R}$ (производная берется в топологии, задаваемой нормой $\mathbf{D}^*$) и совпадает с единственным решением $\xi_t^\alpha = \xi_t^\alpha(\xi_0^\alpha, \mu_0^\alpha)$ уравнения (3.10).*

Доказательство. Выберем семейство ограниченных операторов $A[t, \mu](n) : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ и семейство ограниченных операторов $\phi_t[\mu](n) : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, являющихся также ограниченными операторами в $\mathbf{D}$, $n = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют всем тем условиям, что $A[t, \mu]$ и $\phi_t[\mu]$, и такие, что

$$\|(A[t, \mu](n) - A[t, \mu])g\|_{\mathbf{B}} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|(\phi_t[\mu](n) - \phi_t[\mu])g\|_{\mathbf{D}} \rightarrow 0$$

$$\|(\phi_t[\mu](n) - \phi_t[\mu])g\|_{\mathbf{B}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, для всех $g \in \mathbf{D}$. Мы будем использовать те же обозначения для соответствующих решений, добавив зависимость от n для всех объектов, построенных по $A[t, \mu](n)$.

Замечание 3.1. В качестве такой аппроксимации для $A[t, \mu]$, можно использовать конечно-разностную аппроксимацию производной операторов.

По стандартной теории ОДУ в банаховых пространствах (Приложения D, F в [28]), уравнения для $\mu_t^\alpha(n)$ и $\xi_t^\alpha(n)$ являются корректными в сильном смысле в $\mathbf{B}^*$ и $\mathbf{D}^*$, и $\xi_t^\alpha(n)$ представляют производные $\mu_t^\alpha(n)$ в $\mathbf{B}^*$ и $\mathbf{D}^*$.

Следовательно

$$\mu_t^\alpha(n) - \mu_t^{\alpha_0}(n) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \xi_t^\beta(n) d\beta \quad \text{для всех} \quad \alpha, \alpha_0 \in \mathbf{R} \quad (3.12)$$

выполняется как уравнение в $\mathbf{D}^*$ (и в $\mathbf{B}^*$, когда $\xi_0^\alpha \in \mathbf{B}^*$).

Из приложений теории возмущений к нелинейным кинетическим уравнениям (см. [28], раздел 2.1 или теорему 3.14 из [29]; фактически

это следует из утверждения 2.3) $\mu_t^\alpha(n)$ сходится к μ_t^α в топологии, задаваемой нормой $\mathbf{D}^*$. Аналогично $\xi_t^\alpha(n)$ сходится к ξ_t^α в топологии, задаваемой нормой пространства $\mathbf{D}^*$. Следовательно, можем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в уравнении (3.12) в топологии, задаваемой нормой $\mathbf{D}^*$, получая уравнение

$$\mu_t^\alpha - \mu_t^{\alpha_0} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \xi_t^\beta d\beta, \quad \text{для всех } t \geq 0. \quad (3.13)$$

В заключение, в силу утверждения 2.3, ξ_t^β зависит непрерывно от β в $\mathbf{D}^*$, что позволяет вывести требуемую дифференцируемость (т.е. уравнение (3.4)) из интегрального уравнения (3.13). $\square$

Введем теперь некоторые полезные пространства. Пусть $C_\infty^{2 \times 2}(\mathbf{R}^{2d})$ – подпространство функций $F(x, y) : \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}$ таких, что следующие частные производные

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x_i \partial x_j \partial y_k \partial y_l}$$

принадлежат $C_\infty^2(\mathbf{R}^{2d})$. Пространство снабжено нормой

$$\|F\|_{C_\infty^{2 \times 2}(\mathbf{R}^{2d})} := \|F\|_{C_\infty^2(\mathbf{R}^{2d})} + \sup_{x, y, i, j, k, l} \left\| \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x_i \partial x_j \partial y_k \partial y_l} \right\|.$$

Замечание 3.2. Пространство $C_\infty^{2 \times 2}(\mathbf{R}^{2d})$ играет решающую роль в теории стохастических потоков, развитой в [36].

Пусть $C_\infty^{1,2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ – подпространство функционалов $F(\mu)$ из $C(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ таких, что 1-ая вариационная производная $\delta F / \delta \mu(x)$ определена и принадлежит $C_\infty^2(\mathbf{R}^d)$ как функция от x равномерно по μ . Это подпространство становится банаховым пространством, когда снабжается нормой

$$\|F\|_{C_\infty^{1,2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))} := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)} \left\| \frac{\delta F}{\delta \mu(\cdot)} \right\|_{C_\infty^2(\mathbf{R}^d)}.$$

Аналогично определяется банахово пространство $C_\infty^{2,2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ функционалов с нормой

$$\|F\|_{C_\infty^{2,2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))} := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)} \left\| \frac{\delta^2 F}{\delta \mu(\cdot) \delta \mu(\cdot)} \right\|_{C_\infty^2(\mathbf{R}^d)},$$

и пространство $C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$ функционалов с нормой

$$\|F\|_{C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))} := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d)} \left\| \frac{\delta^2 F}{\delta \mu(\cdot) \delta \mu(\cdot)} \right\|_{C_{\infty}^{2 \times 2}(\mathbf{R}^d)}.$$

Оказывается (см. ниже, теорему 3.4), что пространство $C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$ (а не более естественное пространство $C_{\infty}^{2,2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$) образует инвариантное ядро для пропагатора (3.3).

Напомним, что вариационные производные являются частными случаями производных по направлениям для функционалов от мер и определяются следующим образом

$$\xi_t(x, \mu_0) = \frac{\delta \mu_t}{\delta \mu_0(x)} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} (\mu_t(\mu_0 + s \delta_x) - \mu_t(\mu_0)). \quad (3.14)$$

Как следствие теоремы 3.1 получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *При предположениях теоремы 3.1, вариационные производные $\xi_t(x, \mu_0)$ решений $\mu_t = \mu_t(\mu_0)$ уравнения (3.1) по начальным данным μ_0 корректно определены как элементы $\mathbf{D}^*$ и дважды непрерывно дифференцируемы по x (снова в топологии $\mathbf{D}^*$) с равномерно ограниченными производными. Более того, они представляют собой единственные решения мягких форм уравнения*

$$\frac{d}{dt}(f, \xi_t(x, \mu_0)) = \int_{\mathbf{R}^d} \left(A[t, \mu_t] f(v) + \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta A[t, \mu]}{\delta \mu(v)} f(z) \mu_t(dz) \right) \xi_t(x, \mu_0, dv) \quad (3.15)$$

с начальными условиями $\xi_0(x, \mu_0) = \delta_x$, где

$$\frac{\delta A[t, \mu]}{\delta \mu(v)} f(z) = \left(\frac{\delta h(t, z, \mu)}{\delta \mu(v)}, \nabla f(z) \right).$$

Доказательство. По теореме 3.1 вариационные производные $\xi_t(x, \mu_0)$ корректно определены в $\mathbf{D}^*$ и представляют единственное решение задачи Коши для мягкой формы уравнения (3.15) с начальными условиями $\xi_0(x, \mu_0) = \delta_x$. Более того, поскольку $\xi_t(x, \mu_0)$ являются решениями линейных уравнений, их производные по начальным данным $\xi_0(x, \mu_0) (= \delta_x)$ являются решениями тех же линейных уравнений. Следовательно, поскольку

$$\frac{\partial \delta_x}{\partial x} \in (C_{\infty}^1(\mathbf{R}^d))^* \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} \in \mathbf{D}^* = (C_{\infty}^2(\mathbf{R}^d))^*,$$

производные

$$\frac{\partial \xi_t(x, \mu_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \xi_t(x, \mu_0)}{\partial x^2}$$

корректно определены в $\mathbf{D}^*$ и являются решением того же уравнения, что и $\xi_t(x, \mu_0)$. $\square$

Рассмотрим аналогично вторую вариационную производную

$$\begin{aligned} \eta_t(x, y) &= \eta_t(x, y, \mu_0) = \frac{\delta^2 \mu_t}{\delta \mu_0(x) \delta \mu_0(y)} := \\ &:= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} \left(\frac{\delta \mu_t}{\delta \mu_0(x)}(\mu_0 + s \delta_y) - \frac{\delta \mu_t}{\delta \mu_0(x)}(\mu_0) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Дифференцируя (для начала) уравнение (3.15), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f, \eta_t(x, y)) &= \int_{\mathbf{R}^d} \left(A[t, \mu_t] f(v) + \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta A[t, \mu_t]}{\delta \mu_t(v)} f(z) \mu_t(dz) \right) \eta_t(x, y, dv) + \\ &+ \int_{\mathbf{R}^{2d}} \left(\frac{\delta A[t, \mu_t]}{\delta \mu_t(u)} f(v) + \frac{\delta A[t, \mu_t]}{\delta \mu_t(v)} f(u) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta^2 A[t, \mu_t]}{\delta \mu_t(v) \delta \mu_t(u)} f(z) \mu_t(dz) \right) \xi_t(x, dv) \xi_t(y, du) \end{aligned} \quad (3.17)$$

с $\eta_0(x, y) = 0$. Рассуждая аналогично случаю с производной первого порядка, мы рассмотрим задачу (3.17) в мягкой форме:

$$\eta_t(x, y) = (U^{t,0})^* \eta_0(x, y) + \int_0^t (U^{t,s})^* (\phi_s^*[\mu_s] \eta_s(x, y) + \Psi_s(x, y)) ds, \quad (3.18)$$

где $\Psi_s \in \mathbf{D}^*$ задано соотношением

$$\begin{aligned} (g, \Psi_s(x, y)) &= \int_{\mathbf{R}^{2d}} \left(\frac{\delta A[s, \mu_s]}{\delta \mu_s(u)} g(v) + \frac{\delta A[s, \mu_s]}{\delta \mu_s(v)} g(u) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta^2 A[s, \mu_s]}{\delta \mu_s(v) \delta \mu_s(u)} g(z) \mu_s(dz) \right) \xi_s(x, dv) \xi_s(y, du). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Чтобы уравнение (3.18) имело смысл, нам нужно лишь убедиться, что последнее слагаемое в (3.19) корректно определено для $\xi_s \in \mathbf{D}^*$. Это приводит к следующему расширению теоремы 3.2 на случай второй вариационной производной.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия C1)-C3). Предположим дополнительную регулярность коэффициента h

$$h(t, z, \cdot) \in C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d)) \quad (3.20)$$

равномерно по t, z как функций от μ , с равномерно ограниченными производными. Тогда вторые вариационные производные $\eta_t(x, y)$ решений $\mu_t = \mu_t(\mu_0)$ по μ_0 корректно определены как элементы $\mathbf{D}^*$ и дважды непрерывно дифференцируемы как функции от x и y (опять в топологии $\mathbf{D}^*$) с равномерно ограниченными производными. Кроме того, $\eta_t(x, y)$ представляют собой единственные решения мягких форм уравнения (3.17) с $\eta_0(x, y) = 0$.

Доказательство. Это почти прямое распространение теоремы 3.2. Однако, дифференцируя уравнение (3.17) по x и y , надо учитывать, что зависимость от x, y не только через начальные условия, но и через правую часть, содержащую $\xi_t(x, dv)\xi_t(y, du)$. Это мультипликативная форма позволяет дифференцировать дважды по x и дополнительно дважды по y , так как нужно получить функцию класса $C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$. Это именно то место, где необходимость работать с этим необычным пространством становится очевидной. $\square$

Возвращаясь к преобразованиям $(\Phi^t(F))(\mu) = F(\mu_t(\mu))$, которые очевидно представляют сжатие в пространстве $C(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$, мы можем получить следующее важное свойство регулярности.

Теорема 3.4. (i) При предположениях теоремы 3.2, преобразования (3.3) образуют обратный пропагатор равномерно ограниченных (для s, t из любого компактного интервала) линейных операторов в $C_{\infty}^{1,2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$. (ii) При предположениях теоремы 3.3, преобразования (3.3) образуют обратный пропагатор равномерно ограниченных (для s, t из любого компактного интервала) линейных операторов в $C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теорем 3.2 и 3.3 и формул

$$\frac{(\delta\Phi^{0,t}(F))(\mu)}{\delta\mu_0(x)} = \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_0(x)} = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta\mu_t(z)} \xi_t(x, \mu_0, dz),$$

$$\begin{aligned}
 \frac{(\delta^2 \Phi^{0,t}(F))(\mu)}{\delta \mu_0(x) \delta \mu_0(y)} &= \frac{\delta^2 F(\mu_t)}{\delta \mu_0(x) \delta \mu_0(y)} = \\
 &= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta F(\mu_t)}{\delta \mu_t(z)} \eta_t(x, y, \mu_0, dz) + \\
 &+ \int_{\mathbf{R}^{2d}} \frac{\delta^2 F(\mu_t)}{\delta \mu_t(z) \delta \mu_t(w)} \xi_t(x, \mu_0, dz) \xi_t(y, \mu_0, dw).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

□

4. Сходимость N -частичных аппроксимаций. Динамический закон больших чисел с меченой частицей

Здесь распространяем некоторые результаты из главы 9 [28] о пределе слабого закона больших чисел для взаимодействующих частиц в двух направлениях: мы докажем, что все скорости сходимости остаются справедливыми, если (i) одному из агентов будет разрешено отклоняться от общего поведения и (ii) вместо маргинальных мер использовать интегральные функционалы от траекторий мер.

Для этого вернемся к оператору $\hat{A}_t^N$ вида (1.5) из введения, опуская, на данный момент, зависимость от u и γ .

Следующий результат получается из общей формулы в главе 9 книги [28] и представления дробного лапласиана в виде (1.3).

Утверждение 4.1. *Если функционал F обладает достаточно гладкими вариационными производными первого и второго порядков, то тогда*

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_t^N F(\mu) &= \int_{\mathbf{R}^d} \left(h(t, x_i, \mu), \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta F}{\delta \mu(\cdot)} \right) (x) \mu(dx) - a(x) |\Delta|^{\alpha/2} \frac{\delta F}{\delta \mu(\cdot)} + \\
 &+ \frac{a(x)}{N} \int_0^1 (1-s) ds \int_{\mathbf{R}^{2d}} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta \mu(\cdot) \delta \mu(\cdot)} (\mu + \frac{s}{N} (\delta_{x+y} - \delta_x)), (\delta_{x+y} - \delta_x)^{\otimes 2} \right) \\
 &\quad \times \frac{dy}{|y|^{d+\alpha}} \mu(dy),
 \end{aligned}$$

где $\mu = \delta_x / N$.

Эта формула дает явную оценку порядка $1/N$ для отклонения оператора $\hat{A}_t^N$ от предельного оператора

$$\Lambda_t F(\mu) = \int_{\mathbf{R}^d} A[t, \mu] \left(\frac{\delta F}{\delta \mu(\cdot)} \right) (z) \mu(dz). \tag{4.1}$$

Согласно теореме 3.4, это семейство операторов порождает пропагатор (3.3) на общих инвариантных областях $C_\infty^{1,2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ или $C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$. Таким образом, нам нужен $F \in C_\infty^{1,2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$, чтобы $\Lambda_t F$ был корректно определен и $F \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$, чтобы иметь оценку порядка $1/N$ для отклонения $\Lambda_t F$ от $\hat{A}_t^N F$.

Пусть $U_N^{s,t}$, $s \leq t$ – обратный пропагатор на $C(\mathcal{P}_\delta^N(\mathbf{R}^d))$, порожденный $\hat{A}_t^N$ и $\Phi^{s,t}$ – пропагатор, определенный в (3.3). Из утверждения 2.1, имеем

$$[(U_N^{s,t} - \Phi^{s,t})F](\mu) = \int_s^t [U_N^{s,r}(\hat{A}_r^N - \Lambda_r)\Phi^{r,t}F](\mu) ds, \quad (4.2)$$

для $F \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ и $\mu \in \mathcal{P}_\delta^N(\mathbf{R}^d)$. Согласно теореме 3.4 и утверждению 4.1, уравнение (4.2) влечет за собой

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}_\delta^N(\mathbf{R}^d)} |[(U_N^{s,t} - \Phi^{s,t})F](\mu)| \leq \frac{C(T)}{N}(t-s)\|F\|_{C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))} \quad (4.3)$$

для $0 \leq s \leq t \leq T$ с некоторой постоянной $C(T)$, возникающей из ограничений на пропагаторы $\Phi^{s,t}$ на $C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ из теоремы 3.4.

Вернемся к полному оператору (1.5), содержащему u и γ . Предположим, что все агенты следуют некоторой фиксированной стратегии $\gamma(t, x)$, но один игрок, скажем, 1-ый, применяет другое управление $u_{1,t} = \tilde{\gamma}(t, x)$. Тогда вместо оператора (1.4) управляемый процесс с N взаимодействующими агентами будет генерироваться оператором

$$\begin{aligned} \hat{A}_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}]F(\delta_x/N) &= \\ &= \hat{A}_t^N[\gamma]F(\delta_x/N) + [A^1(t, \mu, \tilde{\gamma}(t, \cdot)) - A^1(t, \mu, \gamma(t, \cdot))]F(\delta_x/N) = \\ &= \hat{A}_t^N[\gamma]F(\delta_x/N) + (h_1(t, \mu, \tilde{\gamma}(t, \cdot)) - h_1(t, \mu, \gamma(t, \cdot)), \nabla F(\delta_x/N)) = \\ &= \hat{A}_t^N[\gamma]F(\delta_x/N) + O(1/N), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\mu = \delta_x/N$, $F \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ и $O(1/N)$ равномерная для F из ограниченных подмножеств $C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$. Следовательно $\hat{A}_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}]F$ и $\hat{A}_t^N[\gamma]F$ имеют одинаковый предел $\Lambda_t[\gamma]$, определенный в (4.1), кроме того, та же скорость сходимости порядка $1/N$ выполняется для F из ограниченных подмножеств $C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$. Однако, вместо простого сравнения маргинальных распределений марковских процессов $\mu_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}]$, определенных пропагаторами $U_N^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]$ (и генерируемых

$\hat{A}_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}]$), нам также нужно, чтобы была возможность сравнивать их интегральные характеристики (интерпретируемые как выигрыши в теоретико-игровом смысле).

Нам также потребуется получение оценки на случай, когда плотность интегральной составляющей функции платы J зависит от положения меченого агента и его собственной стратегии. Для этого рассмотрим процесс пар $(X_{1,t}^N, \mu_t^N)$ выбранного меченого агента и общей массы.

Пусть $C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$ – подпространство функционалов $F(x, \mu)$ из пространства $C_{\infty}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$ непрерывных ограниченных функционалов на $\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d)$, таких что $\mu \in \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d)$, функционал $F(., \mu) \in C_{\infty}^2(\mathbf{R}^d)$ и для каждого $x \in \mathbf{R}^d$ $F(x, .) \in C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$.

Пусть $C([0, T] \times \mathcal{U}, C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d)))$ – подпространство функционалов $F(t, x, \mu, u)$ из пространства $C_{\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{U})$ непрерывных ограниченных функционалов на $[0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{U}$, таких что для каждого (t, μ, u) функционал $F(t, ., \mu, u) \in C_{\infty}^2(\mathbf{R}^d)$ и для каждого $(t, x, ., u)$ $F(t, x, ., u) \in C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$.

Генераторы процесса пар $(X_{1,t}^N, \mu_t^N)$ определяются в пространстве $C_{\infty}^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_{\Lambda}(\mathbf{R}^d))$ и принимают вид

$$\hat{A}_{t;tag}^N[\gamma, \tilde{\gamma}]F(x_1, \delta_{\mathbf{x}}/N) := \left(A^1[t, \delta_{\mathbf{x}}/N, \tilde{\gamma}] + \hat{A}_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}] \right) F(x_1, \delta_{\mathbf{x}}/N), \quad (4.5)$$

где 1-й (соответственно 2-й) оператор в сумме действует на 1-ую (соответственно 2-ую) переменную F (A^1 означает, что оператор A действует на переменную x_1). Следовательно, в силу уравнения (4.4) и утверждения 4.1

$$\hat{A}_{t;tag}^N[\gamma, \tilde{\gamma}]F(x_1, \delta_{\mathbf{x}}/N) = \left(A^1[t, \delta_{\mathbf{x}}/N, \tilde{\gamma}] + \Lambda_t[\gamma] \right) F(x_1, \delta_{\mathbf{x}}/N) + O(1/N). \quad (4.6)$$

Будет справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Предположим, что условия C1)-C3) и условие регулярности (3.20) выполнены для семейства операторов $A[t, \mu, \gamma(t, .)]$ вида (3.2) с классом функций $\gamma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathcal{U}$, которые являются непрерывными по первой переменной и Липшиц непрерывны по второй переменной.*

Предположим, что начальные условия

$$\mu_0^N = \frac{1}{N}(\delta_{X_{1,0}^N} + \dots + \delta_{X_{N,0}^N})$$

сходятся в $\mathbf{D}^* = (C_\infty^2(\mathbf{R}^d))^*$ при $N \rightarrow \infty$ к вероятностному закону $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$, так что

$$\|\mu_0^N - \mu_0\|_{\mathbf{D}^*} \leq \frac{\kappa_1}{N} \quad (4.7)$$

с постоянной $\kappa_1 > 0$.

Предположим дополнительно, что $X_{1,0}^N \in \mathbf{R}^d$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к точке $X_{1,0} \in \mathbf{R}^d$, так что

$$\|X_{1,0}^N - X_{1,0}\| \leq \frac{\kappa_2}{N} \quad (4.8)$$

с постоянной $\kappa_2 > 0$.

Пусть $U_N^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]$ – пропагатор, порожденный $\hat{A}_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}]$ и $\Phi^{0,t}[\gamma]$ – пропагатор, порожденный $\Lambda_t[\gamma]$.

А также пусть $U_{N;tag}^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]$ – пропагатор, порожденный $\hat{A}_{t;tag}^N[\gamma, \tilde{\gamma}]$ и $\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]$ – пропагатор, порожденный семейством

$$A^1[t, \mu, \tilde{\gamma}] + \Lambda_t[\gamma],$$

где $\mu = \delta_x/N$.

(i) Тогда для любого $T > 0$ и $t \in [0, T]$ выполняются

$$\begin{aligned} & \left| [U_N^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]F](\mu_0^N) - [\Phi^{0,t}[\gamma](F)](\mu_0) \right| \leq \\ & \leq \frac{C(T)}{N} \left(t \|F\|_{C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))} + \kappa_1 \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \left| [U_{N;tag}^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]F](X_{1,0}^N, \mu_0^N) - [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma](F)](X_{1,0}, \mu_0) \right| \leq \\ & \leq \frac{C(T)}{N} \left((t + \kappa_2) \|F\|_{C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))} + \kappa_1 \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

с постоянной $C(T)$, не зависящей от $\tilde{\gamma}$.

(ii) Кроме того, если $J(t, \mu) \in C([0, T], C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)))$ и $J(t, x, \mu, u) \in C([0, T] \times \mathcal{U}, C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)))$, то выполняются следующие оценки

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \int_t^T J(s, \mu_s^N[\gamma, \tilde{\gamma}]) ds - \int_t^T J(s, \mu_s[\gamma]) ds \right| \leq \\ & \leq \frac{C(T)}{N} \left((T - t) \|J\|_{C([0, T], C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)))} + \kappa_1 \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathbb{E} \int_t^T J(s, X_{1,s}^N, \mu_s^N[\gamma, \tilde{\gamma}], \tilde{\gamma}(s, X_{1,s}^N)) ds - \right. \\
 & \left. - \mathbb{E} \int_t^T J(s, X_{1,s}, \mu_s[\gamma], \gamma(s, X_{1,s})) ds \right| \leq \\
 & \leq \frac{C}{N} \left((T + \kappa_2) \|J\|_{C([0,T] \times \mathcal{U}, C_\infty^{2;2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)))} + \kappa_1 \right),
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\mu_s[\gamma]$ – решение кинетического уравнения (2.6) с начальным условием μ_0 , $\mu_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}]$ – Марковский процесс, определенный пропагаторами $U_N^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]$, пара $(X_{1,s}^N, \mu_t^N[\gamma, \tilde{\gamma}])$ – марковский процесс, определенный пропагаторами $U_{N;tag}^{0,t}[\gamma, \tilde{\gamma}]$ и $X_{1,s}$ – марковский процесс, порожденный $A^1[t, \mu_t[\gamma], \tilde{\gamma}]$.

Доказательство. (i) Для $F \in C_\infty^{2;2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ имеем

$$\begin{aligned}
 & | [U_N^{0,t}[\gamma](F)](\mu_0^N) - [\Phi^{0,t}[\gamma](F)](\mu_0) | \leq \\
 & \leq | [U_N^{0,t}[\gamma](F) - \Phi^{0,t}[\gamma](F)](\mu_0^N) | + | [(\Phi^{0,t}[\gamma](F))(\mu_0^N) - (\Phi^{0,t}[\gamma](F))(\mu_0)] |.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

А также для $F \in C_\infty^{2;2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| [U_{N;tag}^{0,t}[\gamma, \hat{\gamma}]F](X_{1,0}^N, \mu_0^N) - [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]F](X_{1,0}, \mu_0) \right| \leq \\
 & \leq \left| [U_{N;tag}^{0,t}[\gamma, \hat{\gamma}]F](X_{1,0}^N, \mu_0^N) - [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]F](X_{1,0}^N, \mu_0^N) \right| + \\
 & + \left| [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]F](X_{1,0}^N, \mu_0^N) - [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]F](X_{1,0}, \mu_0^N) \right| + \\
 & + \left| [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]F](X_{1,0}, \mu_0^N) - [\Phi_{tag}^{0,t}[\gamma]F](X_{1,0}, \mu_0) \right|.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Оценивая первые слагаемые в (4.13) и (4.14) с помощью (4.3) с учетом (4.4), второе слагаемое в (4.13) и третье слагаемое в (4.14) с помощью (4.7) и Липшиц-непрерывности решений кинетического уравнения (согласно теореме 3.2) и оценивая второе слагаемое в (4.14) с помощью (4.8), получаем оценки (4.9) и (4.10).

(ii) Представим интегралы $\int_0^t J(s, \mu_s^N[\gamma, \tilde{\gamma}]) ds$, $\int_t^T J(s, X_{1,s}^N, \mu_s^N[\gamma, \tilde{\gamma}], \tilde{\gamma}(s, X_{1,s}^N)) ds$ и $\int_t^T J(s, X_{1,s}, \mu_s[\gamma], \gamma(s, X_{1,s})) ds$ как пределы римановых сумм. Тогда применяя (4.9) и (4.10) почленно и переходя к пределу, получим соответственно (4.11) и (4.12). $\square$

5. Предел среднего поля как ε -равновесие

В данном разделе мы показываем, что решение уравнения (1.12) представляет собой совершенное ε -равновесие для аппроксимирующей игры N агентов с ε порядка $1/N$.

Теорема 5.1. (i) Предположим, что $\{A[t, \mu, u] : t \geq 0, \mu \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d), u \in \mathcal{U}\}$ – семейство линейных операторов $\mathbf{D} \rightarrow C_\infty(\mathbf{R}^d)$, порождающих процессы устойчивого типа

$$A[t, \mu, u]f(z) = (h(t, z, \mu, u), \nabla f(z)) - a(z)|\Delta|^{\alpha/2}f(z), \quad (5.1)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям C1)-C3) и условию регулярности (3.20) для любого $u \in \mathcal{U}$.

(ii) Предположим, что терминальная функция $V^T \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ и плотность интегральной составляющей функции выигрыша $J \in C([0, T] \times \mathcal{U}, C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)))$.

(iii) Пусть начальные условия N -агентной игры

$$\mu_0^N = \frac{1}{N}(\delta_{X_{1,0}^N} + \dots + \delta_{X_{N,0}^N})$$

сходятся в $\mathbf{D}^* = (C_\infty^2(\mathbf{R}^d))^*$ при $N \rightarrow \infty$ к вероятностному закону $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$, так что

$$\|\mu_0^N - \mu_0\|_{\mathbf{D}^*} \leq \frac{\kappa_1}{N}$$

с постоянной $\kappa_1 > 0$ и $X_{1,0}^N \in \mathbf{R}^d$ сходятся при $N \rightarrow \infty$ к точке $X_{1,0} \in \mathbf{R}^d$, так что

$$\|X_{1,0}^N - X_{1,0}\| \leq \frac{\kappa_2}{N}$$

с постоянной $\kappa_2 > 0$.

(iv) Пусть $\{\mu.\}$ – решение уравнения (1.12) с непрерывным профилем стратегий $u = \Gamma(t, z, \{\mu.\})$, который Липшиц-непрерывен по z и определяется из уравнения HJB (1.9) и (1.10) с $\{\hat{\mu}.\} = \{\mu.\}$.

Тогда профиль стратегий $u = \Gamma(t, x, \{\mu.\})$ является совершенным ε -равновесием в N -агентной игре с

$$\varepsilon = \frac{C(T)}{N}(\|J\|_{C([0,T] \times \mathcal{U}, C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d)))} + \|V^T\|_{C_\infty^2(\mathbf{R}^d)} + 1).$$

Доказательство. По теореме 4.1, для любой стратегии $u(\cdot)$ или $\tilde{\gamma}$ 1-го игрока, его выигрыш в соответствующей игре N агентов отличается от выигрыша при потоке среднего поля на величину, не превышающую C/N . Поэтому максимумы по этим стратегиям не могут отличаться более чем на ту же величину. $\square$

Обычный класс задач с единственным $\arg \max$ в уравнении (1.10) возникает, когда функция платы выпукла по управлению и динамика линейна по управлению. Приведем пример системы, в которой выполняется условие Липшиц-непрерывности по x профиля стратегий $u = \Gamma(t, x, \{\mu\})$ (см., например, [35]).

Пример. Пусть $U = [-1, 1]$ – множество допустимых управлений. Коэффициент сноса $h : [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}^d$ линейная функция по u следующего вида

$$h(t, x, \mu, u) = a(t, x, \mu) + u,$$

где $a : [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ – ограниченная и непрерывная по t функция, Липшиц-непрерывна по x и $a(t, x, \cdot) \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ для всех t, x . Плотность интегральной составляющей функции выигрыша $J : [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ квадратичная функция по u следующего вида

$$J(t, x, \mu, u) = -\frac{1}{2}u^2b(t, x, \mu),$$

где функция $b : [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d) \rightarrow (0, \infty)$ ограниченная, Липшицева по x и $b(t, x, \cdot) \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$ для всех t, x . Терминальная функция $V^T \in C_\infty^{2,2 \times 2}(\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}_\Lambda(\mathbf{R}^d))$. Оптимальное управление

$$u = \arg \max \left\{ (a(t, x, \mu) + u)p - \frac{1}{2}u^2b(t, x, \mu) \right\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b(t, x, \mu)}p, & \text{если } \frac{1}{b(t, x, \mu)}p \in [-1, 1] \\ 1, & \text{если } \frac{1}{b(t, x, \mu)}p \notin [-1, 1] \text{ и } p > 0 \\ -1, & \text{если } \frac{1}{b(t, x, \mu)}p \notin [-1, 1] \text{ и } p < 0 \end{cases}$$

является ограниченной и Липшиц-непрерывной по x .

6. Библиографические комментарии

Исследованию устойчивых и устойчивого типа процессов посвящены много работ (см., например, [27, 28, 34, 45, 2, 46] и ссылки в этих работах).

Метод меченых частиц хорошо известен в теории взаимодействия (см., например, [14, 17, 41-43] и ссылки в них). Тем не менее, наш подход к этому методу в сочетании с теорией бесконечномерных полугрупп с параметрами управления, представляется новым.

Анализ чувствительности для кинетических уравнений начал разрабатываться недавно, см. работы [26, 5, 40, 28, 29], в которых получены скорости сходимости в численных алгоритмах и теоретический результат о сходимости в динамическом законе больших чисел и распространении хаоса. Важные (особенно в контексте настоящей работы) $1/N$ -оценки появляются в общем случае взаимодействующих частиц в [27] для диффузии и в процессах устойчивого типа с ограниченными коэффициентами. Затем эти оценки были распространены на широкий класс взаимодействий с неограниченными скоростями в [28]. Скорости сходимости активно изучаются в настоящее время, см., например, [11] и ссылки в ней. Алгоритмические подходы аппроксимации частицами широко изучаются с различных точек зрения, см., например, [12, 13, 25] и ссылки в них.

Дискретные игры среднего поля были исследованы в [16], численные методы в [3, 37].

Концепция игр среднего поля находится на пересечении теории среднего поля и нелинейного марковского управления, см., например, [4, 10, 30], раздел 11.2 в монографии [28] и ссылки, приведенные в них; работы с более прикладной направленностью [39, 15, 7-9] (с приложениями к проблемам управления большими комплексами роботов и к теории транспортных потоков и сетей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Огородников А.А. *Решение нелинейных стохастических уравнений с генератором полугруппы, имеющей особенность в нуле* // Известия вузов. Математика. 2011. №6. С. 90–99.

2. Учайкин В.В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.
3. Achdou Y., Capuzzo-Dolcetta I. *Mean field games: numerical methods* // SIAM J. Numer. Anal. 2010. V. 48. P. 1136–1162.
4. Andersson D., Djehiche B. *A maximum principle for SDEs of mean-field type* // Appl. Math. Optim. 2011. V. 63. P. 341–356.
5. Bailleul I.F. *Sensitivity for the Smoluchowski equation* // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44. P. 245004.
6. Bass R.F., Chen Z.-Q. *System of equations driven by stable processes* // J. Prob. Theory Relat. Fields. 2006. V. 134. P. 175–214.
7. Benaïm M., Le Boudec J.-Y. *A Class Of Mean Field Interaction Models for Computer and Communication Systems* // Technical Report LCA-REPORT-2008-010, or in 6th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks and Workshops, 2008. DOI: 10.1109/WIOPT.2008.4586140
8. Benaïm M., Weibull J. *Deterministic approximation of stochastic evolution in games* // Econometrica. 2003. V. 71. N 3. P. 873–903.
9. Bordenave C., McDonald D., Proutiere A. *A particle system in interaction with a rapidly varying environment: Mean field limits and applications*. arXiv:math/0701363v2 (2007).
10. Buckdahn R., Djehiche B., Li J., Peng S. *Mean-field backward stochastic differential equations: a limit approach* // Ann. Prob. 2009. V. 37. N 4. P. 1524–1565.
11. Cepeda E., Fournier N. *Smoluchowski's equation: rate of convergence of the Marcus-Lushnikov process* // Stochastic Process. Appl. 2011. V. 121. N 6. P. 1411–1444.
12. Crisan D. *Particle approximations for a class of stochastic partial differential equations* // Appl. Math. Optim. 2006. V. 54. N 3. P. 293–314.

13. Del Moral P. *Feynman-Kac formulae: genealogical and interacting particle systems with applications*. Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 2004.
14. Ferrari P.A. *Limit theorems for tagged particles*. Disordered systems and statistical physics: rigorous results (Budapest, 1995). Markov Process. Related Fields. 1996. V. 2. N 1. P. 17–40.
15. Gast N., Gaujal B. *A Mean Field Approach for Optimization in Particle Systems and Applications* // Proceedings of the Fourth International ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. DOI: 10.4108/ICST.VALUETOOLS2009.7477
16. Gomes D.A., Mohr J., Souza R.R. *Discrete time, finite state space mean field games* // J. Math. Pures Appl. 2010. V. 9. N 93. P. 308–328.
17. Grigorescu I. *Uniqueness of the tagged particle process in a system with local interactions* // Ann. Prob. 1999. V. 27. N 3. P. 1268–1282.
18. Guéant O., Lasry J.-M., Lions P.-L. *Mean Field Games and Applications*. Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance. Springer, 2010.
19. Huang M., Caines P.E., Malhamé R.P. *Individual and mass behaviour in large population stochastic wireless power control problems: centralized and Nash equilibrium solutions* // Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, December 2003. P. 98–103.
20. Huang M., Malhamé R.P., Caines P.E. *Nash equilibria for large-population linear stochastic systems with weakly coupled agents*. In: E.K. Boukas, R.P. Malhamé (Eds). Analysis, Control and Optimization of Complex Dynamic Systems. Springer, 2005. P. 215–252.
21. Huang M., Malhamé R.P., Caines P.E. *Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle* // Communications in information and systems. 2006. V. 6. P. 221–252.

22. Huang M., Caines P.E., Malhamé R.P. *Large-Population Cost-Coupled LQG Problems With Nonuniform Agents: Individual-Mass Behavior and Decentralized ε -Nash Equilibria* // IEEE Trans. Automat. Control. 2007. V. 52. N 9. P. 1560–1571.
23. Huang M., Caines P. E., Malhamé R.P. *The NCE (mean field) principle with locality dependent cost interactions* // IEEE Trans. Automat. Control. 2010. V. 55. N 12. P. 2799–2805.
24. Huang M. *Large-population LQG games involving a major player: the Nash certainty equivalence principle* // SIAM J. Control Optim. 2010. V. 48. P. 3318–3353.
25. Jourdain B., Roux R. *Convergence of a stochastic particle approximation for fractional scalar conservation laws. (English summary)* // Stochastic Process. Appl. 2011. V. 121. N 5. P. 957–988.
26. Kolokoltsov V.N. *On the regularity of solutions to the spatially homogeneous Boltzmann equation with polynomially growing collision kernel* // Advanced Studies in Contemp. Math. 2006. V. 12. P. 9–38.
27. Kolokoltsov V.N. *Nonlinear Markov Semigroups and Interacting Lévy Type Processes* // J. Stat. Physics. 2007. V. 126. N 3. P. 585–642.
28. Kolokoltsov V.N. *Nonlinear Markov processes and kinetic equations*. Cambridge Tracks in Mathematics 182, Cambridge Univ. Press, 2010.
29. Kolokoltsov V.N. *Nonlinear Lévy and nonlinear Feller processes: an analytic introduction*. In: A.V. Antoniouk, R.V.N. Melnik (Eds). De Gruyter series “Mathematics and Life Sciences”, 2013. P. 43–69.
30. Kolokoltsov V.N. *Nonlinear Markov games on a finite state space (mean-field and binary interactions)* // Intern. J. Statistics and Probability. Canadian Center of Science and Education (Open access journal). 2012. V. 1. N 1. P. 77–91.

31. Kolokoltsov V.N., Yang W. *Sensitivity analysis for HJB equations with application to coupled backward-forward systems*. Preprint. 2012.
32. Kolokoltsov V.N., Yang W. *On existence results of general kinetic equations with a path-dependent feature* // Open Journal of Optimization. 2013. V. 2. N 2. P. 39–44.
33. Kolokoltsov V.N., Li J., Yang W. *Mean Field Games and Nonlinear Markov Processes*. arXiv:1112.3744 (2012).
34. Kolokoltsov V.N. *Symmetric Stable Laws and Stable-Like Jump-Diffusions* // Proc. London Math. Soc. 2000. (3) 80. P. 725–768.
35. Kolokoltsov V.N., Troeva M., Yang W. *On the Rate of Convergence for the Mean-field Approximation of Controlled Diffusions with Large Number of Players* // Dynamic Games and Applications. 2013. DOI 10.1007/s13235-013-0095-6.
36. Kunita H. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. V. 24. Cambridge University Press, 1990.
37. Lachapelle A., Salomon J., Turinici G. *Computation of mean field equilibria in economics* // Math. Models Methods Appl. Sci. 2010. V. 20. P. 567–588.
38. Lasry J.-M., Lions P.-L. *Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French) [Mean field games. I. The stationary case]* C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. V. 343. N 9. P. 619–625.
39. Le Boudec J.-Y., McDonald D., Mundinger J. *A Generic Mean Field Convergence Result for Systems of Interacting Objects* // QEST 2007 (4th International Conference on Quantitative Evaluation of SysTems. 2007. P. 3–18.
40. Man P.L.W., Norris J.R., Bailleul I., Kraft M. *Coupling algorithms for calculating sensitivities of Smoluchowski's coagulation equation* // SIAM J. Sci. Comput. 2010. V. 32. N 2. P. 635–655.

41. Olla S. *Central limit theorems for tagged particles and for diffusions in random environment*. In: Milieux aleatoires. P. 75–100, Panor. Syntheses 12. Soc. Math. France, Paris, 2001.
42. Osada H. *Tagged particle processes and their non-explosion criteria* // J. Math. Soc. Japan. 2010. V. 62. N 3. P. 867–894.
43. Piasecki J., Sadlej K. *Deterministic limit of tagged particle motion: Effect of reflecting boundaries*. Phys. A. 2003. V. 323. P. 171–180.
44. Showalter R.E. *Existence and representation theorems for a semi-linear Sobolev equation in Banach space*. SIAM J. Math. Anal. 1972. V. 3. N 3. P. 527–543.
45. Tarasov V.E. *Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. Nonlinear Physical Science. Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing, 2010.
46. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*. VSP, Utrecht, 1999.

MEAN FIELD GAMES BASED ON THE STABLE-LIKE PROCESSES

Vassili N. Kolokoltsov, Department of Statistics, University of Warwick, Dr.Sc., prof. (v.kolokoltsov@warwick.ac.uk),

Marianna S. Troeva, North-Eastern Federal University, Cand.Sc., associate prof. (troeva@mail.ru),

Wei Yang, Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, PhD, prof. (w.yang@strath.ac.uk)

Abstract: We investigate the mean field games of N agents based on the nonlinear stable-like processes. The main result of the paper is in the statement that any solution of the limiting mean field consistency equation generates a $1/N$ -Nash equilibrium for the approximating game of N agents.

Keywords: stable-like processes, kinetic equation, forward-backward system, dynamic law of large numbers, rates of convergence, tagged particle, ε -Nash equilibrium.