

УДК 519.83

МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ

Ю. С. Токарева

Забайкальский государственный университет

Рассматривается теоретико-игровая модель проведения конкурса с оценкой отдельных параметров проектов. Для выбора победителя приглашается арбитражный комитет, руководствующийся правилами арбитражной процедуры по последнему предложению. В некооперативной игре n лиц с ненулевой суммой представлен общий вид ожидаемого выигрыша и значение игры. Найдены оптимальные стратегии игроков в одношаговой и многошаговой играх с двумя игроками с правилом консенсуса.

Ключевые слова: модель конкурса, арбитр, оптимальные стратегии, выигрыш, дисконтирование.

Yu. S. Tokareva. TENDER MODEL WITH ESTIMATION OF DIFFERENT PARAMETERS OF THE PROJECT

We consider the game-theoretic model of a competition estimations of individual project parameters. To select the winner the Arbitration Committee, guided by the rules of the Final-Offer arbitration, is invited. A perspective view of the expected payoff and the value of the game is presented in a noncooperative non-zero sum game with n players. The optimal strategies for the players in the one-step and multi-step two-player games with the consensus rule are identified.

Key words: tender model, the arbitrator, the optimal strategy, win, discounting.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается теоретико-игровая модель проведения конкурса. Участники конкурса – игроки – представляют свои проекты, характеризующиеся несколькими различными параметрами. Например, проект может включать описание его стоимости, времени выполнения, числа работников и т. д. Для определения проекта-победителя будет использована арбитражная схема. В этом случае к процедуре проведения конкурса приглашается еще один или несколько независимых игроков (арбитр/жюри или арбитражный комитет), которые по определенным правилам позволяют выявить победителя.

В данном исследовании независимая сторона представлена арбитражным комитетом, руководствующимся правилами арбитражной процедуры по последнему предложению (Final-offer arbitration). Согласно данной процедуре выигрывает проект, который оказался ближе к мнению арбитра. В случае нескольких арбитров полагаем, что проект победил, если за него проголосовало определенное число членов из арбитражного комитета. Например, можно использовать правила простого большинства (более 50 % членов арбитражного комитета), квалифицированного большинства (2/3 от всех членов комитета) или единогласия (все арбитры проголосовали

за проект). Если ни один из проектов не был выбран победителем, то игра или заканчивается, или переходит на следующий шаг.

В статьях [3–6] были найдены равновесия в игре, связанной с переговорами о заработной плате, с участием одного арбитра, а в работе [7] – с участием арбитражного комитета. В статье [1] рассмотрена двух- и трехмерная модель конкурса, в которой каждый из арбитров оценивает полностью весь проект. В [2] предложена методика построения двухуровневой теоретико-игровой модели конкурса с использованием комплексного критерия, включающего рейтинг заявки и вероятность выполнения контракта. В данной работе исследуется модель конкурса с несколькими арбитрами, каждый из которых оценивает только один параметр проекта.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРСА

Рассматривается некооперативная игра n лиц с ненулевой суммой, интерпретируемая как модель проведения конкурса. Игроки $i \in N = 1, 2, \dots, n$ – участники конкурса – представляют на конкурс свои проекты, которые характеризуются набором m параметров

$$x^i = (x_1^i, \dots, x_m^i).$$

Для определения проекта-победителя приглашается арбитражный комитет, состоящий из m членов. Каждый j -й арбитр оценивает только j -й параметр проекта каждого из игроков и выбирает один из проектов, используя стохастическую процедуру с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. Для оценки параметра проекта арбитр j использует арбитражную процедуру по последнему предложению. В этом случае им выбирается проект с параметром j , оказавшийся ближайшим к его мнению.

Таким образом, каждому арбитру j представлен набор j -х параметров из всех проектов

$$\{x_j^1, \dots, x_j^n\}.$$

Генерируется случайная величина a_j с некоторым распределением вероятностей $F_j(x)$, которое известно участникам конкурса. Данную величину a_j назовем мнением или решением арбитра. Тогда для каждого j -го параметра проекта k можно поставить в соответствие величину σ_j^k , характеризующую голос члена арбитражного комитета за него:

$$\sigma_j^k = \begin{cases} 1 & \text{если } x_j^k = \min_i |x_j^i - a_j|, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем считать, что k -й проект победил, если он получил число голосов не меньше, чем некоторый порог p

$$\sum_{j=1}^m \sigma_j^k \geq p.$$

Например, в случае единогласия мы имеем $p = m$. Если используется правило простого большинства, то $p = \frac{m}{2}$, а если правило квалифицированного большинства – $p = \frac{2m}{3}$. В зависимости от ситуации можно рассматривать различные значения p , которые будут определять возможное количество проектов-победителей. При этом проект – победитель конкурса k получает выигрыш $h_k(x^k)$, зависящий от параметров его проекта. Если ни один из проектов не был выбран арбитражным комитетом, то игра переходит на следующий шаг или заканчивается. Переход игры на следующий этап осуществляется с некоторым коэффициентом дисконтирования δ (например, сокращение времени на выполнение проекта или инфляция), где

$$0 \leq \delta \leq 1.$$

Обозначим ожидаемый выигрыш k -го игрока на шаге l через V_k^l ($k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots$). Тогда V_k^l является значением игры для k -го игрока в игре с функцией выигрыша

$$H_k^l(x^1, \dots, x^n) = \left\{ h_k(x^k) P \left\{ \sum_{j=1}^m \sigma_j^k \geq p \right\} + \delta V_k^{l-1} \left(1 - \sum_{k=1}^n P \left\{ \sum_{j=1}^m \sigma_j^k \geq p \right\} \right) \right\}.$$

Таким образом,

$$V_k^l = \text{val} H_k^l(x^1, \dots, x^n),$$

где $V_k^0 = 0$.

В данной игре будем искать равновесие по Нэшу, т. е. такой профиль x_i^* , для которого

$$H_k^l(x_i^* || y^k) \leq H_k^l(x_i^*), \forall y^k, k = 1, \dots, n, l = 1, 2, \dots$$

Данная модель исследуется в зависимости от количества игроков, количества параметров проектов и функций распределения мнений арбитров.

Одношаговая модель конкурса с двумя игроками

Рассмотрим теоретико-игровую модель с двумя игроками, проекты которых характеризуются двумя параметрами (x_i, y_i) ($i = 1, 2$). Например, проекты задаются временем выполнения какой-то работы и суммой средств, необходимой для выполнения этой работы в определенный период. Положим, что игрок I максимизирует величину $(2x_1 - y_1)$, а игрок II — величину $(2y_2 - x_2)$. Для определения победителя в конкурсе приглашаются два арбитра. Первый арбитр рассматривает параметры x_1 и x_2 из проектов игроков и выбирает тот, который оказался ближе к его мнению. Арбитр голосует за игрока с данным параметром. Второй арбитр аналогичным образом рассматривает параметры игроков y_1 и y_2 и голосует за проект одного из игроков. Игрок, за которого проголосовали оба арбитра одновременно, побеждает, т. е. $p = 2$. В противном случае участники конкурса проигрывают и ничего не получают, а игра заканчивается.

В силу постановки такой модели мы полагаем, что параметры игроков соотносятся следующим образом:

$$x_1 \geq x_2; y_2 \geq y_1.$$

В данном случае ожидаемые выигрыши игроков вычисляются по формулам

$$H_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2x_1 - y_1)(1 - F_1(\bar{x}))F_2(\bar{y}),$$

$$H_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2y_2 - x_2)F_1(\bar{x})(1 - F_2(\bar{y})),$$

где $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Дифференцируем, приравниваем к нулю

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 2(1 - F_1(\bar{x}))F_2(\bar{y}) - \frac{1}{2}(2x_1 - y_1)f_1(\bar{x})F_2(\bar{y}),$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y_1} = (1 - F_1(\bar{x})) \left[\frac{1}{2}(2x_1 - y_1)f_2(\bar{y}) - F_2(\bar{y}) \right],$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = (1 - F_2(\bar{y})) \left[\frac{1}{2}(2y_2 - x_2)f_1(\bar{x}) - F_1(\bar{x}) \right],$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 2F_1(\bar{x})(1 - F_2(\bar{y})) - \frac{1}{2}(2y_2 - x_2)f_2(\bar{y})F_1(\bar{x}).$$

При заданных функциях распределения мнений арбитра получаем оптимальные стратегии игроков.

Положим, что мнения обоих арбитров распределены по одинаковому закону, тогда решение системы уравнений даст

$$F_1(\bar{x}) = F_2(\bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

В силу симметрии рассматриваемой модели

$$x_1 = y_2, x_2 = y_1.$$

Пример 1. Пусть арбитры используют равномерное распределение $F_1 \sim [0, 1]$, $F_2 \sim [0, 1]$. Тогда

$$y_1 = \frac{4}{3} - x_1$$

и оптимальные стратегии игроков есть

$$\begin{cases} x_1^* = y_2^* = \frac{8}{9}, \\ x_2^* = y_1^* = \frac{4}{9}. \end{cases}$$

Таким образом, игрокам рекомендуется предлагать проекты с параметрами $(\frac{8}{9}; \frac{4}{9})$ и $(\frac{4}{9}; \frac{8}{9})$ соответственно. При этом ожидаемый выигрыш участников конкурса равен

$$H_1 = H_2 \approx 0,2963.$$

Пример 2. Пусть мнения арбитров подчинены нормальному закону

$$F_1 \sim N[0, 1], F_2 \sim N[0, 1].$$

В этом случае

$$y_1 \approx 0,87 - x_1,$$

и игрокам рекомендуется называть проекты $(1.03; 0.87)$ и $(0.87; 1.03)$ соответственно. Таким образом, в случае нормального распределения мнений арбитра игроки могут увеличить конкурсные параметры проекта. Однако ожидаемый выигрыш игроков в данной игре уменьшился

$$H_1 = H_2 = 0,26.$$

Многошаговая модель конкурса с двумя игроками

В случае многошаговой модели мы полагаем, что если мнения арбитров разделились между игроками, то игра переходит на второй шаг (второй тур конкурса), затем на третий и т. д. Переход игры на следующий этап осуществляется с некоторым коэффициентом дисконтирования δ , где $0 \leq \delta \leq 1$. Пусть до конца игры осталось l шагов, тогда для вычисления ожидаемых выигрышей игроков используем формулы

$$H_1^l(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2x_1 - y_1)(1 - F_1(\bar{x}))F_2(\bar{y}) + \delta V_1^{l-1} \{ (1 - F_1(\bar{x}))(1 - F_2(\bar{y})) + F_1(\bar{x})F_2(\bar{y}) \},$$

$$H_2^l(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2y_2 - x_2)F_1(\bar{x})(1 - F_2(\bar{y})) + \delta V_2^{l-1} \{ (1 - F_1(\bar{x}))(1 - F_2(\bar{y})) + F_1(\bar{x})F_2(\bar{y}) \},$$

где $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю

$$\frac{\partial H_1^l}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial H_1^l}{\partial y_1} = 0; \frac{\partial H_2^l}{\partial x_2} = 0; \frac{\partial H_2^l}{\partial y_2} = 0.$$

Преобразовывая и упрощая, также получаем

$$F_1(\bar{x}) = F_2(\bar{y}) = \frac{2}{3}.$$

Пример 3. Пусть решение арбитров моделируется равномерным распределением (см. пример 1) и для определения победителя конкурса дается два шага. В этом случае оптимальные стратегии на первом шаге определяются по формулам

$$\begin{cases} x_1^* = y_2^* = \frac{8}{9} + \frac{2}{3}\delta V^1, \\ x_2^* = y_1^* = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\delta V^1. \end{cases}$$

В таблице 1 представлены оптимальные стратегии первого игрока (x_1^*, y_1^*) и выигрыши игроков H на первом шаге игры для различных значений

коэффициента дисконтирования δ .

Таблица 1. Оптимальные стратегии и выигрыш игрока на первом шаге для различных δ в случае равномерного распределения мнений арбитра

| δ | $(x_1^*; y_1^*)$ | H^1 |
|----------|--------------------|---------|
| 1 | (1,08642; 0,24691) | 0;59259 |
| 0,9 | (1,06667; 0,26667) | 0;56296 |
| 0,8 | (1,04691; 0,28642) | 0;53333 |
| 0,5 | (0,98765; 0,34568) | 0;44444 |
| 0,3 | (0,94815; 0,38519) | 0;38519 |
| 0 | (0,88889; 0,44444) | 0;29630 |

Таблица 2. Оптимальные стратегии и выигрыш игрока на первом и втором шагах для различных δ в случае нормального распределения мнений арбитра

| δ | 1-й шаг игры | | 2-й шаг игры | |
|----------|---------------------|---------|---------------------|---------|
| | $(x_1^*; y_1^*)$ | H^2 | $(x_1^*; y_1^*)$ | H^1 |
| 1 | (1,52746; -0,65746) | 1,24322 | (1,20054; -0,33051) | 0,75284 |
| 0,9 | (1,46152; -0,59152) | 1,14431 | (1,18304; -0,31304) | 0,72660 |
| 0,8 | (1,39908; -0,52908) | 1,05065 | (1,16554; -0,29555) | 0,70035 |
| 0,5 | (1,23276; -0,36276) | 0,80118 | (1,11305; -0,24305) | 0,62161 |
| 0,3 | (1,13938; -0,26938) | 0,66111 | (1,07805; -0,20805) | 0,56911 |

Пример 4. Рассмотрим трехшаговую игру, в которой мнения арбитров подчинены нормальному закону

$$F_1 \sim N[0, 1], \quad F_2 \sim N[0, 1].$$

Тогда выигрыш первого игрока на шаге l будет определяться по формуле

$$H^l = \frac{2}{9}(2x_1 - y_1) + \frac{5}{9}\delta V^{l-1},$$

а оптимальные предложения

$$x_1 \approx 1,02556 + \frac{2}{3}\delta V^{l-1};$$

$$y_1 \approx -(0,1556 + \frac{2}{3}\delta V^{l-1}).$$

Оптимальные стратегии для первого игрока и ожидаемый выигрыш на первом и втором шагах игры для различных значений коэффициента дисконтирования δ представлены в таблице 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена прикладная модель переговоров с использованием арбитражных

схем. Результаты исследований могут применяться при проведении различного рода конкурсов, в которых члены жюри рассматривают отдельные параметры конкурсных проектов. Такие ситуации возникают в случае, когда для оценки определенных частей проектов необходимо привлекать узких специалистов. Также рассмотренная модель с привлечением нескольких членов жюри позволяет сделать схему проведения конкурса более независимой.

Модель может быть реализована с помощью компьютерных технологий, что позволит сократить расходы на проведение конкурсной процедуры и сделает ее более открытой.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31524 мол а, Государственного задания Минобрнауки РФ ЗабГУ (проект № 8.3641.2011) и гранта РФФИ (проект № 13-01-91158-ГФЕН а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазалов В. В., Токарева Ю. С. Теоретико-игровые модели проведения конкурсов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2010. Т. 2, вып. 2. С. 66–78.

2. Макаров Ю. Н., Строцев А. А. Методика теоретико-игрового обоснования условий проведения конкурса // Инженерный вестник Дона. 2012. № 3. (21). С. 157–167.

3. De Berg M., Van Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O. Computational geometry. Algorithms and Application. Springer, 2000. 367 p.

4. Farber H. An analysis of final-offer arbitration // Journal of conflict resolution. 1980. No 4. Vol. 24. P. 683–705.

5. Gibbons R. A Primer in game theory. N.Y.: Prentice Hall, 1992. 273 p.

6. Kilgour D. M. Game-theoretic properties of final-offer arbitration // Group Decision and Negot. 1994. N 3. P. 285–301.

7. Mazalov V., Tokareva J. Arbitration procedures with multiple arbitrators // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 217, Issue 1. P. 198–203.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Токарева Юлия Сергеевна

доцент, к. ф.-м. н.

Забайкальский государственный университет

ул. Александрo-Заводская, 30, Чита,

Забайкальский край, Россия, 672039

эл. почта: jtokareva2@mail.ru

тел.: (3022) 355890

Tokareva, Yulia

Transbaikal State University

30 Aleksandro-Zavodskaya St., 672039 Chita,

Zabaykalsky Krai, Russia

e-mail: jtokareva2@mail.ru

tel.: (3022) 355890