Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.3, с. 93–104

УДК 519.83
ББК 22.18

УКЛОНЕНИЕ ОТ ВСТРЕЧИ В КОНУСЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Любовь С. Чиркова*
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: lmvstk@yandex.ru

Рассматривается задача о конфликтном взаимодействии одного убегающего с группой преследователей при равных динамических возможностях всех игроков. Движение каждого из них описывается дифференциальным уравнением третьего порядка. В начальный момент времени заданы начальные условия. Доказано, что если число преследователей меньше размерности пространства, и начальное положение, скорость и ускорение убегающего принадлежат заданному конусу, то в игре происходит уклонение от встречи.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, фазовые ограничения, уклонение от встречи в конусе.

1. Введение

В [8] были получены необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования с равными возможностями всех участников. Показано, что поимка происходит тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей.

©2014 Л.С. Чиркова

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-000195).

В работе [10] исследована задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследователей, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Доказано, что в игре происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций.

В [6] рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что среди преследователей имеются как участники, максимальные скорости которых совпадают с максимальной скоростью убегающего, так и участники, у которых максимальные скорости строго меньше максимальной скорости убегающего, и при этом убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Получены условия, при которых преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

Задачи уклонения, в которых возможности убегающего превосходят возможности преследователей, рассматривались Заком В.Л. В [4] доказана возможность уклонения из любых начальных позиций в дифференциальных играх второго порядка при условии, что возможности убегающего больше возможностей преследователей.

В работах [7, 11] рассматривалась задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а закон движения каждого из них – дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Было получено достаточное условие уклонения от встречи при дискриминации преследователей.

Нестационарная задача уклонения в дифференциальных играх второго порядка рассматривалась в работах [1, 5]. В [12] доказано убегание в дифференциальной игре второго порядка одного убегающего от группы преследователей при условии, что убегающий не покидает границы выпуклого конуса. В [13] получены достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от группы преследователей в игре третьего порядка с равными возможностями участников.

В данной работе найдены достаточные условия уклонения от встречи при условии, что все участники обладают равными возможностями, закон движения каждого из участников – дифференциальное

уравнение третьего порядка, а убегающий не покидает границы выпуклого конуса.

Работа примыкает к исследованиям [2, 3, 9].

2. Постановка и решение задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $k+1$ лиц: k преследователей $P_1, \ldots, P_k$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\begin{gathered} \dddot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \\ x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0, \quad \ddot{x}_i(0) = \ddot{x}_i^0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\begin{gathered} \dddot{y} = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \\ y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad \ddot{y}(0) = \ddot{y}^0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы множества D вида

$$D = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n,\ (q_j, y) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m\},$$

где q_j - единичные векторы.

Вместо систем (2.1), (2.2) рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \dddot{z}_i = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \\ \dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^0 = \dot{x}_i^0 - \dot{y}^0, \quad \ddot{z}_i(0) = \ddot{z}_i^0 = \ddot{x}_i^0 - \ddot{y}^0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

полученную заменой $z_i = x_i - y$.

Обозначим через $\operatorname{Int} X$, ∂X, $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность, границу и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{N}_q = \{1, \ldots, q\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Определение 2.1. *Говорят, в дифференциальной игре (2.3) из начального состояния* $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0)$ *возможно убегание, если по любым измеримым функциям* $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $u_i(t) \in S$, $i \in \mathbb{N}_k$, *можно построить такую измеримую функцию* $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, $v(t) \in S$, *что* $\|z_i(t)\| \neq 0$, $\|\dot{z}_i(t)\| \neq 0$ *для любого* $i \in \mathbb{N}_k$ *и* $y(t) \in D\ \forall\ t \geqslant 0$.

Теорема 2.1. *Если* $k \leqslant n-1$, y^0, $\dot{y}^0$, $\ddot{y}^0 \in D$, *то в игре (2.3) из начальноо состояния* $z^0 = (z_1^0, \dot{z}_1^0, \ddot{z}_1^0, \ldots, z_k^0, \dot{z}_k^0, \ddot{z}_k^0)$ *возможно убегание.*

Доказательство. Так как число преследователей меньше размерности пространства, то можно считать, что $0 \notin \operatorname{co}\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ddot{z}_i^0\}$. В противном случае убегающий добивается этого условия за сколь угодно малое время. Тогда на основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существует вектор $p \in \partial S$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(\ddot{z}_i^0, p) \leqslant -2\varepsilon$. Введем обозначения

$$\eta_1(t) = \min_{1\leqslant i\leqslant k}(\|z_i(t)\|), \quad \eta_2(t) = \min_{1\leqslant i\leqslant k}(\|\dot{z}_i(t)\|), \quad \eta_3(t) = \min_{1\leqslant i\leqslant k}(\|\ddot{z}_i(t)\|),$$

$$\eta_4(t) = \min_{1\leqslant j\leqslant m}|(y(t), q_j)|, \quad \eta_5(t) = \min_{1\leqslant j\leqslant m}|(\dot{y}(t), q_j)|,$$

$$\eta_6(t) = \min_{1\leqslant j\leqslant m}|(\ddot{y}(t), q_j)|, \quad \delta = \min\{1, \varepsilon, \min_{1\leqslant j\leqslant 6}\sqrt{\eta_j(0)}\}.$$

Введем убывающие последовательности τ_j, $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что, если $\|z_l(t')\| = \delta_j$, $(z_l(t'), p) > 0$, $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_j$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, то $(z_l(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$ или $(\dot{z}_l(t'+\tau_j), p) \leqslant 0$ при любых управлениях $u_l(s)$, $v(s)$ на $[t', t'+\tau_j]$.

Момент времени $t_i > 0$, в который впервые выполняются равенства $\eta_1(t) = \delta_i$ и $\eta_2(t) = \delta_i$, и существует $l \in \mathbb{N}_k$ такой, что $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$ назовем моментом i-го сближения.

Положим $v(t) = 0$, $t \in [0, +\infty) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[t_i, t_i + \tau_i)$. При $t = 0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_1^i = \frac{\delta}{2^{i+2}}$, $\delta_1^i = (3\delta - \tau_1^i)\frac{(\tau_1^i)^2}{4!}$, $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tau_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{i+2}} = \frac{\delta}{4} = \xi_1$.

Если в момент времени $t = t'$ для некоторого $i \in \mathbb{N}_k$ $\|z_l(t')\| = \delta_1^i$, $\|\dot{z}_l(t')\| = \delta_1^i$, $(z_l(t'), p) > 0$, $(\dot{z}_l(t'), p) > 0$, $(\ddot{z}_l(t'), p) < -\delta$, то при любых управлениях $u_i(t)$, $v(t)$ на $[t', t'+\tau_1^i]$ справедливо неравенство $(z_l(t'+\tau_1^i), p) < \delta_1^i + \delta_1^i\tau_1^i - \delta\frac{(\tau_1^i)^2}{2} + \frac{(\tau_1^i)^3}{3!} < 0$.

Положим $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_l(t_i)\| = \delta_i$, $(z_l(t_i), p) > 0$, $\|\dot{z}_l(t_i)\| = \delta_i$, $(\dot{z}_l(t_i), p) > 0$, определены числа τ_i, ξ_i и последовательности $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$.

1. Предположим, что

$$(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) \neq -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\| \tag{2.4}$$

Управление убегающего на полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ полагаем равным $u_l(s)$, если на всем полуинтервале он не встречает ни одного из преследователей. Если на $[t_i, t_i+\tau_i)$ происходят сближения с преследователями P_r, $r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, то $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty} [t_j, t_j+\tau_j)$.

Убегающий будет сближаться с преследователями P_r, $r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, настолько близко и «обходить» их за столь малое время, чтобы для траектории $z_l(t)$ на отрезке $[t_i, t_i+\tau_i]$ при любых управлениях $u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i+\tau_i]$, выполнялись следующие соотношения:

$$(z_l(t_i+\tau), \dot{z}_l(t_i+\tau)) \neq -\|z_l(t_i+\tau)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i+\tau)\| \quad \forall \tau \in [0, \tau_i],$$

$$\min_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]} \|z_l(t)\| > \delta_{i+1}, \qquad \min_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]} \|\dot{z}_l(t)\| > \delta_{i+1}. \tag{2.5}$$

Обозначим через $l_i(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, прямую, проходящую через точки $x(\tau) = z_l(t_i) + \dot{z}_l(t_i)\tau$ и $y(\tau) = \dot{z}_l(t_i)$. На основании линейной независимости векторов $z_l(t_i)$ и $\dot{z}_l(t_i)$ и из предположения (2.4) заключаем, что при любом $\tau \geqslant 0$ векторы $x(\tau)$, $y(\tau)$ линейно независимы, и функция $f(\tau) = \min\limits_{x\in l_i(\tau)} \|x\| > 0$. В момент $t = t_i$ определим число

$$\beta_i = \min\{\delta_i^{i+1}, \min_{\tau\in[0,\tau_i]} f(\tau)\}. \tag{2.6}$$

Если $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i+\tau_i]$, то соответствующая траектория при $t \in [t_i, t_i+\tau_i]$ имеет вид: $z_l^0(t) = x(t-t_i)$, $\dot{z}_l^0(t) = y(t-t_i)$. Тогда $\|z_l^0(t)\| \geqslant \beta_i$, $\|\dot{z}_l^0(t)\| \geqslant \beta_i \; \forall\, t \in [t_i, t_i+\tau_i]$. Теперь предположим, что на множестве $[t_i, t_i+\tau_i)$ задана такая счетная система полуинтервалов $[t^q, t^q+\tau^q)$, $q = 1, 2, \ldots$, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \tau^q < \xi_{i+1}, \quad \xi_{i+1} = \min\left\{\min_p \xi_{i+1}^p, \sqrt{\frac{\beta_i}{2}}\right\}, \tag{2.7}$$

где $\xi_{i+1}^p > 0$ – корни уравнения $\frac{(\xi_{i+1})^3}{3} + (\xi_{i+1})^2\tau_i + \xi_{i+1}\tau_i^2 - \frac{\beta_i}{2} = 0$.

Покажем, что, если $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} [t^q, t^q + \tau^q)$, управление $v(s)$ на множестве $\bigcup\limits_{q=1}^{\infty} [t^q, t^q + \tau^q)$ произвольно, то соответствующая траектория $z_l^r(t)$, $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ такова, что

$$\|z_l^r(t) - z_l^0(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.8}$$

$$\|\dot{z}_l^r(t) - \dot{z}_l^0(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.9}$$

для любого управления $u_l(s)$ $s \in [t_i, t_i + \tau_i]$.

Пусть $r = 1$, $z_l^1(t^1) = z_l^0(t^1)$. В момент $t = t^1 + \tau^1$ справедливо $\|z_l^1(t^1 + \tau^1) - z_l^0(t^1 + \tau^1)\| \leqslant \frac{(\tau^1)^3}{3}$, тогда при t из отрезка $[t^1 + \tau^1, t_i + \tau_i]$ $\|z_l^1(t) - z_l^0(t)\| < \frac{(\tau^1)^3}{3} + (\tau^1)^2\tau_i + \tau^1(\tau_i)^2$. Поэтому для всех t таких, что $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ $\|z_l^1(t) - z_l^0(t)\| < \frac{(\tau^1)^3}{3} + (\tau^1)^2\tau_i + \tau^1(\tau_i)^2$. Аналогично получим, что $\|z_l^r(t) - z_l^0(t)\| < \frac{(\xi_{i+1})^3}{3} + (\xi_{i+1})^2\tau_i + \xi_{i+1}(\tau_i)^2 \leqslant \frac{\beta_i}{2}$ $r \in \mathbb{N}$, $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$. Докажем неравенство (2.9).

При $r = 1$, $\dot{z}_l^1(t^1) = \dot{z}_l^0(t^1)$, $\|\dot{z}_l^1(t^1 + \tau^1) - \dot{z}_l^0(t^1 + \tau^1)\| \leqslant (\tau^1)^2$. При $t \in [t^1 + \tau^1, t_i + \tau_i]$ выполнено $\|\dot{z}_l^1(t) - \dot{z}_l^0(t)\| \leqslant (\tau^1)^2$, поэтому для всех $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ верно $\|\dot{z}_l^1(t) - \dot{z}_l^0(t)\| < (\tau^1)^2$.

Пусть теперь r – произвольное натуральное число, тогда выполнено $\|\dot{z}_l^r(t) - \dot{z}_l^0(t)\| \leqslant \sum\limits_{q=1}^{\infty} (\tau^q)^2 < (\xi_{i+1})^2 \leqslant \frac{\beta_i}{2}$. Покажем, что $\forall\, \tau \in [0, \tau_i]$

$$(z_l^r(t_i + \tau), \dot{z}_l^r(t_i + \tau)) \neq -\|z_l^r(t_i + \tau)\| \cdot \|\dot{z}_l^r(t_i + \tau)\| \tag{2.10}$$

Предположим противное: существуют $\tau_0 \in [0, \tau_i]$, $b > 0$ такие, что $z_l^r(t_i + \tau_0) = -b \cdot \dot{z}_l^r(t_i + \tau_0)$. В силу неравенств (2.8), (2.9) векторы $z_l^0(t_i + \tau_0)$, $\dot{z}_l^0(t_i + \tau_0)$ представимы в виде $z_l^0(t_i + \tau_0) = z_l^r(t_i + \tau_0) + x$, $\dot{z}_l^0(t_i + \tau_0) = \dot{z}_l^r(t_i + \tau_0) + y$, где x, $y \in \frac{\beta_i \cdot S}{2}$, пусть множество пар $L = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$. Согласно (2.6) $\min\limits_{\alpha \in L} \|\alpha_1 \cdot (z_l^r(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2 \cdot (\dot{z}_l^r(t_i + \tau_0) + y)\| \geqslant \beta_i$. С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+b}$, $\alpha_2^* = \frac{b}{1+b}$ $\|\alpha_1^* \cdot (z_l^r(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2^* \cdot (\dot{z}_l^r(t_i + \tau_0) + y)\| < \frac{\beta_i}{2}$. Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (2.10) выполняется при любом τ из $[0, \tau_i]$.

В момент $t = t_i$ по формулам (2.6), (2.7) определяем числа β_i, ξ_{i+1} и строим последовательности $\{\tau_{i+1}^{i+r}\}_{r=1}^{\infty}$, $\{\delta_{i+1}^{i+r}\}_{r=1}^{\infty}$ следующим обра-

зом: $\tau_{i+1}^{i+r} = \frac{\xi_{i+1}}{2^r}$, $\delta_{i+1}^{i+r} = (3\delta - \tau_{i+1}^{i+r})\frac{(\tau_{i+1}^{i+r})^2}{4}$, $\tau_{i+1}^{i+1} < \tau_i^{i+1}$, $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tau_{i+1}^{i+r} = \xi_{i+1}$. Положим $\delta_{i+1} = \min\left\{\delta_{i+1}^{i+1}, \min\limits_{j=4,5,6} \sqrt{\eta_j(t_i+\tau_i)}\right\}$, $\tau_{i+1} = \frac{\delta_{i+1}}{2}$.

Если на интервале $(t_i, t_i+\tau_i)$ происходят сближения с преследователями P_q, $q \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, то убегающий «обходит» их за столь малое время, что $\min\limits_{t\in[t_i,t_i+\tau_i]} \|z_l(t)\| \geqslant \frac{\beta_i}{2}$. Поскольку $\delta_{i+1} < \tau_{i+1}^{i+1} = \frac{\xi_{i+1}}{2} \leqslant \frac{\beta_i}{8}$, то справедливо неравенство (2.5).

Теперь покажем, что убегающий не выходит за границы множества D. Предположим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[t_i, t_i+\tau_i] = \emptyset$. Тогда на любом полуинтервале $[t_i, t_i+\tau_i)$ убегающий E «обходит» только одного преследователя. Такое предположение можно сделать в силу неравенств (2.8), (2.9) (β_i мало).

По условию теоремы $y_0 \in D$. Докажем по индукции: Пусть $\overline{k} = 1$, $t \in [0, t_1]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, так как y^0, $\dot{y}^0$, $\ddot{y}^0 \in D$. Пусть $t \in [t_1, t_1+\tau_1]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 + \frac{\tau_1^3}{3!} < 0 \; \forall\, j \in \mathbb{N}_m$. Индукционное предположение. Пусть при $\overline{k} = i-1$ справедливо неравенство $(y(t), q_j) < 0 \; \forall\, t \in [t_{i-2}+\tau_{i-2}, t_{i-1}+\tau_{i-1}] \; \forall\, j \in \mathbb{N}_m$. Докажем для $\overline{k} = i$. Пусть $t \in [t_{i-1}+\tau_{i-1}, t_i]$, тогда $(y(t), q_j) < -\delta_i^2 < 0 \; \forall\; j \in \mathbb{N}_m$. Пусть теперь $t \in (t_i, t_i+\tau_i]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta_i^2 + \frac{\tau_i^3}{3!} \leqslant -\delta_i^2 + \left(\frac{\delta_i}{2^{i+2}}\right)^3 \frac{1}{3!} < 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$. Таким образом, для любого $\overline{k} = 1, 2, \ldots$ убегающий не покидает множества D.

2. Рассмотрим ситуацию, когда условие (2.4) не выполнено:

$$(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) = -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\| \tag{2.11}$$

для некоторых l, i. Существует число ε_i, $\varepsilon_i \in (0, \tau_i)$, такое, что при произвольных $u_r(s)$, $r = 1, \ldots, k$, $r \neq l$, $v(s)$, $s \in [t_i, t_i+\varepsilon_i]$, справедливы неравенства $\min\limits_{\tau\in[0,\varepsilon_i]} \|z_r(t_i+\tau)\| > \delta_i^{i+1}$, $\forall\, r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, $(z_l(t_i+\varepsilon_i), p) > 0$ и $y(t) \in D \; \forall\; t \in [t_i, t_i+\varepsilon_i]$. Векторы $z_l(t_i)$, $\dot{z}_l(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует вектор $\psi_i \in \partial S : (z_l(t_i), \psi_i) = (\dot{z}_l(t_i), \psi_i) = 0$. На полуинтервале $[t_i, t_i+\gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(v(s), \psi_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) \leqslant 0, \\ -1, & \text{если } (u_l(s), \psi_i) > 0. \end{cases}$$

Здесь $t_i + \gamma_i$ – некоторый момент из отрезка $[t_i, t_i+\varepsilon_i]$, в который

$$(z_l(t_i+\gamma_i), \dot{z}_l(t_i+\gamma_i)) \neq -\|z_l(t_i+\gamma_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i+\gamma_i)\|\,. \tag{2.12}$$

Покажем, что такое число γ_i существует. При $t \geqslant t_i$ введем в рассмотрение функции: $f_1^i(t) = (z_l(t), \psi_i) = \int\limits_{t_i}^{t} \frac{(t-s)^2}{2} \cdot (u_l(s) - v(s), \psi_i) ds$, $f_2^i(t) = (\dot{z}_l(t), \psi_i) = \int\limits_{t_i}^{t} (t-s) \cdot (u_l(s) - v(s), \psi_i) ds$, $f_3^i(t) = \int\limits_{t_i}^{t} (u_l(s) - v(s), \psi_i) ds$. Функции $f_1^i(t)$, $f_2^i(t)$, $f_3^i(t)$, $t_i \leqslant t \leqslant t_i + \varepsilon_i$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{f}_1^i(t) = f_2^i(t), \quad \dot{f}_2^i(t) = f_3^i(t), \quad \dot{f}_3^i(t) = (u_l(t) - v(t), \psi_i). \tag{2.13}$$

Причем $f_1^i(t_i) = f_2^i(t_i) = f_3^i(t_i) = 0$. Из уравнений (2.11) видно, что $f_3^i(t) \not\equiv 0$ на $[t_i, t_i + \varepsilon_i]$. Действительно, пусть $f_3^i(t) \equiv 0$, $t \in [t_i, t_i + \varepsilon_i]$. Тогда $f_2^i(t) = const$, а $u_l(t) \equiv v(t)$ $\forall\ t \in [t_i, t_i + \varepsilon_i]$. Если $f_2^i(t) = const$, на $[t_i, t_i + \varepsilon_i]$, тогда $f_2^i(t) \equiv 0$, следовательно, $f_1^i(t) = const$ и $f_1^i(t) = 0$ $\forall\ t \in [t_i, t_i + \varepsilon_i]$. Тогда вектора $z_l(t)$ и $\dot{z}_l(t)$ линейно зависимы на всем отрезке $[t_i, t_i + \varepsilon_i]$, а $u_l(t) \equiv v(t)$ на $[t_i, t_i + \varepsilon_i]$. Но это противоречит выбранному управлению: если справедливо $(u_l(t) - v(t), \psi_i) = 0$, то $(u_l(t), \psi_i) = (v(t), \psi_i)$ $\forall\ t \in [t_i, t_i + \varepsilon_i]$, а это невозможно.

Множество $G^i = \{t \in (t_i, t_i + \varepsilon_i)\ f_3^i(t) \neq 0\}$ непусто и открыто, поэтому представимо в виде $G^i = \bigcup\limits_j (\alpha_j^i, \beta_j^i)$, где $\{(\alpha_j^i, \beta_j^i)\}$ – взаимно не пересекающаяся не более чем счетная система интервалов. Пусть (α_j^i, β_j^i) - некоторый интервал из этой системы. Тогда выполнено $f_3^i(\alpha_j^i) = f_3^i(\beta_j^i) = 0$, $f_3^i(t) \neq 0$ на (α_j^i, β_j^i). Если $f_2^i(\alpha_j^i) \neq 0$, тогда $\dot{f}_2^i(t) = f_3^i(t) \neq 0$ на (α_j^i, β_j^i) и $f_2^i(\beta_j^i) \neq 0$, то соотношение (2.12) выполнено при $t_i + \gamma_i = \beta_j^i$. Если же $f_2^i(\alpha_j^i) = 0$, то $\dot{f}_2^i(\alpha_j^i) \neq 0$ на (α_j^i, β_j^i) и $f_2^i(\beta_j^i) \neq 0$. Следовательно, соотношение (2.12) имеет место при $t_i + \gamma_i = \beta_j^i$. Таким образом, можно добиться того, чтобы векторы $z_l(t_i + \gamma_i)$ и $\dot{z}_l(t_i + \gamma_i)$ стали линейно независимыми.

Если $(z_l(t_i), \dot{z}_l(t_i)) \neq -\|z_l(t_i)\| \cdot \|\dot{z}_l(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Управление убегающего на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ полагаем равным $u_l(s)$. Но из-за возможности сближения с преследователями P_r, $r \in \mathbb{N}_k \setminus \{l\}$, управление убегающего E примет вид: $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty} [t_j, t_j + \tau_j)$.

Убегание на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ доказывается подобно п.**1**. Для доказательства достаточно вместо момента t_i, где по предположению п.**1** выполняется соотношение (2.4) подставить момент $t_i + \gamma_i$, в котором мы только что добились выполнения такого условия.

Осталось показать, что убегающий не покидает множества D. Для доказательства воспользуемся той же цепочкой рассуждений, что и в п.**1**. Предположим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[t_i, t_i+\tau_i] = \emptyset$, тогда на любом полуинтервале $[t_i, t_i + \tau_i)$ убегающий E «обходит» только одного преследователя. Такое предположение можно сделать, так как при маневрах, позволяющих убежать от остальных $k-1$ преследователей, встречающихся на $[t_i, t_i + \tau_i)$, траектория убегающего будет столь мало отличаться от основной траектории, что, учитывая определение чисел τ_i, ξ_i и последовательностей $\{\tau_i^l\}_{l=i}^{\infty}$, $\{\delta_i^l\}_{l=i}^{\infty}$ не повлияет на то, пересечет убегающий границу множества D или нет.

По условию $y_0 \in D$. Докажем по индукции, пусть $\overline{k} = 1$, $t \in [0, t_1]$. Тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 \leqslant 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$, т.к. y^0, $\dot{y}^0$ и $\ddot{y}^0 \in D$. Если $t \in (t_1, t_1 + \gamma_1]$, то $(y(t), q_j) < 0$ $\forall j \in \mathbb{N}_m$ в силу выбора числа ε_1. Если $t \in (t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1]$, тогда $(y(t), q_j) \leqslant -\delta^2 + \left(\frac{\delta}{8}\right)^3 \frac{1}{3!} < 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_m$.

Индукционное предположение, пусть при $\overline{k} = i - 1$ справедливо неравенство $(y(t), q_j) < 0$ для любых $t \in [t_{i-2} + \tau_{i-2}, t_{i-1} + \tau_{i-1}]$ и $j \in \mathbb{N}_m$. Докажем для $\overline{k} = i$. Пусть $t \in [t_{i-1} + \tau_{i-1}, t_i]$, тогда $(y(t), q_j) = (y(t_{i-1} + \tau_{i-1}), q_j) < -\delta_i^2 < 0$ $\forall$ $j \in \mathbb{N}_m$ в силу индукционного предположения. При $t \in (t_i, t_i + \gamma_i]$ неравенство $(y(t), q_j) < 0$ $\forall$ $j \in \mathbb{N}_m$ выполняется в силу выбора числа ε_i. При $t \in (t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ $(y(t), q_j) \leqslant -\delta_i^2 + \left(\frac{\delta_i}{2^{i+1}}\right)^3 \frac{1}{3!} < 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_m$.

3. Итак, управление убегающего формируется следующим образом: $v(s) = 0$, $s \in [0, +\infty) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[t_i, t_i + \tau_i)$. Если выполнено (2.11), то на $[t_i, t_i + \gamma_i)$ управление $v(s)$ выбираем так, как показано в п.**2**. Иначе $v(s) = u_l(s)$, $s \in [t_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup\limits_{j=i+1}^{\infty}[t_j, t_j + \tau_j)$, на $[t_j, t_j + \tau_j)$ управление $v(s)$ выбирается так, как показано в п.**1**. Теорема доказана. □

3. Пример

При $n = 2$ в игре участвуют два игрока: убегающий E и преследователь P. Зададим множество $D = \{(x_1, x_2) | x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$, начальное положение, скорость и ускорение убегающего $y(0) = (0, 0)$, $\dot{y}(0) = (1, 1)$, $\ddot{y}(0) = (0, 1)$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0) \in D$. В начальный момент времени убегающий выбирает управление $v = 0$ и двигается по пара-

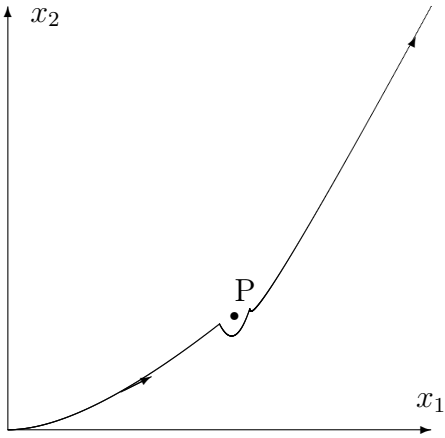

Рисунок 1. Маневр уклонения от встречи

боле $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t + \frac{t^2}{4}$. Если $x(1) = (1, 1)$, управление убегающего не меняется. Если в момент времени $t = 1$ $x(t) = (1, \frac{3}{2})$, происходит сближение с преследователем, убегающий совершает маневр уклонения от встречи: $v(t) = u(t)$, затем снова движется по параболе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А.С. *Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов* // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2010. Вып.1. С. 3–10.

2. Банников А.С. *Некоторые нестационарные задачи группового преследования* // Известия ИМИ УдГУ. 2013. Вып.1(41). С. 3–46.

3. Благодатских А.И. Петров Н.Н. *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов* Ижевск. 2009. 266 с.

4. Зак В.Л. *Задача уклонения от многих преследователей, управляемых по ускорению* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №2. С. 51–71.

5. Петров Н.Н. *К нестационарой задаче группового преследования с фазовыми ограничениями* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 4. С. 74–83.

6. Петров Н.Н., Щелчков К.А. *К задаче Черноусько* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 4. С. 62–67.

7. Прокопович П.В., Чикрий А.А. *Одна дифференциальная игра убегания* // ДАН УССР. Серия А. 1989. № 1. С. 71–74.

8. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

9. Сахаров Д.В. *О двух дифференциальных играх простого группового преследования* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 1. С. 50–59.

10. Черноусько Ф.Л. *Одна задача уклонения от многих преследователей* // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.

11. Чикрий А.А., Прокопович П.В. *Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 998–1004.

12. Чиркова Л.С. *Уклонение от группы инерционных объектов в конусе*// Известия ИМИ УдГУ. 2000. Вып.2(19). С. 59–72.

13. Чиркова Л.С. *Уклонение от группы инерционных объектов* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 45–53.

EVASION OF THE MEETING IN A CONE IN THIRD ORDER DIFFERENTIAL GAME

Lyubov S. Chirkova, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Izhevsk, Cand.Sc. (lmvstk@yandex.ru).

Abstract: It is considered a problem of conflict interaction of one evader from a group of pursuers with equal dynamic capabilities of all players. The motion of each player is defined by third order differential equation. Initial conditions are set. It is proved that if number of pursuers is less than space dimension and the initial position, velocity and acceleration of the evader are inside of the given cone, then runaway occurs.

Keywords: differential game, evasion from many pursuers in a cone, state constraints.