

УДК 519.833.2

ББК 22.18

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ С РАЗЛИЧНЫМИ ГОРИЗОНТАМИ ПЛАНИРОВАНИЯ*

АННА Н. РЕТТИЕВА

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул.Пушкинская, 11

e-mail: annaret@krc.karelia.ru

Исследована теоретико-игровая модель экологического менеджмента в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на конечном промежутке времени. При этом, игроки различаются не только коэффициентами дисконтирования, но и временами участия в процессе эксплуатации ресурса. Целью работы является определение кооперативного поведения при наличии различных коэффициентов дисконтирования и горизонтов планирования у участников. Предложено использование рекурсивной арбитражной схемы Нэша для построения кооперативных стратегий и выигрышей игроков.

Ключевые слова: задача управления биоресурсами, асимметричные игроки, арбитражное решение Нэша.

1. Введение

В статье исследована теоретико-игровая модель эксплуатации ресурсов в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или

рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов и использующие различные коэффициенты дисконтирования, что можно интерпретировать как их различные предпочтения во времени.

Основной проблемой в данной ситуации является то, что нет возможности определить выигрыши игроков при кооперативном поведении стандартными способами. В работе [4] было предложено построение кооперативного выигрыша как суммы индивидуальных, но данный подход является нетрадиционным для кооперативной теории игр, где при кооперации определяется общий выигрыш всех участников, а потом используются схемы его распределения.

В работе [3] было предложено использование арбитражной схемы Нэша для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков. При этом, использовались две переговорные схемы: для всего периода продолжения игры и рекурсивная арбитражная процедура, в которой арбитражная схема применяется на каждом шаге игры.

В данной статье исследована модель, в которой игроки различаются не только коэффициентами дисконтирования, но и временами участия в процессе эксплуатации ресурса. Основной задачей здесь является определение кооперативных выигрышей в случае различных горизонтов планирования. Когда время участия одного из игроков меньше, чем у другого, то игрок включается в процесс эксплуатации (в данном случае – вылов) на фиксированное время и готов вступить в кооперацию, зная, что это более прибыльно для него. Но так как у игрока меньший, чем у партнера горизонт планирования, то он должен получить выгоду от кооперации больше, чем игрок, который продолжает процесс эксплуатации ресурса дальше. Определение кооперативного поведения в данном случае не было исследовано ранее. Стоит отметить только работы [6], [9], в которых горизонт планирования является случайной величиной с заданным распределением. Авторы построили динамически устойчивую процедуру распределения дележа для данной модели, но игроки не различались коэффициентами дисконтирования и временем участия.

Из всего выше сказанного следует, что для определения кооперативного поведения в моделях с различными временами участия в процессе эксплуатации необходима разработка новых методов. Поэтому, в работе для построения кооперативных стратегий в случае

различных горизонтов планирования предлагается использовать арбитражную схему Нэша.

2. n -шаговая модель и равновесие по Нэшу

Сначала приведем результат из [3] с одинаковым горизонтом планирования $[0, n]$ у обоих игроков, который понадобится в дальнейшем исследовании.

Пусть два игрока (страны или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс на протяжении конечного горизонта планирования $[0, n]$. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^\alpha, \quad x_0 = x, \quad (2.1)$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент времени t , $\varepsilon \in (0, 1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0, 1)$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ – вылов игрока i , $i = 1, 2$.

Предполагается логарифмический вид функции выигрышей игроков и наличие различных коэффициентов дисконтирования. Тогда, выигрыши игроков имеют следующий вид:

$$J_i = \sum_{t=0}^n \delta_i^t \ln(u_{it}), \quad (2.2)$$

где $0 < \delta_i < 1$ – коэффициент дисконтирования игрока i , $i = 1, 2$.

Теорема 2.1. *Равновесные по Нэшу стратегии в задаче (2.1), (2.2) имеют вид*

$$u_{1t}^N = \frac{\varepsilon a_2 \sum_{j=0}^{t-1} a_1^j}{\sum_{j=0}^t a_1^j \sum_{j=0}^t a_2^j - 1} x, \quad u_{2t}^N = \frac{\varepsilon a_1 \sum_{j=0}^{t-1} a_2^j}{\sum_{j=0}^t a_1^j \sum_{j=0}^t a_2^j - 1} x,$$

где $a_i = \alpha \delta_i$, $i = 1, 2$, $t = 1, \dots, n$.

Индивидуальные выигрыши игроков –

$$V_i^N(x, \delta_i) = \sum_{j=0}^n (a_i)^j \ln x + \sum_{j=1}^n (\delta_i)^{n-j} A_{ij} - (\delta_i)^n \ln k, \quad (2.3)$$

$$A_{lj} = \ln \left[\left(\frac{\varepsilon \sum_{k=1}^j a_p^k}{\sum_{k=0}^j a_1^k \sum_{k=0}^j a_2^k - 1} \right)^{\sum_{k=0}^j a_l^k} \left(\sum_{k=1}^j a_l^k \right)^{\sum_{k=1}^j a_l^k} \right], \quad l, p = 1, 2, \quad l \neq p. \quad (2.4)$$

Размер популяции после n периодов эксплуатации имеет вид

$$x^{Nn} = x_0^{\alpha^n} (\varepsilon a_1 a_2)^{\sum_{j=1}^n \alpha^j} \prod_{l=1}^n \left(\frac{\sum_{j=0}^{l-1} a_1^j \sum_{j=0}^{l-1} a_2^j}{\sum_{j=0}^l a_1^j \sum_{j=0}^l a_2^j - 1} \right)^{\alpha^{n-l+1}}. \quad (2.5)$$

3. Модель с различными временами участия в процессе эксплуатации

Рассмотрим процесс эксплуатации ресурса с динамикой (2.1) с различными горизонтами планирования. Пусть первый игрок эксплуатирует ресурс на протяжении n_1 моментов времени, а второй – на протяжении n_2 моментов времени. Предположим, для определенности, что $n_1 < n_2$. Таким образом, в данной модели на временном промежутке $[0, n_1]$ игроки вступают в кооперацию, и необходимо определить их кооперативные стратегии. После момента n_1 до момента n_2 второй игрок продолжает процесс эксплуатации индивидуально. Следовательно, выигрыши игроков имеют следующий вид:

$$J_1 = \sum_{t=0}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c), \quad J_2 = \sum_{t=0}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a), \quad (3.1)$$

где u_i^c , $i = 1, 2$ – кооперативные стратегии, u_2^a – стратегия второго игрока, эксплуатирующего ресурс индивидуально.

Для построения кооперативных стратегий и выигрышей игроков применяется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Таким образом, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} & (V_1^c(x, \delta_1)[0, n_1] - V_1^N(x, \delta_1)[0, n_1]) \cdot \\ & \cdot (V_2^c(x, \delta_2)[0, n_1] + V_2^{ac}(x^{cn_1}, \delta_2)[n_1, n_2] - \\ & - V_2^N(x, \delta_2)[0, n_1] - V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]) = \\ & = \left(\sum_{t=0}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c) - V_1^N(x, \delta_1)[0, n_1] \right) \left(\sum_{t=0}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a) - \right. \\ & \left. - V_2^N(x, \delta_2)[0, n_1] - V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2] \right) \rightarrow \max, \quad (3.2) \end{aligned}$$

где $V_i^N(x, \delta_i)[0, n_1]$ – выигрыши в равновесии по Нэшу, определенные в (2.3) (где $n = n_1$), $V_2^{ac}(x^{cn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]$ – выигрыш второго игрока, когда он эксплуатирует ресурс индивидуально после n_1 периодов кооперативного поведения участников, $V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]$ – выигрыш второго игрока, когда он эксплуатирует ресурс индивидуально после n_1 периодов некооперативного поведения участников.

Теорема 3.1. *Кооперативные выигрыши в задаче (2.1), (3.1) имеют вид*

$$H_{1n_1}^c(\gamma_{11}^c, \dots, \gamma_{1n_1}^c, \gamma_{21}^c, \dots, \gamma_{2n_1}^c; x) = \sum_{j=0}^{n_1} a_1^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_1} \delta_1^{n_1-j} \ln(\gamma_{1j}^c) + \\ + \sum_{j=1}^{n_1} \delta_1^{n_1-j} \sum_{i=1}^j a_1^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) + \delta_1^{n_1} \ln k, \quad (3.3)$$

$$H_{2n_1}^c(\gamma_{11}^c, \dots, \gamma_{1n_1}^c, \gamma_{21}^c, \dots, \gamma_{2n_1}^c; x) = \sum_{j=0}^{n_2} a_2^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_1} \delta_1^{n_1-j} \ln(\gamma_{2j}^c) + \\ + \sum_{j=1}^{n_1} \delta_2^{n_1-j} \sum_{i=1}^{n+j} a_2^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n_2-j} B^j + \delta_2^{n_1} \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(1 - k), \quad (3.4)$$

где $n = n_2 - n_1$.

Кооперативные стратегии игроков связаны как

$$\gamma_{1t}^c = \frac{\varepsilon \gamma_{11}^c \sum_{j=t-1}^{n+t} a_2^j}{\varepsilon a_1^{t-1} \sum_{j=0}^{n+t} a_2^j + \gamma_{11}^c \left(\sum_{j=t-1}^{n+t} a_2^j \sum_{j=0}^t a_1^j - (a_1^{t-1} + a_1^t) \sum_{j=0}^{n+t} a_2^j \right)}, \quad (3.5)$$

$$\gamma_{2t}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{1t}^c \sum_{j=0}^t a_1^j}{\sum_{j=0}^{n+t} a_2^j}. \quad (3.6)$$

Стратегия первого игрока на последнем шаге – γ_{11}^c определяется из решения одного из условий первого порядка, например

$$a_1^{n-1}(\varepsilon - \gamma_{11}^c(1 + a_1))(H_1^n - V_1) - a_2^{n-1}(1 + a_2)\gamma_{11}^c(H_2^n - V_2) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим временной промежуток $[n_1, n_2]$, где второй игрок эксплуатирует ресурс индивидуально. Начнем с одношаговой игры и предположим, что в конечный момент игрок получает весь оставшийся ресурс. Заметим, что это не означает, что ресурс весь исчерпывается. В данном предположении игрок получает некоторую компенсацию (выраженную в денежных единицах, если домножить на соответствующую константу) за неиспользованный им ресурс.

Пусть начальный размер популяции x . Как и ранее [2], [3], ищем стратегию второго игрока в линейном виде $u_{21}^a = \gamma_{21}x$. Тогда, выигрыш второго игрока в одношаговой игре имеет вид

$$H_{21}(\gamma_{21}) = \ln(\gamma_{21}x) + \delta_2 \ln(\varepsilon x - \gamma_{21}x)^\alpha = (1+a_2) \ln x + \ln(\gamma_{21}) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_{21}).$$

Так как данная функция является вогнутой, то для нахождения максимума используем условия первого порядка и получим стратегию $\gamma_{21} = \frac{\varepsilon}{1+a_2}$ и выигрыш в виде

$$H_{21}(\gamma_{21}) = (1+a_2) \ln x + (1+a_2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2}\right) + a_2 \ln a_2.$$

Следовательно, выигрыш второго игрока в двухшаговой игре примет вид

$$H_{22}(\gamma_{21}, \gamma_{22}) = \ln(\gamma_{22}x) + \delta_2 H_{21}(\gamma_{21}) = (1+a_2+a_2^2) \ln x + \ln(\gamma_{22}) + a_2(1+a_2) \ln(\varepsilon - \gamma_{22}) + \delta_2 \left((1+a_2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2}\right) + a_2 \ln a_2 \right).$$

Аналогично, из условий первого порядка получим $\gamma_{22} = \frac{\varepsilon}{1+a_2+a_2^2}$ и выигрыш второго игрока в виде

$$H_{22}(\gamma_{21}, \gamma_{22}) = (1+a_2+a_2^2) \ln x + (1+a_2+a_2^2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2+a_2^2}\right) + (a_2+a_2^2) \ln(a_2+a_2^2) + \delta_2 \left((1+a_2) \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+a_2}\right) + a_2 \ln a_2 \right).$$

Продолжая процесс $n = n_2 - n_1$ шагов, получим, что стратегия второго игрока, оставшегося в процессе эксплуатации, имеет вид $\gamma_{2n} = \frac{\varepsilon}{\sum_{j=0}^n a_2^j}$, а выигрыш –

$$V_2^{ac}(x^{cn_1}, \delta_2)[n_1, n_2] = H_{2n}(\gamma_{21}, \dots, \gamma_{2n}) = \sum_{j=0}^n a_2^j \ln x + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n-j} B^j, \quad (3.7)$$

где

$$B^j = \sum_{l=0}^j a_2^l \ln\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{p=0}^j a_2^p}\right) + \sum_{l=1}^j a_2^l \ln\left(\sum_{p=1}^j a_2^p\right), \quad n = n_2 - n_1.$$

Выигрыш второго игрока $V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]$, когда он участвует в процессе эксплуатации индивидуально после некооперативного поведения игроков – это выигрыш (3.7) с начальным размером популяции x^{Nn_1} (см. (2.5) при $n = n_1$):

$$V_2(x, \delta_2)[n_1, n_2] = \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(x^{Nn_1}) + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n-j} B^j.$$

Следовательно, все выигрыши, кроме кооперативных, в задаче (3.2) определены. Для определения кооперативного поведения в n_1 -шаговой игре определим кооперативные стратегии, начиная с шага n_1 .

Считаем, что после момента времени n_1 первый игрок получает в качестве компенсации долю k от оставшегося ресурса, а второй игрок продолжает процесс эксплуатации с доли $(1 - k)$ неиспользованного ресурса. Этот подход отличается от традиционного равного деления, параметр k предполагается здесь заранее заданным, а в дальнейших исследованиях может быть использован для регулирования кооперативного поведения.

Рассмотрим одношаговую игру, выигрыш первого игрока имеет вид

$$\begin{aligned} H_{11}^c(u_1, u_2; x) &= \ln(u_1) + \delta_1 \ln(k(\varepsilon x - u_1 - u_2)^\alpha) = \\ &= (1 + a_1) \ln x + a_1 \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \delta_1 \ln k, \end{aligned} \quad (3.8)$$

второго игрока –

$$\begin{aligned} H_{21}^c(u_1, u_2; x) &= \ln(u_2) + \delta_2 V_2^{ac}(x^{cn_1}, \delta_2)[n_1, n_2] = \\ &= \ln(u_2) + \delta_2 \sum_{j=0}^n a_2^j \ln((1 - k)(\varepsilon x - u_1 - u_2)^\alpha) + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n+1-j} B^j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln(u_2) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \delta_2^{n+1-j} B^j + \delta_2 \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(1 - k). \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Используя арбитражную схему Нэша определим кооперативные стратегии из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned}
 H_1^c &= (H_{11}^c(u_1, u_2; x) - V_1^N(x, \delta_1)[n_1 - 1, n_1]) \cdot \\
 &\cdot (H_{21}^c(u_1, u_2; x) - [V_2^N(x, \delta_2)[n_1 - 1, n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]]) = \\
 &= (H_{11}^c - V_1^N)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N) \rightarrow \max_{u_1, u_2}, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

где $\tilde{V}_2^N$ обозначено выражение в квадратных скобках, а H_{11}^c, H_{21}^c имеют вид (3.8), (3.9).

В Приложении приведено доказательство того, что решение задачи (3.10) достигается во внутренней точке допустимого множества и единственно. Поэтому, из условий первого порядка получим следующую связь кооперативных стратегий игроков в одношаговой игре:

$$u_2 = \frac{\varepsilon x - u_1(1 + a_1)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j}. \quad (3.11)$$

Аналогично [2], [3], предполагается, что стратегии игроков линейно зависят от количества ресурса $u_1 = \gamma_{11}^c x$, $u_2 = \gamma_{21}^c x$, откуда получаем

$$\gamma_{21}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{11}^c(1 + a_1)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j}. \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим задачу (3.2) с двумя шагами, где стратегии игроков линейны $u_{1t}^c = \gamma_{1t}^c x$, $u_{2t}^c = \gamma_{2t}^c x$. Функция выигрыша первого игрока в двухшаговой игре имеет вид

$$\begin{aligned}
 &H_{12}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) = \\
 &= \ln(\gamma_{12}^c x) + \delta_1 H_1^{1c}(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; (\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(\gamma_{12}^c x) + \delta_1(1 + a_1) \ln(\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha + \\
&\quad + \delta_1(\ln(\gamma_{11}^c) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \delta_1 \ln k) = \\
&= (1 + a_1 + a_1^2) \ln x + \ln(\gamma_{12}^c) + a_1(1 + a_1) \ln(\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c) + \\
&\quad + \delta_1 \ln(\gamma_{11}^c) + \delta_1 a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \delta_1^2 \ln k,
\end{aligned}$$

а второго –

$$\begin{aligned}
&H_{22}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) = \\
&= \ln(\gamma_{22}^c x) + \delta_2 H_2^{1c}(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; (\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha) = \\
&= \ln(\gamma_{22}^c x) + \delta_2 \ln(\gamma_{21}^c) + \delta_2 \sum_{j=0}^{n+1} a_2^j \ln(\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha + \\
&+ \delta_2 \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n+2-j} B^j + \delta_2^2 \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(1 - k) = \\
&= \ln(\gamma_{22}^c) + \sum_{j=0}^{n+2} a_2^j \ln x + \sum_{j=1}^{n+2} a_2^j \ln(\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c) + \delta_2 \ln(\gamma_{21}^c) + \\
&+ \delta_2 \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n+2-j} B^j + \delta_2^2 \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(1 - k).
\end{aligned}$$

Для определения кооперативного поведения в этой двухшаговой игре необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
H_2^c &= (H_{12}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) - V_1^N(x, \delta_1)[n_1 - 2, n_1]) \cdot \\
&\quad \cdot (H_{22}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) - \\
&\quad - [V_2^N(x, \delta_2)[n_1 - 2, n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]]) = \\
&= (H_{21}^c - V_1^N)(H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) \rightarrow \max_{\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c}, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где $\tilde{V}_2^N$ обозначено выражение в квадратных скобках.

Аналогично одношаговой игре, как показано в Приложении, для определения оптимального решения необходимо и достаточно использовать условия первого порядка:

$$\frac{\partial H_2^c}{\partial \gamma_{11}^c} = \left(\frac{\delta_1}{\gamma_{11}^c} - \frac{\delta_1 a_1}{\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c} \right) (H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) - \frac{\delta_2 \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c} (H_{12}^c - V_1^N) = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial H_2^c}{\partial \gamma_{21}^c} = -\frac{\delta_1 a_1}{\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c} (H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) + \left(\frac{\delta_2}{\gamma_{21}^c} - \frac{\delta_2 \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c} \right) (H_{12}^c - V_1^N) = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial H_2^c}{\partial \gamma_{12}^c} = \left(\frac{1}{\gamma_{12}^c} - \frac{a_1 + a_1^2}{\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c} \right) (H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) - \frac{\sum_{j=1}^{n+2} a_2^j}{\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c} (H_{12}^c - V_1^N) = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial H_2^c}{\partial \gamma_{22}^c} = -\frac{a_1 + a_1^2}{\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c} (H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) + \left(\frac{1}{\gamma_{22}^c} - \frac{\sum_{j=1}^{n+2} a_2^j}{\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c} \right) (H_{12}^c - V_1^N) = 0. \quad (3.17)$$

Вычитая (3.15) из (3.14) и (3.17) из (3.16), получим

$$(H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) = \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\gamma_{11}^c}{\gamma_{21}^c} (H_{12}^c - V_1^N), \quad (3.18)$$

$$(H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) = \frac{\gamma_{12}^c}{\gamma_{22}^c} (H_{12}^c - V_1^N). \quad (3.19)$$

Откуда

$$\frac{a_2}{a_1} \frac{\gamma_{11}^c}{\gamma_{21}^c} = \frac{\gamma_{12}^c}{\gamma_{22}^c}. \quad (3.20)$$

Подставляя (3.18) и (3.19) в (3.14) и (3.15), получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\gamma_{21}^c} \left(1 - \frac{a_1 \gamma_{11}^c + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \gamma_{21}^c}{\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c} \right) (H_1^{2c} - V_1^N) &= 0, \\ \frac{1}{\gamma_{22}^c} \left(1 - \frac{(a_1 + a_1^2) \gamma_{12}^c + \sum_{j=1}^{n+2} a_2^j \gamma_{22}^c}{\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c} \right) (H_1^{2c} - V_1^N) &= 0. \end{aligned}$$

Откуда, кооперативные стратегии на первом шаге связаны как (3.12), а на втором шаге –

$$\gamma_{22}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{12}^c (1 + a_1 + a_1^2)}{\sum_{j=0}^{n+2} a_2^j}. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в (3.20), получим следующее соотношение:

$$\gamma_{12}^c = \frac{\varepsilon \gamma_{11}^c \sum_{j=1}^{n+2} a_2^j}{\varepsilon a_1 \sum_{j=0}^{n+2} a_2^j + \gamma_{11}^c \left(\sum_{j=1}^{n+2} a_2^j (1 + a_1 + a_1^2) - (a_1 + a_1^2) \sum_{j=0}^{n+2} a_2^j \right)}.$$

Следовательно, все параметры выражены через одну неизвестную стратегию первого игрока на последнем шаге – γ_{11}^c , для определения которой необходимо решить одно из уравнений (3.14)–(3.17). К сожалению, аналитическое решение не может быть получено, поэтому ниже будут представлены результаты численного моделирования.

Продолжая процесс для n_1 -шаговой игры получим кооперативные выигрыши в виде (3.3), (3.4) и кооперативные стратегии в виде (3.5), (3.6). $\square$

4. Численное моделирование

Численное моделирование было проведено со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0.6, \quad \alpha = 0.3, \quad x_0 = 0.8, \\ \delta_1 = 0.85, \quad \delta_2 = 0.9, \quad k = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Приведем результаты для горизонтов планирования

$$n_1 = 10, \quad n_2 = 20.$$

Численно получено $\gamma_{11}^c = 0.2723$.

Сравним кооперативный и некооперативный выигрыши первого игрока на временном промежутке $[0, n_1]$:

$$V_1^c(x, \delta_1)[0, n_1] = -10.3870 > V_1^N(x, \delta_1)[0, n_1] = -11.9010.$$

Для второго игрока сравним его кооперативный выигрыш на промежутке $[0, n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1, n_2]$ после кооперации с некооперативным выигрышем на промежутке $[0, n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1, n_2]$ после эгоистического поведения:

$$\begin{aligned} V_2^c(x, \delta_2)[0, n_1] + V_2^{ac}(x^{cn_1}, \delta_2)[n_1, n_2] &= -19.6375 > \\ > V_2^N(x, \delta_2)[0, n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1}, \delta_2)[n_1, n_2] &= -23.2596. \end{aligned}$$

Заметим, что кооперативные выигрыши обоих игроков больше, чем выигрыши в равновесии по Нэшу.

На рис. 1 показан размер популяции на всем промежутке планирования $[0, n_2]$, откуда еще раз видно, что кооперативное поведение благотворно влияет на экологическую обстановку.

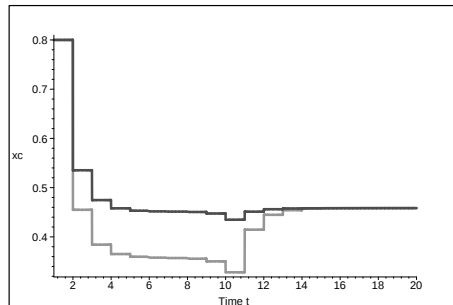


Рисунок 1. Размер популяции: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

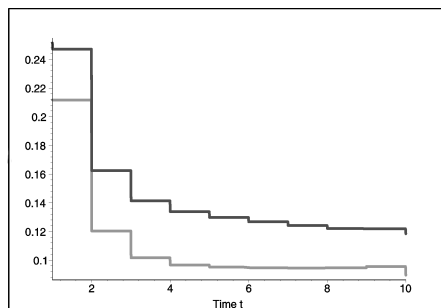


Рисунок 2. Вылов первого игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

Вылов первого игрока на промежутке $[0, n_1]$ показан на рис. 2, а вылов второго игрока на промежутках $[0, n_1]$ и $[n_1, n_2]$ – на рис. 3. Заметим, что при кооперации вылов второго игрока меньше, чем в равновесии по Нэшу, но это компенсируется его дальнейшей индивидуальной эксплуатацией ресурса.

Теперь сравним выигрыши игроков для различных горизонтов планирования. На рис. 4 представлены функции выигрыша

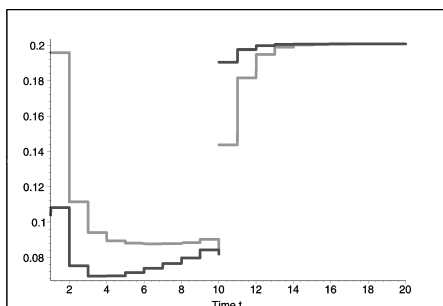


Рисунок 3. Вылов второго игрока: темная линия – кооперативное поведение+индивидуальный, светлая – равновесие по Нэшу+индивидуальный

$V_1^c(x, \delta_1)[0, n_1]$ и $V_2^c(x, \delta_2)[0, n_1] + V_2^{ac}(x^{cn_1}, \delta_2)[n_1, n_2]$ для $n_2 = 2, \dots, 10$ и $n_1 = 1, \dots, n_2 - 1$. Видно, что чем n_1 становится ближе к n_2 разница между выигрышами игроков становится меньше.

Заметим, что при использовании предложенного в работе подхода кооперативный выигрыш игрока всегда больше или равен (при некоторых параметрах) выигрышу в равновесии по Нэшу. На рис. 5 приведены выигрыши второго игрока при кооперативном и эгоистическом поведении для различных горизонтов планирования. Следовательно, предложенный подход стимулирует кооперативное поведение.

5. Заключение

Традиционно задачи управления биоресурсами рассматривались в предположении симметричности игроков [1, 5, 7, 8]. В предыдущих работах [2, 3] была исследована модель, в которой участники имеют различные коэффициенты дисконтирования.

В данной статье исследована теоретико-игровая модель эксплуатации ресурсов с участниками, которые используют не только различные коэффициенты дисконтирования, но и различные горизонты планирования. Для построения кооперативных стратегий в данной задаче предложено использование арбитражной процедуры Нэша.

Определены стратегии и выигрыши обоих игроков и приведены результаты численного моделирования. Показано, что применение

арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выгодно обоим игрокам, и, при этом, устанавливается более щадящий режим эксплуатации.

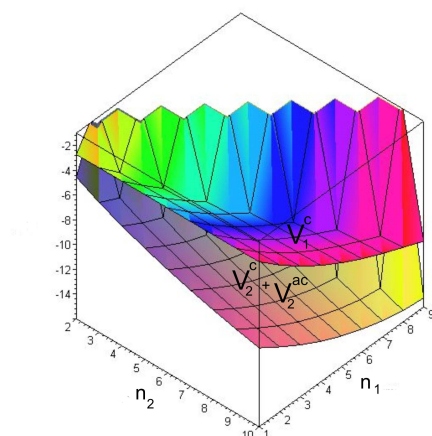


Рисунок 4. Кооперативные выигрыши игроков

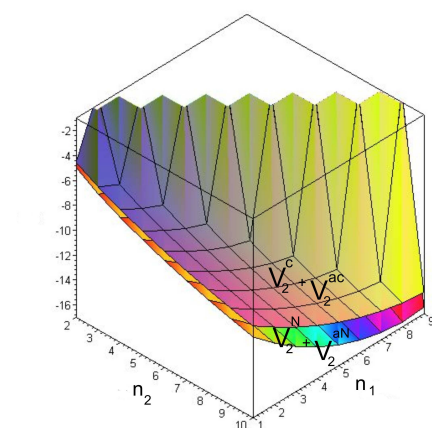


Рисунок 5. Выигрыши второго игрока: кооперативный и в равновесии по Нэшу

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Дискретная задача разделения биоресурсов* // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 259-270
2. Реттиева А.Н. *Дискретная задача управления биоресурсами с асимметричными игроками* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 4. С. 63–72.
3. Реттиева А.Н. *Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 3. С. 72–87.
4. Breton M., Keoula M.Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Ecological Economics. 2014. V. 97. P. 209–223
5. Levhari D., Mirman L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // The Bell J. of Economics 1980. V. 11(1). P. 322–334.
6. Marin-Solano J., Shevkoplyas E.V. *Non-constant discounting and differential games with random time horizon* // Automatica. 2011. V. 47. P. 2626–2638
7. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars and cooperation maintenance* // Ecological Modelling. 2010. V. 221. P. 1545–1553.
8. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars with many players* // International Game Theory Review. 2010. V. 12. N 4. P. 385–405.
9. Shevkoplyas E.V. *The Shapley value in cooperative differential games with random duration* // Annals of the Int. Soc. of Dynamic Games. 2011. V. 11. P. 359–373.

6. Приложение

Покажем, что решение задачи (3.10) существует, единственно и достигается во внутренней точке допустимого множества. Запишем (3.10) в виде задачи минимизации произведения Нэша

$$H_1^c = (-H_{11}^c + V_1^N)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N) \rightarrow \min$$

на множестве

$$V_1^N - H_{11}^c \leq 0, \quad (6.1)$$

$$\tilde{V}_2^N - H_{21}^c \leq 0, \quad (6.2)$$

$$-(\varepsilon x - u_1 - u_2) \leq 0,$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0.$$

Здесь неравенства (6.1), (6.2) обозначают рациональность арбитражного решения, а последние два неравенства – это условия, которым должны удовлетворять допустимые стратегии.

Используя теорему Куна–Таккера запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = (-H_{11}^c + V_1^N)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N) + \lambda_1(V_1^N - H_{11}^c) + \lambda_2(\tilde{V}_2^N - H_{21}^c) - \lambda_3(\varepsilon x - u_1 - u_2).$$

Заметим сразу, что множитель Лагранжа λ_3 может быть исключен из условий минимума, т.к. условия для него имеют вид

$$\varepsilon x - u_1 - u_2 \geq 0,$$

$$\lambda_3(\varepsilon x - u_1 - u_2) = 0,$$

и, если предположить, что $\lambda_3 > 0$, то $\varepsilon x - u_1 - u_2 = 0$ и $H_{11}^c = H_{21}^c = -\infty$, что противоречит условиям (6.1), (6.2).

Следовательно, запишем условия Куна–Таккера только для двух множителей Лагранжа (здесь введено обозначение $\bar{x} = \varepsilon x - u_1 - u_2$)

$$\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}}\right)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N + \lambda_1) + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}(H_{11}^c - V_1^N - \lambda_2) \geq 0,$$

$$u_1 \left[\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}}\right)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N + \lambda_1) + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}(H_{11}^c - V_1^N + \lambda_2) \right] = 0,$$

$$\left(-\frac{1}{u_2} + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}\right)(H_{11}^c - V_1^N + \lambda_2) + \frac{a_1}{\bar{x}}(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N + \lambda_1) \geq 0,$$

$$u_2 \left[\left(-\frac{1}{u_2} + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}\right)(H_{11}^c - V_1^N + \lambda_2) + \frac{a_1}{\bar{x}}(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N + \lambda_1) \right] = 0,$$

$$H_{11}^c - V_1^N \geq 0, \quad (6.3)$$

$$\lambda_1(H_{11}^c - V_1^N) = 0, \quad (6.4)$$

$$H_{21}^c - \tilde{V}_2^N \geq 0, \quad (6.5)$$

$$\lambda_2(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N) = 0, \quad (6.6)$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

1. Рассмотрим случай $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, тогда из (6.6) получим

$$H_{21}^c - \tilde{V}_2^N = 0.$$

Если хотя бы одна из стратегий $u_i, i = 1, 2$ равняется нулю, то условия (6.3) или (6.5) не выполняются. Следовательно, $u_i > 0, i = 1, 2$ и тогда

$$H_{11}^c - V_1^N = -\lambda_2,$$

что противоречит условию (6.3).

2. Аналогично, в случае $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ получим $H_{21}^c - \tilde{V}_2^N = -\lambda_1$, что противоречит условию (6.5).

3. Рассмотрим случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, тогда из (6.4) и (6.6) получим

$$H_{11}^c - V_1^N = 0, \quad H_{21}^c - \tilde{V}_2^N = 0.$$

Аналогично первому случаю, легко проверить, что $u_i > 0, i = 1, 2$, а целевая функция H_1^c равна нулю. Из системы условий Куна–Таккера получим

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}}\right)\lambda_1 + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}\lambda_2 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{u_2} + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}\right)\lambda_2 + \frac{a_1}{\bar{x}}\lambda_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Следовательно,

$$\lambda_2 = \frac{u_2}{u_1}\lambda_1.$$

Из первого уравнения (6.7) получим

$$\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{\bar{x}} + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}} \frac{u_2}{u_1}\right) \lambda_1 = 0. \quad (6.8)$$

Так как в данном случае кооперативное поведение совпадает с некооперативным, то $u_1 = u_1^N$, $u_2 = u_2^N$. Подставляя некооперативные стратегии запишем (6.8) в следующем виде:

$$\frac{a_1 \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{u_1 \bar{x}} \lambda_1 = 0.$$

Получили, что $\lambda_1 = 0$, что противоречит предположению.

4. Окончательно, рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Аналогично, легко проверить, что $u_i > 0$, $i = 1, 2$. Следовательно, минимум достигается во внутренней точке допустимого множества и может быть найден из условий первого порядка.

Для того, чтобы показать, что условия Куна–Таккера являются достаточными условиями в задаче (3.10) рассмотрим вторую производную H_1^c по u_1 :

$$f_1 = \left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{a_1}{\bar{x}^2}\right)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N) + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}^2}(H_{11}^c - V_1^N) + \frac{2 \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}} \left[\frac{1}{u_1} - \frac{a_1}{\bar{x}}\right],$$

и по u_2 :

$$f_2 = \left(\frac{1}{u_2^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}^2}\right)(H_{11}^c - V_1^N) + \frac{a_1}{\bar{x}^2}(H_{21}^c - \tilde{V}_{21}^N) + \frac{2a_1}{\bar{x}} \left[\frac{1}{u_2} - \frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\bar{x}}\right].$$

Следовательно, H_1^c вогнута, если $f_1 \geq 0$ и $f_2 \geq 0$. Заметим, что для этого выражения в квадратных скобках должны быть положительны. Следовательно, условия принимают вид

$$\varepsilon x - u_1(1 + a_1) - u_2 \geq 0, \quad \varepsilon x - u_1 - u_2 \sum_{j=0}^{n+1} a_2^j \geq 0.$$

Из условий первого порядка получим решение в виде (3.11), поэтому в точке максимума выполняется

$$\varepsilon x - u_1(1 + a_1) - u_2 \sum_{j=0}^{n+1} a_2^j = 0.$$

Следовательно, полученное решение удовлетворяет условиям. Более того, условия выполняются и в некоторой окрестности точки решения, т.к.

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j u_2 > 0, \quad a_1 u_1 > 0.$$

Таким образом, показано, что условия Куна–Таккера являются достаточными условиями существования максимума.

Покажем, что полученное решение единственно. Предположим, что существуют два решения: u_1, u_2 и $\hat{u}_1, \hat{u}_2$. Из условий Куна–Таккера получим следующее соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u_1} (\ln(u_2) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + K_2) - \\ & - \frac{1}{\hat{u}_1} (\ln(\hat{u}_2) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln(\varepsilon x - \hat{u}_1 - \hat{u}_2) + K_2) = \\ & = \frac{1}{u_2} (\ln(u_1) + a_1 \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + K_1) - \\ & - \frac{1}{\hat{u}_2} (\ln(\hat{u}_1) + a_1 \ln(\varepsilon x - \hat{u}_1 - \hat{u}_2) + K_1), \end{aligned}$$

где

$$K_1 = \delta_1 \ln k - V_1^N, \quad K_2 = \sum_{j=1}^n \delta_2^{n+1-j} B^j + \delta_2 \sum_{j=0}^n a_2^j \ln(1 - k) - V_2^N.$$

Подставляя выражения (3.11) для u_2 и $\hat{u}_2$, запишем

$$\begin{aligned}
 f = & \\
 = & \frac{1}{u_1} \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x - u_1(1+a_1)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - u_1 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - a_1 \right)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + K_2 \right) - \\
 & - \frac{1}{\hat{u}_1} \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x - \hat{u}_1(1+a_1)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - \hat{u}_1 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - a_1 \right)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + K_2 \right) - \\
 & - \frac{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j}{\varepsilon x - u_1(1+a_1)} \left(\ln(u_1) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - u_1 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - a_1 \right)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + K_1 \right) + \\
 & + \frac{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j}{\varepsilon x - \hat{u}_1(1+a_1)} \left(\ln(\hat{u}_1) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - \hat{u}_1 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - a_1 \right)}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + K_1 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Исследуем функцию f и покажем, что она равна нулю только при $u_1 = \hat{u}_1$.

Легко видеть, что f возрастает по u_1 и убывает по $\hat{u}_1$. Рассмотрим пределы $u_1 \rightarrow 0$ и $u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}$. Выражение для второго предела получено из условий неотрицательности $\varepsilon x - u_1(1+a_1)$ и $\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - u_1 \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_2^j - a_1 \right)$.

Сначала рассмотрим

$$f_1 = u_1 \hat{u}_1 f.$$

Так как

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} f_1 = \hat{u}_1 \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) \right)$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow 0} f_1 = -u_1 \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) + \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) \right),$$

то

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} f = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{f_1}{u_1 \hat{u}_1} = -\infty$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow 0} f = \lim_{\hat{u}_1 \rightarrow 0} \frac{f_1}{u_1 \hat{u}_1} = \infty.$$

Теперь рассмотрим

$$f_2 = (\varepsilon x - u_1(1 + a_1))(\varepsilon x - \hat{u}_1(1 + a_1))f.$$

Так как

$$\lim_{u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f_2 = - \left(\ln \left(\frac{\varepsilon x}{1 + a_1} \right) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right) \right)$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f_2 = \ln \left(\frac{\varepsilon x}{1 + a_1} \right) + a_1 \ln \left(\frac{\varepsilon x \sum_{j=1}^{n+1} a_2^j}{\sum_{j=0}^{n+1} a_2^j} \right),$$

то

$$\lim_{u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f = \lim_{u_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} \frac{f_2}{(\varepsilon x - u_1(1 + a_1))(\varepsilon x - \hat{u}_1(1 + a_1))} = \infty$$

и

$$\lim_{\hat{u}_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} f = \lim_{\hat{u}_1 \rightarrow \frac{\varepsilon x}{1+a_1}} \frac{f_2}{(\varepsilon x - u_1(1 + a_1))(\varepsilon x - \hat{u}_1(1 + a_1))} = -\infty.$$

Следовательно, f равно нулю только при $u_1 = \hat{u}_1$, а так как такая точка единственна, то и полученное решение единственно.

Аналогичным образом показывается, что решения всех задач максимизации раздела 3 достигаются во внутренних точках, единственны и могут быть получены из условий первого порядка.

BIORESOURCE MANAGEMENT PROBLEM WITH
DIFFERENT HARVESTING TIMES

Anna N. Rettieva, Institute of Applied Mathematical Research
Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc.,
docent (ammaret@krc.karelia.ru).

Abstract: Discrete-time game-theoretic model related to a bioresource management problem (fishery) is investigated. The players are countries or fishing firms that harvest the fish stock. Players differ in their time preferences, and use different discount factors. Furthermore, the players have different planning horizons. The main goal here is to construct the value function for the cooperative solution and to distribute the joint payoff among the players. We propose to use recursive Nash bargaining solution to determine cooperative behavior.

Keywords: bioresource management problem, asymmetric players, Nash bargaining solution.