

УДК 517.977

ББК 22.18

# ЗАДАЧА ПРОСТОГО ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С РАВНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАЩИТНИКОВ УБЕГАЮЩЕГО

АЛЕКСАНДР И. БЛАГОДАТСКИХ

Удмуртский государственный университет

426034, Ижевск, ул. Университетская, 1

e-mail: aiblag@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки в задаче простого группового преследования с равными возможностями при наличии группы защитников убегающего.

*Ключевые слова:* дифференциальная игра, групповое преследование, многократная поимка, одновременная многократная поимка, защитники убегающего.

## 1. Введение

Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Л.А. Петросяном, им были получены [6] достаточные условия поимки, Б.Н. Пшеничный получил [7] необходимые и достаточные условия поимки. Н.Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены [4] необходимые и достаточные условия многократной поимки. А.А. Чикрием и Н.Н. Петровым были получены [5,8] достаточные условия многократной поимки в конфликтно управляемых процессах и в примере Л.С. Понтрягина с

равными возможностями. Для перечисленных задач приведены [1–3] достаточные условия многократной, нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок; в частности, для задачи простого группового преследования с равными возможностями получены [1] необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки.

Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка.

В предлагаемой работе введено понятие и получены необходимые и достаточные условия многократной и одновременной многократной поимок убегающего в задаче простого группового преследования с равными возможностями при наличии третьей группы участников – защитников убегающего.

## 2. Постановка задачи

В пространстве  $R^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma$   $n + r + 1$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , убегающего  $E$  и  $r$  защитников (убегающего)  $D_1, D_2, \dots, D_r$  с законами движения и начальными условиями (при  $t = t_0$ )

$$\begin{aligned} P_i & : \quad \dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in V, \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E & : \quad \dot{y} = v, \quad v \in V, \quad y(t_0) = Y^0, \\ D_j & : \quad \dot{z}_j = w_j, \quad w_j \in V, \quad z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), \quad j \in I(r), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $x_i, y, z_j \in R^k$ ,  $V$  – строго выпуклый компакт в  $R^k$  с гладкой границей и непустой внутренностью, множество  $I(q) = \{1, 2, \dots, q\}$  для всех  $q \geq 1$ ,  $S(a, b)$  – шар в  $R^k$  с центром в точке  $a$  радиуса  $b$ .

В системе (2.1) начальные позиции преследователей  $P_i$  и убегающего  $E$  фиксированы и  $X_i^0 \neq Y^0$  для всех  $i \in I(n)$ . Каждый защитник  $D_j, j \in I(r)$  выбирает свою начальную позицию  $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$  до начала движения конфликтно управляемой системы (2.1), причем  $L > 0$  – такая фиксированная постоянная, что  $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$  для всех  $i \in I(n)$  (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя одного преследователя и тем

самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на  $[t_0, \infty)$  со значениями из множества  $V$  будем называть допустимыми.

**Определение 2.1.** *Квазистратегией преследователя  $P_i$  будем называть отображение  $U_i$  ставящее в соответствие моменту времени  $t \in [t_0, \infty)$ , начальным позициям  $X_i^0, Y^0$  и произвольной допустимой предыстории управления убегающего допустимое управление  $u_i(t)$ , то есть*

$$u_i(t) = U_i(t, X_i^0, Y^0, v(s), t_0 \leq s \leq t).$$

**Определение 2.2.** *Квазистратегией защитника  $D_j$  будем называть отображение  $W_j$ , ставящее в соответствие начальным позициям  $X_i^0, Y^0$  начальную позицию  $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ ; моменту времени  $t \in [t_0, \infty)$ , начальным позициям  $X_i^0, Y^0, Z_j^0$  и произвольным допустимым предысториям управлений преследователей и убегающего допустимое управление  $w_j(t)$ , то есть*

$$Z_j^0 = W_j(t_0, X_i^0, Y^0); w_j(t) = W_j(t, X_i^0, Y^0, u_i(s), v(s), t_0 \leq s \leq t).$$

Будем считать, что при совпадении геометрических координат  $d \geq 1$  защитников  $D_j$  и  $p \geq 1$  преследователей  $P_i$  погибают  $\min\{d, p\}$  защитников и столько же преследователей (для определенности считаем, что погибают участники с наименьшими порядковыми номерами). Неформально, каждый защитник может уничтожить одного преследователя и при этом он сам погибает. Кроме того, при совпадении геометрических координат убегающего  $E$  и защитника  $D_j$  последний погибает.

Пусть  $T(P_i)$ ,  $i \in I(n)$  и  $T(D_j)$ ,  $j \in I(r)$  – моменты гибели преследователя  $P_i$  и защитника  $D_j$  соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным  $\infty$ .

**Определение 2.3.** *В игре  $\Gamma$  возможна поимка, если существуют такие момент  $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$  и квазистратегии  $U_i$  преследователей  $P_i$ , что для любых допустимого управления  $v(t)$  убегающего  $E$  и квазистратегий  $W_j$  защитников  $D_j$  найдутся индекс  $\alpha \in I(n)$  и*

момент  $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$ , для которых выполнены условия

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha), \tau_\alpha < T(P_\alpha).$$

Отметим, что в ситуации  $x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) = z_j(\tau_\alpha)$  поимки не происходит, поскольку  $\tau_\alpha = T(P_\alpha)$  и условие  $\tau_\alpha < T(P_\alpha)$  не выполнено.

Для каждого  $q = 1, 2, \dots, n$  определим множество

$$\Omega(q) = \{ \{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q, i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n) \}.$$

**Определение 2.4.** В игре  $\Gamma$  возможна  $m$ -кратная поимка ( $m \geq 1$ ), если существуют такие момент  $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$  и квазистратегии  $U_i$  преследователей  $P_i$ , что для любых допустимого управления  $v(t)$  убегающего  $E$  и квазистратегий  $W_j$  защитников  $D_j$  найдутся множество  $\Lambda \in \Omega(m)$  и моменты  $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , для которых выполнены условия

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha), \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ для всех } \alpha \in \Lambda.$$

**Определение 2.5.** В игре  $\Gamma$  возможна одновременная  $m$ -кратная поимка ( $m \geq 1$ ), если существуют такие момент  $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$  и квазистратегии  $U_i$  преследователей  $P_i$ , что для любых допустимого управления  $v(t)$  убегающего  $E$  и квазистратегий  $W_j$  защитников  $D_j$  найдутся множество  $\Lambda \in \Omega(m)$  и момент  $\tau \in [t_0, T_0]$ , для которых выполнены условия

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \tau < T(P_\alpha), x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ для всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II – группой преследователей, III – группой защитников), у I и III центров управления имеется общая цель – уклонение убегающего от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна; кроме того, в процессе игры у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае нескольких преследователей первый из них «защищает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный).

### 3. Решение задачи

Для каждого единичного вектора  $p \in R^k$  определим вектор

$$v_p \in \partial V : \langle u - v_p, p \rangle < 0 \text{ для всех } u \in V \setminus \{v_p\},$$

который существует в силу строгой выпуклости  $V$  в  $R^k$ .

**Лемма 3.1.** *Если в процессе игры  $\Gamma$  для единичного вектора  $p \in R^k$ , номера  $q \in I(n)$  и момента  $t_q \geq t_0$  реализовалась ситуация*

$$\langle x_q(t_q) - y(t_q), p \rangle \leq 0, \quad x_q(t_q) \neq y(t_q),$$

то определяя управление убегающего  $E$  равенством

$$v(t) = v_p \text{ для всех } t \in [t_q, \infty)$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_q(t) - y(t), p \rangle \leq 0, \quad x_q(t) \neq y(t) \text{ для всех } t \in [t_q, \infty)$$

при каждом допустимом продолжении управления  $u_q(t), t \in [t_q, \infty)$  преследователя  $P_q$ .

*Доказательство.* По теореме Коши для всех  $t \in [t_q, \infty)$

$$\langle x_q(t) - y(t), p \rangle = \langle x_q(t_q) - y(t_q), p \rangle + \int_{t_q}^t \langle u_q(s) - v_p, p \rangle ds \leq 0$$

и равенство возможно только в случае, если  $u_q(s) = v_p$  почти всюду на  $[t_q, t]$ , но в этом случае  $x_q(t) \neq y(t)$ , так как  $x_q(t_q) \neq y(t_q)$ . Если

$$\langle x_q(t) - y(t), p \rangle < 0,$$

то  $x_q(t) \neq y(t)$ . Следовательно,  $x_q(t) \neq y(t)$  для всех  $t \in [t_q, \infty)$ .  $\square$

**Предположение 3.1.**  $Y^0 \in \text{Int co}\{X_q^0, q \in K\}$  для всех множеств  $K \in \Omega(n - m - r + 1)$ .

**Теорема 3.1.** *В игре  $\Gamma$  возможны  $m$ -кратная и одновременная  $m$ -кратная поимки тогда и только тогда, когда выполнено предположение 3.1.*

*Доказательство.* Достаточность. Предположение 3.1 имеет место. При условии, что группа защитников  $D_j$  не принимает участие в игре  $\Gamma$ , в работах [1,4] построены управления преследователей  $P_i$ , обеспечивающие  $(m+r)$ -кратную и одновременную  $(m+r)$ -кратную поимку убегающего  $E$  соответственно. Пусть преследователи  $P_i$  используют указанные управления (не учитывают действия защитников  $D_j$ ). Так как все защитники  $D_j$  могут уничтожить не более чем  $r$  преследователей  $P_i$ , получаем справедливость утверждения.

Необходимость. Пусть предположение 3.1 не выполнено; значит, существует множество  $Q \in \Omega(n - m - r + 1)$  такое, что

$$0 \notin \text{Int co}\{X_q^0 - Y^0, q \in Q\}.$$

Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор  $p \in R^k$  такой, что  $\langle h, p \rangle \leq 0$  для всех  $h \in \text{co}\{X_q^0 - Y^0, q \in Q\}$ , поэтому

$$\langle X_q^0 - Y^0, p \rangle \leq 0 \text{ для всех } q \in Q.$$

Определим постоянное управление убегающего  $E$

$$v(t) = v_p \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Из леммы 3.1 получаем, что  $x_q(t) \neq y(t)$  для всех  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $q \in Q$ .

Рассмотрим оставшихся  $|I(n) \setminus Q| = m + r - 1$  преследователей. Выберем попарно различные индексы  $i_1, i_2, \dots, i_r \in I(n) \setminus Q$ . Определим квазистратегию  $W_j$  защитника  $D_j$ ,  $j \in I(r)$  следующим образом:

$$Z_j^0 = Y^0 + L \frac{X_{i_j}^0 - Y^0}{\|X_{i_j}^0 - Y^0\|}; \quad \lambda_j = \frac{\|Z_j^0 - Y^0\|}{\|X_{i_j}^0 - Y^0\|},$$

$$w_j(t) = \lambda_j u_{i_j}(t) + (1 - \lambda_j)v_p \text{ для всех } t \geq t_0.$$

Отметим, что  $Z_j^0 \in \partial S(Y^0, L)$  и лежит внутри отрезка, соединяющего точки  $X_{i_j}^0$  и  $Y^0$  так как  $X_{i_j}^0 \notin S(Y^0, L)$ . Из чего следует, что  $\lambda_j \in (0, 1)$  и  $w_j = \lambda_j u_{i_j} + (1 - \lambda_j)v \in V$  для любых  $u_{i_j}, v \in V$  в силу выпуклости  $V$  в  $R^k$ . Следовательно управление  $w_j(t)$  является допустимым.

Далее, для всех  $t \geq t_0$  имеем

$$z_j(t) = Z_j^0 + \int_{t_0}^t w_j(s) ds = \lambda X_{i_j}^0 + (1 - \lambda_j)Y^0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t (\lambda_j u_{i_j}(s) + (1 - \lambda_j) v_p) ds = \lambda_j \left( X_{i_j}^0 + \int_{t_0}^t u_{i_j}(s) ds \right) + \\
& + (1 - \lambda_j) \left( Y^0 + \int_{t_0}^t v_p ds \right) = \lambda_j x_{i_j}(t) + (1 - \lambda_j) y(t).
\end{aligned}$$

Последним равенством доказано следующее утверждение о взаимном расположении: точка  $z_j(t)$  лежит внутри отрезка, соединяющего точки  $x_{i_j}(t)$  и  $y(t)$  при  $x_{i_j}(t) \neq y(t)$  или  $z_j(t) = x_{i_j}(t) = y(t)$ .

Возможны два случая. 1. Преследователь  $P_{i_j}$  осуществляет поимку убегающего  $E$  в некоторый момент  $\tau_{i_j} \geq t_0$ . Тогда

$$\langle x_{i_j}(t) - y(t), p \rangle > 0 \text{ для всех } t \in [t_0, \tau_{i_j}), \quad (3.1)$$

так как в противном случае нашелся бы момент  $t_{i_j} \in [t_0, \tau_{i_j})$ , для которого  $\langle x_{i_j}(t_{i_j}) - y(t_{i_j}), p \rangle \leq 0$ , и в силу леммы 3.1 преследователь  $P_{i_j}$  не смог бы осуществить поимку убегающего  $E$ .

Из доказанного выше утверждения о взаимном расположении и неравенства (3.1) получаем

$$\langle z_j(t) - y(t), p \rangle > 0 \text{ для всех } t \in [t_0, T(D_j)] \text{ и } T(D_j) < \tau_{i_j}. \quad (3.2)$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$\langle x_q(t) - y(t), p \rangle \leq 0 \text{ для всех } q \in Q \text{ и } t \geq t_0. \quad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) следует, что

$$z_j(t) \neq x_q(t) \text{ для всех } t \in [t_0, T(D_j)], q \in Q.$$

Таким образом, в момент гибели  $T(D_j)$  защитник  $D_j$  уничтожает одного из преследователей  $P_i$ , где  $i \in I(n) \setminus Q$ .

2. Преследователь  $P_{i_j}$  не осуществляет поимку убегающего  $E$ .

Итак в обоих случаях защитник  $D_j$ ,  $j \in I(r)$  предотвращает встречу как минимум одного из преследователей  $P_i$ , где  $i \in I(n) \setminus Q$  с убегающим  $E$ . Оставшиеся  $(m + r - 1) - r = m - 1$  преследователей не могут осуществить  $m$ -кратную поимку.  $\square$

Рассмотрим несколько примеров.

*Пример 3.1.* В  $R^2$  рассмотрим игру  $\Gamma_1$  вида (2.1), где  $n = 5$ ,  $r = 0$  или  $r = 1$ ,

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{5} \\ \sin \frac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя получаем, что при  $(m + r) \leq 2$  предположение 3.1 выполнено, а при  $(m + r) \geq 3$  – не выполнено.

**Утверждение 3.1.** *В игре  $\Gamma_1$  возможна  $(2 - r)$ -кратная и одновременная  $(2 - r)$ -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

*Пример 3.2.* В  $R^2$  рассмотрим игру  $\Gamma_2$  вида (2.1), где  $n = 7$ ,  $r = 0$  или  $r = 1$ , или  $r = 2$ ,

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{7} \\ \sin \frac{2\pi i}{7} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 7, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 3.2.** *В игре  $\Gamma_2$  возможна  $(3 - r)$ -кратная и одновременная  $(3 - r)$ -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Обобщая результаты игр  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , рассмотрим следующий пример.

*Пример 3.3.* В  $R^2$  рассмотрим игру  $\Gamma_3$  вида (2.1), где  $n = 1 + 2b$ ,  $r \leq b - 1$  ( $b \geq 1$ ),

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1 + 2b} \\ \sin \frac{2\pi i}{1 + 2b} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 1 + 2b, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 3.3.** *В игре  $\Gamma_3$  возможна  $(b - r)$ -кратная и одновременная  $(b - r)$ -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

*Пример 3.4.* В  $R^3$  рассмотрим игру  $\Gamma_4$  вида (2.1), где  $n = 1 + 3b$ ,  $r \leq b - 1$  ( $b \geq 1$ ),

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2b} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 1 + 2b,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad i = 2 + 2b, \dots, 1 + 3b, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 3.4.** В игре  $\Gamma_4$  возможна  $(b - r)$ -кратная и одновременная  $(b - r)$ -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.
2. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440.
3. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во «Удмурт. ун-т», 2009.
4. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
5. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
6. Петросян Л.А. Игры преследования «с линией жизни» со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1966. Т. 1. № 5 С. 331–340.

7. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Чикрий А.А. *Конфликтно управляемые процессы*. Киев: Наук. думка, 1992.

PROBLEM OF SIMPLE GROUP PURSUIT WITH EQUAL OPPORTUNITIES AT PRESENCE DEFENDERS EVADER

**Aleksandr I. Blagodatskikh**, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Cand.Sc., assoc.prof. (aiblag@mail.ru).

*Abstract:* The necessary and sufficient conditions for simultaneous multiple capture in a simple group pursuit problem with equal opportunities at presence group of defenders evader are obtained.

*Keywords:* differential game, group pursuit, multiple capture, simultaneous multiple capture, defenders evader.