

УДК 519.86

ББК 22.1

ЦЕНА АНАРХИИ И МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛЯХ СОГЛАСОВАНИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ И ЧАСТНЫХ ИНТЕРЕСОВ

ОЛЬГА И. ГОРБАНЕВА

ГЕННАДИЙ А. УГОЛЬНИЦКИЙ*

Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича

Южного федерального университета

344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

e-mail: gorbaneva@mail.ru, ougoln@mail.ru

Целью настоящей статьи является исследование цены анархии в моделях согласования общественных и частных интересов (СОЧИ – моделях), основанных на идее Гермейера–Вателя. Для описания интересов агента мы используем линейную свертку дохода от частной деятельности и некоторой доли дохода от общей деятельности. Частные и общественные интересы описываются производственными функциями. Рассмотрены механизмы управления (побуждение и принуждение), направленные на улучшение значения цены анархии, т.е. повышение общественного благосостояния. Эта задача управления развивает идею метаигрового синтеза.

Ключевые слова: цена анархии, модель Гермейера–Вателя, общественные и частные интересы, административные и экономические механизмы управления.

©2015 О.И. Горбанева, Г.А. Угольницкий

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №15-01-00432).

1. Введение

Важной проблемой принятия решений в системах с несколькими агентами является сравнение значений функции общественного благосостояния, получаемых при независимом эгоистичном принятии решений всеми агентами (ведущем к равновесию по Нэшу), с одной стороны и при оптимизации этой функции всеми игроками (Парето-оптимальном решении) с другой стороны (проблема неэффективности равновесий [1]). Второй случай возможен либо при добровольной кооперации игроков, либо при введении внешнего управления. Общепринятым количественным показателем неэффективности равновесий служит введенная Х. Пападимитриу «цена анархии» [2], которая представляет собой отношение наихудшего значения функции общественного благосостояния на множестве равновесий по Нэшу к ее оптимальному значению. Наибольшее распространение соответствующие исследования получили применительно к сетевым играм [1,3].

В случае, когда цена анархии сильно отличается от единицы, возникает потребность в координации действий агентов для увеличения общественного благосостояния. Эта постановка близка к основной задаче дизайна механизмов [1,4] – оптимизации общественного благосостояния на основе учета частных интересов членов общества. Однако, в дизайне механизмов на самом деле обычно рассматривается более узкая постановка – побудить агентов высказать свои истинные предпочтения, т.е. построить неманипулируемый механизм.

В важной статье Ю. Гермейера и И. Вателя [5] были изучены модели, в которых функции выигрыша всех агентов состоят из двух частей – общественной (одинаковой для всех агентов) и частной составляющей. Было показано, что если эта функция имеет вид свертки по минимуму, то при естественных предположениях в игре существует Парето-оптимальное равновесие по Нэшу (т.е. цена анархии равна единице). Исследование игр с учетом частных и общественных интересов продолжено, например, в работах [6-7].

В монографии [8] подробно описаны методы принуждения и побуждения как механизмы иерархического управления, направленные на обеспечение устойчивого развития сложных систем с активными агентами. В работах [9-10] проведено предварительное исследование

моделей распределения ресурсов между общественными (целевыми) и частными (нецелевыми) интересами.

Целью настоящей статьи является исследование неэффективности равновесий (цены анархии) в моделях согласования общественных и частных интересов (СОЧИ – моделях), основанных на идее Гермейера–Вателя, но использующих вместо минимума линейную свертку, в которой каждый игрок получает некоторую долю общественного дохода. При этом, частные и общественные интересы описываются производственными функциями достаточно общего вида. Рассмотрены также механизмы управления (побуждение и принуждение), направленные на улучшение значения цены анархии, т.е. повышение общественного благосостояния. Эта задача управления развивает идею метаигрового синтеза, впервые предложенную в [11].

В разделе 2 дается общее описание СОЧИ – моделей и связанных с ними понятий. В разделе 3 рассматриваются СОЧИ – модели с бесконечными (континуальными) множествами стратегий для различного соотношения общественных и частных интересов, вычисляется цена анархии в каждом случае. В разделе 4 аналогичное исследование проводится для СОЧИ – моделей с бинарными множествами стратегий (индивидуализм и коллективизм). В разделе 5 рассматриваются экономические механизмы управления (побуждение), в разделе 6 – административные механизмы (принуждение), направленные на максимизацию общественного благосостояния. В разделе 7 формулируются итоговые выводы сравнительного анализа и определяются пути дальнейших исследований.

2. Общее описание СОЧИ – моделей и структура предпочтений интересов

Рассмотрим статическую теоретико-игровую модель в нормальной форме вида

$$g_i(u_1, \dots, u_n) = p_i(a_i - u_i) + s_i(u_1, \dots, u_n)c(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

$$0 \leq u_i \leq a_i, a_i \geq 0, s_i(u_1, \dots, u_n) \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n s_j(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i(u_1, \dots, u_n) > 0, \\ 0, & \forall i \quad s_i(u_1, \dots, u_n) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Здесь $N = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество игроков (активных аген-

тов);

$U_i = [0, a_i]$ – множество допустимых действий (стратегий) i -го игрока;

a_i – ресурс, которым располагает i -й игрок;

$g_i(u_1, \dots, u_n)$ – функция выигрыша i -го игрока; $g_i : U \rightarrow R$, $U = U_1 \times \dots \times U_n$;

$p_i(a_i - u_i)$ – функция частных интересов (частная составляющая выигрыша) i -го игрока, аргументом которой является количество ресурсов, оставленных на частные цели;

$c(u_1, \dots, u_n)$ – функция общественного дохода;

$s_i(u_1, \dots, u_n)$ – доля общественного дохода, выделяемая игроку i ;

$s_i(u_1, \dots, u_n)c(u_1, \dots, u_n)$ – общественная составляющая выигрыша i -го игрока.

Таким образом, в СОЧИ – модели каждый игрок делит свой ресурс a_i между общественными (доля u_i) и частными (доля $a_i - u_i$) интересами. Предполагается, что

– функция c монотонно возрастает по всем u_i , $c(0, \dots, 0) = 0$;

– функции p_i монотонно возрастают по $(a_i - u_i)$ и монотонно убывают по u_i , $p_i(0) = 0$ (при $u_i = a_i$);

– если $u_i > 0$, то $s_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, вариант $\sum_{j=1}^n s_j = 0$ отвечает случаю, когда $\forall i \quad u_i = 0$; тогда общественный доход не создается и делить нечего.

В работе исследовались степенные производственные функции p_i и c , традиционно используемые в экономико-математических моделях [12].

Введем утилитарную функцию общественного благосостояния

$$g(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n g_j(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j) + c(u_1, \dots, u_n). \quad (2.3)$$

Пусть $NE = \{u_{(1)}^{NE}, \dots, u_{(n)}^{NE}\}$ – множество равновесий по Нэшу в игре (2.1)–(2.2), $u_j = (u_{(j)1}, \dots, u_{(j)n})$ – исход игры, $g_{\min}^{NE} = \min\{g(u_{(1)}^{NE}), \dots, g(u_{(n)}^{NE})\}$, $g_{\max} = \max_{u \in U} g(u) = g(u^{max})$ Тогда цена анархии в модели (2.1)–(2.2) есть

$$PA = \frac{g_{\min}^{NE}}{g_{\max}}. \quad (2.4)$$

Очевидно, что $PA < 1$. Если PA близка к единице, то эффективность равновесий высока и потребность в координации в модели (2.1)–(2.2) низка или вовсе отсутствует (при $PA = 1$); чем меньше PA , тем больше потребность в координации. Введем также величину «общественной цены анархии»

$$SPA = \frac{c_{\min}^{NE}}{c_{\max}}, \quad (2.5)$$

где $c_{\min}^{NE} = \min\{c(u_{(1)}^{NE}), \dots, c(u_{(n)}^{NE})\}$, $c_{\max} = \max_{u \in U} c(u) = c(a_1, \dots, a_n)$.

В то время как показатель PA характеризует эффективность/неэффективность равновесий в СОЧИ – моделях (2.1)–(2.2) в целом, показатель SPA характеризует ее с точки зрения величины общественного дохода, которая рассматривается в этом случае как функция общественного благосостояния (в узком смысле).

3. СОЧИ – модели с континуальными множествами стратегий и постоянными коэффициентами распределения

Положим в модели (2.1)–(2.2) $s_i(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$ (общественный доход равномерно распределяется между агентами). Рассмотрим два варианта соотношения общественной и частной составляющей в СОЧИ – моделях. В первом из них частные интересы описываются степенной производственной функцией, а общественные – линейной функцией, во втором – наоборот. Исследовать аналитически представление обеих составляющих производственными функциями общего вида пока не удалось.

Пример 3.1. Рассмотрим модель

$$g_i(u) = p_i \cdot (a_i - u_i)^{\beta_i} + \frac{1}{n} c \sum_{j=1}^n u_j, \quad (3.1)$$

$$g(u) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot (a_j - u_j)^{\beta_j} + c \sum_{j=1}^n u_j, \quad (3.2)$$

$$p_j > 0, 0 < \beta_i < 1.$$

В этой модели игроки имеют доминантные стратегии

$$u_i^D = \begin{cases} a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{n\beta_i p_i}{c}}, & a_i > \sqrt[1-\beta_i]{\frac{n\beta_i p_i}{c}}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

а соответствующее равновесие в доминантных стратегиях тем более является равновесием по Нэшу (других равновесий по Нэшу нет). Далее,

$$u_i^{max} = \begin{cases} a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{\beta_i p_i}{c}}, & a_i > \sqrt[1-\beta_i]{\frac{\beta_i p_i}{c}}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, имеем

	u_i^D	u_i^{max}
$a_i < \sqrt[1-\beta_i]{\frac{\beta_i p_i}{c}}$	0	0
$\sqrt[1-\beta_i]{\frac{\beta_i p_i}{c}} < a_i < \sqrt[1-\beta_i]{\frac{n\beta_i p_i}{c}}$	0	$a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{\beta_i p_i}{c}}$
$a_i > \sqrt[1-\beta_i]{\frac{n\beta_i p_i}{c}}$	$a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{n\beta_i p_i}{c}}$	$a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{\beta_i p_i}{c}}$

Если указанные условия выполняются для всех i , то получаем, соответственно

$$PA = 1; SPA = 0; PA = \frac{\sum_{j=1}^n p_j a_j}{\sum_{j=1}^n \left(ca_j + \sqrt[1-\beta_j]{\frac{p_j \beta_j^{j}}{c^{\beta_j}} (1 - \beta_j)} \right)};$$

$$SPA = 0; PA = \frac{\sum_{j=1}^n \left(ca_j + \sqrt[1-\beta_j]{\frac{n\beta_j p_j \beta_j^{j}}{c^{\beta_j}} (1 - n\beta_j)} \right)}{\sum_{j=1}^n \left(ca_j + \sqrt[1-\beta_j]{\frac{p_j \beta_j^{j}}{c^{\beta_j}} (1 - \beta_j)} \right)};$$

$$SPA = \frac{\sum_{j=1}^n \left(ca_j - \sqrt[1-\beta_j]{\frac{np_j \beta_j}{c^{\beta_j}}} \right)}{\sum_{j=1}^n \left(ca_j - \sqrt[1-\beta_j]{\frac{p_j \beta_j}{c^{\beta_j}}} \right)}.$$

Очевидно, что при больших n наиболее вероятен второй вариант, при котором доминантной стратегией является чистый индивидуализм ($u_i = 0$) и общественный доход не создается, при этом $NE \cap PO = \emptyset$, и цена анархии намного меньше единицы.

Предположим, что агенты могут принадлежать разным категориям из трех указанных. Пусть $I_1 = \{i | a_i < {}^{1-\beta_i}\sqrt{\frac{\beta_i p_i}{c}}\}$, $I_2 = \{i | {}^{1-\beta_i}\sqrt{\frac{\beta_i p_i}{c}} < a_i < {}^{1-\beta_i}\sqrt{\frac{n\beta_i p_i}{c}}\}$, $I_3 = \{i | a_i > {}^{1-\beta_i}\sqrt{\frac{n\beta_i p_i}{c}}\}$. Тогда

$$PA = \frac{\sum_{j \notin I_3} p_j a_j^{\beta_j} + \sum_{j \in I_3} \left(ca_j + {}^{1-\beta_j}\sqrt{\frac{n\beta_j p_j \beta_j^{\beta_j}}{c^{\beta_j}}}(1 - n\beta_j) \right)}{\sum_{j \in I_1} p_j a_j^{\beta_j} + \sum_{j \notin I_1} \left(ca_j + {}^{1-\beta_j}\sqrt{\frac{p_j \beta_j^{\beta_j}}{c}}(1 - \beta_j) \right)}.$$

Пример 3.2. Рассмотрим модель

$$g_i(u) = p_i(a_i - u_i) + \frac{1}{n}c \cdot \left(\sum_{j=1}^n u_j \right)^\beta, \quad (3.3)$$

$$g(u) = \sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j) + c \cdot \left(\sum_{j=1}^n u_j \right)^\beta, \quad (3.4)$$

$$c > 0, 0 < \beta < 1.$$

Условие первого порядка дает следующий результат:

$$\sum_{j=1}^n u_j^{NE} = \begin{cases} {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{np_i}}, & {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{np_i}} < \sum_{i=1}^n a_i, \\ \sum_{i=1}^n a_i, & {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{np_i}} > \sum_{i=1}^n a_i. \end{cases}$$

Заметим, что левая часть не зависит от i , а правая зависит, поэтому равновесие по Нэшу возможно по данной формуле только в случае, когда все p_i равны между собой. Пусть все $p_i = p$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n u_j^{NE} = \begin{cases} {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{np}}, & {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{np}} < \sum_{i=1}^n a_i, \\ \sum_{i=1}^n a_i, & {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{np}} > \sum_{i=1}^n a_i. \end{cases} \quad (3.5)$$

Найдем вектор u_{max} , максимизирующий функцию общественного благосостояния:

$$\sum_{j=1}^n u_j^{max} = \begin{cases} {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{p}}, & {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{p}} < \sum_{i=1}^n a_i, \\ \sum_{i=1}^n a_i, & {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{\beta c}{p}} > \sum_{i=1}^n a_i. \end{cases} \quad (3.6)$$

Если не все p_i равны между собой, то легко доказать, что значения (3.5) и (3.6) равны при $p = \min\{p_i\}$. Имеем

	$\sum_{i=1}^n u_i^D$	$\sum_{i=1}^n u_i^{\max}$
$\sum_{i=1}^n a_i < 1 - \sqrt{\frac{\beta c}{np}}$	$\sum_{i=1}^n a_i$	$\sum_{i=1}^n a_i$
$1 - \sqrt{\frac{\beta c}{np}} < \sum_{i=1}^n a_i < 1 - \sqrt{\frac{\beta c}{p}}$	$1 - \sqrt{\frac{\beta c}{np}}$	$\sum_{i=1}^n a_i$
$\sum_{i=1}^n a_i > 1 - \sqrt{\frac{\beta c}{p}}$	$1 - \sqrt{\frac{\beta c}{np}}$	$1 - \sqrt{\frac{\beta c}{p}}$

Получаем, соответственно

$$PA = 1; SPA = 1; PA = \frac{\sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j^{NE}) + 1 - \sqrt{\frac{c\beta^2}{n^\beta p^\beta}}}{c \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^\beta};$$

$$SPA = \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n a_j} 1 - \sqrt{\frac{c\beta}{np}}\right)^\beta;$$

$$PA = \frac{\sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j^{NE}) + 1 - \sqrt{\frac{c\beta^2}{n^\beta p^\beta}}}{\sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j^{\max}) + 1 - \sqrt{\frac{c\beta^2}{p^\beta}}}; SPA = \frac{1}{1 - \sqrt{n^\beta}}.$$

Чем больше n , тем меньше вероятность первого случая, при котором как цена анархии, так и общественная цена анархии равны 1.

4. СОЧИ – модели с бинарными множествами стратегий и постоянными коэффициентами распределения

Пусть в модели (2.1)–(2.2) каждый игрок имеет две стратегии: $u_i = 0$ (индивидуализм) и $u_i = a_i$ (коллективизм). Обозначим $C = \{1, \dots, k\}$ – множество коллективистов, $I = \{k + 1, \dots, n\}$ – множество индивидуалистов, $0 \leq k \leq n$. Тогда условия равновесия по Нэшу можно охарактеризовать как

$\frac{1}{n}c(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0) \geq p_i(a_i), i = 1, \dots, k$ (невыгоден переход $C \rightarrow I$);

$p_j(a_j) \geq \frac{1}{n}c(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, a_j, \dots, 0), j = k + 1, \dots, n$ (невыгоден переход $I \rightarrow C$).

Имеем

$$g^I = g(0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^n p_j(a_j), g^C = g(a_1, \dots, a_n) = c(a_1, \dots, a_n), g^{NE} = g(u^{NE}) = c(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0) + \sum_{j=k+1}^n p_j(a_j).$$

$$\text{Тогда } SPA = \frac{c(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)}{c(a_1, \dots, a_n)}.$$

Рассмотрим в качестве примеров те же случаи, что и в предыдущем разделе, причем для получения аналитических результатов ограничимся играми двух лиц.

Пример 4.1. Рассмотрим модель

$$g_i(u_1, u_2) = p_i(a_i - u_i) + \frac{1}{2}c \cdot (u_1 + u_2), u_i \in \{0, a_i\}, i = 1, 2, \quad (4.1)$$

где $p_i(x)$ – производственная функция со стандартными свойствами [12].

Платежная матрица и значения функции благосостояния имеют вид

	0	a_2
0	$p_1(a_1)$ $p_2(a_2)$	$p_1(a_1) + \frac{ca_2}{2}$ $\frac{ca_2}{2}$
a_1	$\frac{ca_1}{2}$ $p_2(a_2) + \frac{ca_1}{2}$	$\frac{c(a_1+a_2)}{2}$ $\frac{c(a_1+a_2)}{2}$

$$g(0, 0) = p_1(a_1) + p_2(a_2),$$

$$g(0, a_2) = p_1(a_1) + ca_2,$$

$$g(a_1, 0) = ca_1 + p_2(a_2),$$

$$g(a_1, a_2) = c(a_1 + a_2).$$

Анализ платежной матрицы показывает, что равновесия в доминантных стратегиях (они же равновесия по Нэшу) и ситуации, максимизирующие общественное благосостояние, соответственно определяются соотношениями

$$u^{NE} = \begin{cases} (0, 0), & p_i(a_i) > \frac{ca_i}{2}, \\ (0, a_2), & p_1(a_1) > \frac{ca_1}{2}, p_2(a_2) < \frac{ca_2}{2}, \\ (a_1, 0), & p_1(a_1) < \frac{ca_1}{2}, p_2(a_2) > \frac{ca_2}{2}, \\ (a_1, a_2), & p_i(a_i) < \frac{ca_i}{2}, i = 1, 2; \end{cases}$$

$$u^{max} = \begin{cases} (0, 0), & p_i(a_i) > ca_i, \\ (0, a_2), & p_1(a_1) > ca_1, p_2(a_2) < ca_2, \\ (a_1, 0), & p_1(a_1) < ca_1, p_2(a_2) > ca_2, \\ (a_1, a_2), & p_i(a_i) < ca_i, i = 1, 2. \end{cases}$$

Результаты для общего случая представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты исследования модели (4.1)

	$p_1(a_1) > ca_1$	$\frac{ca_1}{2} < p_1(a_1) < ca_1$	$p_1(a_1) < \frac{ca_1}{2}$
$p_2(a_2) < \frac{ca_2}{2}$	$u^{NE} =$ $= u^{max} =$ $= (0, a_2);$ $PA = 1;$ $SPA = \frac{a_2}{a_1+a_2}$	$u^{NE} = (0; a_2);$ $u^{max} = (a_1, a_2);$ $PA = \frac{p_1(a_1)+ca_2}{ca_1+ca_2};$ $SPA = \frac{a_2}{a_1+a_2}$	$u^{NE} =$ $= u^{max} =$ $= (a_1, a_2);$ $PA = SPA =$ $= 1$
$\frac{ca_2}{2} < p_2(a_2) < ca_2$	$u^{NE} = (0; 0);$ $u^{max} =$ $= (0, a_2);$ $PA =$ $= \frac{p_1(a_1)+p_2(a_2)}{c(a_1+a_2)};$ $SPA = 0$	$u^{NE} = (0; 0);$ $u^{max} = (a_1, a_2);$ $PA = \frac{p_1(a_1)+p_2(a_2)}{c(a_1+a_2)};$ $SPA = 0$	$u^{NE} = (a_1, 0);$ $u^{max} =$ $= (a_1, a_2);$ $PA =$ $= \frac{ca_1+p_2(a_2)}{ca_1+ca_2};$ $SPA = \frac{a_1}{a_1+a_2}$
$p_2(a_2) > ca_2$	$u^{NE} =$ $= u^{max} =$ $= (0, 0);$ $PA = 1;$ $SPA = 0$	$u^{NE} = (0, 0);$ $u^{max} = (a_1, 0);$ $PA = \frac{p_1(a_1)+p_2(a_2)}{c(a_1+a_2)};$ $SPA = 0$	$u^{NE} =$ $= u^{max} =$ $= (a_1, 0);$ $PA = 1;$ $SPA = \frac{a_1}{a_1+a_2}$

Пример 4.2. Рассмотрим модель

$$g_i(u_1, u_2) = p_i \cdot (a_i - u_i) + \frac{1}{2}c(u_1 + u_2)^\beta, u_i \in \{0, a_i\}, i = 1, 2. \quad (4.2)$$

	0	a_2
0	$p_1 a_1$	$p_1 a_1 + \frac{1}{2} c a_2^\beta$
	$p_2 a_2$	$\frac{1}{2} c a_2^\beta$
a_1	$\frac{1}{2} c a_1^\beta$	$\frac{1}{2} c (a_1 + a_2)^\beta$
	$p_2 a_2 + \frac{1}{2} c a_1^\beta$	$\frac{1}{2} c (a_1 + a_2)^\beta$

$$\begin{aligned} g(0, 0) &= p_1 a_1 + p_2 a_2, \\ g(0, a_2) &= p_1 a_1 + c a_2^\beta, \\ g(a_1, 0) &= c a_1^\beta + p_2 a_2, \\ g(a_1, a_2) &= c (a_1 + a_2)^\beta. \end{aligned}$$

Здесь можно показать, что

$(0; 0) \in SE$, $a_i \geq {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{c}{p_i}}$, $i = 1, 2$, $SPA = 0$ (случай I);

$(a_1; a_2) \in SE$, $c[(a_1 + a_2)^\beta - (a_2)^\beta] \geq 2p_1 a_1$, $c[(a_1 + a_2)^\beta - (a_1)^\beta] \geq 2p_2 a_2$, $SPA = 1$ (случай II);

$(0, a_2) \in SE$, $a_2 \leq {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{c}{p_2}}$, $c[(a_1 + a_2)^\beta - (a_2)^\beta] \geq p_1 a_1$, $SPA = \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)^\beta$ (случай III);

$(a_1; 0) \in SE$, $a_1 \leq {}^{1-\beta}\sqrt{\frac{c}{p_1}}$, $c[(a_1 + a_2)^\beta - (a_1)^\beta] \geq p_2 a_2$, $SPA = \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)^\beta$ (случай IV), где SE – множество сильных равновесий.

5. Экономические механизмы управления (побуждение)

Как показал проведенный анализ, в ряде рассмотренных примеров $PA < 1$ (и тем более $SPA < 1$), т.е. эгоистическое поведение агентов приводит к неэффективным равновесиям.

Отметим еще одно обстоятельство, касающееся СОЧИ – моделей с бинарными множествами стратегий. Пусть $u_i = 0$, $u_j = a_j$, $j \neq i$. Тогда

$$\begin{aligned} g_i(u) &= p_i(a_i) + \frac{1}{n}c(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) > \\ &> \frac{1}{n}c(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = g_j(u), \end{aligned}$$

т.е. каждому игроку выгодно быть «безбилетником». В общем случае постоянного распределения общественного дохода $s_i = const$ «безбилетником» быть выгодно при

$$p_i(a_i) + (s_i - s_j)\frac{1}{n}c(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) > 0.$$

Это условие заведомо выполняется при $s_i > s_j$, $j \neq i$ (т.е. наличии привилегий у i -го игрока) и может выполняться при

$$s_i < s_j, p_i(a_i) > (s_j - s_i)\frac{1}{n}c(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

В последнем случае даже механизмы распределения, при которых $u_i = 0 \Rightarrow s_i = 0$, не защищают от индивидуализма, и тогда единственным способом защиты общественных интересов при эгоистическом поведении остается принуждение (см. раздел 6).

Рассмотрим пропорциональный механизм распределения общественного дохода

$$s_i(u) = \begin{cases} \frac{u_i}{\sum_{j=1}^n u_j}, & \exists j : u_j > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.1)$$

который относится к экономическим механизмам управления (побуждению), и применим его к исследованным выше СОЧИ – моделям. Будем обозначать величины PA и SPA при использовании побуждения (5.1) через CPA и $CSPA$, соответственно.

Пример 5.1. Модель (3.1)–(3.2) принимает вид

$$g_i(u_1, \dots, u_n) = p_i(a_i - u_i)^{\beta_i} + c \cdot u_i \rightarrow \max, 0 \leq u_i \leq a_i, i = 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

$$g(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n g_j(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot (a_j - u_j)^{\beta_j} + c \sum_{j=1}^n u_j. \quad (5.3)$$

Заметим, что теперь $\frac{\partial g(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial g_i(u)}{\partial u_i}$, откуда $u^{max} = u^{NE}$ и $CPA = = CSPA = 1$, т.е. эффективность равновесий повышается.

Пример 5.2. Модель (3.3)–(3.4) принимает вид

$$g_i(u_1, \dots, u_n) = p_i(a_i - u_i) + c \frac{u_i}{(u_1 + \dots + u_n)^{1-\beta}} \rightarrow \max, \quad (5.4)$$

$$0 \leq u_i \leq a_i, i = 1, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} g(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{j=1}^n g_j(u_1, \dots, u_n) = \\ &= \sum_{j=1}^n p_j a_j - \sum_{j=1}^n p_j u_j + c (u_1 + \dots + u_n)^\beta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Используя условия первого порядка, получаем

$$\sum_{j=1}^n u_j^{NE} = \sqrt[1-\beta]{\frac{c(n-1+\beta)}{p_i}}, \quad \sum_{j=1}^n u_j^{max} = \sqrt[1-\beta]{\frac{c\beta}{p_i}},$$

откуда после преобразований

$$\begin{aligned} CPA &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j^{NE}) + \sqrt[1-\beta]{\frac{c(n-1+\beta)^\beta}{p_j}}}{\sum_{j=1}^n p_j(a_j - u_j^{max}) + \sqrt[1-\beta]{\frac{c\beta^\beta}{p_i}}}; \\ CSPA &= \left(\frac{\sqrt[1-\beta]{c\beta}}{\sqrt[1-\beta]{p_i}(a_1 + \dots + a_n)} \right)^\beta. \end{aligned}$$

Сравнивая с результатами для модели (3.3)–(3.4), получаем $CPA = = PA$, $CSPA > SPA$, т.е. использование экономического механизма (5.1) повышает эффективность равновесий только с точки зрения общественного дохода.

Для СОЧИ – моделей с бинарными множествами стратегий и двумя игроками механизм (5.1) можно записать как

$$s_i(u_i, u_j) = \begin{cases} 0 & u_i = 0, \\ \frac{1}{2}, & u_i = a_i, u_j = a_j, \\ 1, & u_i = a_i, u_j = 0. \end{cases}$$

Пример 5.3. Модель (4.1) принимает вид

	0	a_2
0	$p_1 a_1^{\beta_1}$ $p_2 a_2^{\beta_2}$	$p_1 a_1^{\beta_1}$ ca_2
a_1	ca_1 $p_2 a_2^{\beta_2}$	$\frac{c(a_1+a_2)}{2}$ $\frac{c(a_1+a_2)}{2}$

При этом, значения функции благосостояния во всех ситуациях совпадают со значениями для модели (4.1), поэтому u^{max} здесь определяется аналогично. Это справедливо всегда, поскольку $\sum_{j=1}^n s_j = 1$. Можно показать, что $(0; 0) \in NE, a_i < {}^{1-\beta_i}\sqrt{\frac{p_i}{c}}, i = 1, 2; (a_1, a_2) \in NE, i = 1, 2$. Соответствующая область этой системы неравенств обозначена на рис. 1 ситуацией I. Покажем, что $(a_1, a_2) \in NE, i = 1, 2$. Для этого решим систему неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c(a_1+a_2)}{2} \geq p_1 a_1^{\beta_1}, \\ \frac{c(a_1+a_2)}{2} \geq p_2 a_2^{\beta_2}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2p_1 a_1^{\beta_1} - ca_1}{c} \leq a_2, \\ \frac{2p_2 a_2^{\beta_2} - ca_2}{c} \leq a_1. \end{array} \right.$$

Графическое решение этой системы обозначено на рис. 1 областью II. Покажем, что $(0, a_2) \notin NE$. Требуется выполнение условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c(a_1+a_2)}{2} \geq p_1 a_1^{\beta_1}, \\ ca_2 \geq p_2 a_2^{\beta_2}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2p_1 a_1^{\beta_1} - ca_1}{c} \leq a_2, \\ a_2 \geq {}^{1-\beta_2}\sqrt{\frac{p_2}{c}}. \end{array} \right.$$

Обозначим $f(x) = \frac{2p_1 x^{\beta_1} - cx}{c}$, тогда $\max_{x>0} f(x) = f\left({}^{1-\beta_1}\sqrt{\frac{2p_1 \beta_1}{c}}\right) = {}^{1-\beta_1}\sqrt{\frac{2p_1 \beta_1}{c}}(1 - \beta_1)$, т.е. $f(a_1) \leq {}^{1-\beta_1}\sqrt{\frac{2p_1 \beta_1}{c}}(1 - \beta_1)$. Поскольку $a_2 > {}^{1-\beta_2}\sqrt{\frac{p_2}{c}}$, то $(0, a_2) \notin NE$ (кроме очевидного вырожденного случая, когда все выигрыши равны единице и все ситуации становятся сильными равновесиями, откуда $CPA = CSPA = 1$). Аналогично, кроме указанного вырожденного случая, $(a_1, 0) \notin NE$.

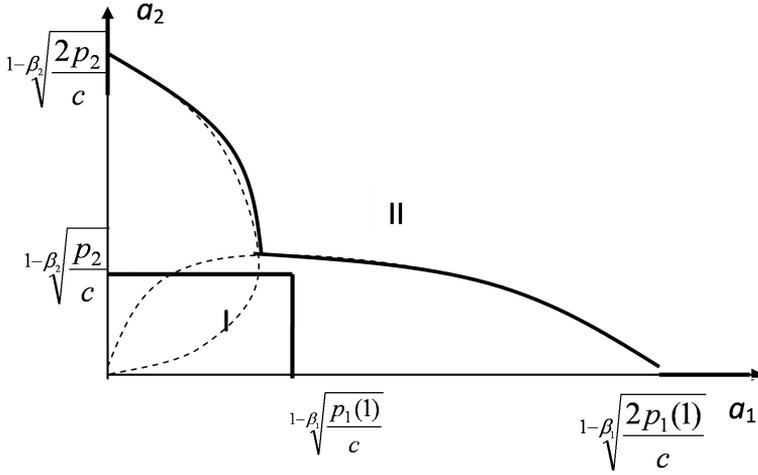


Рисунок 1. Равновесия в задаче 5.3

Таким образом,

$$NE = \begin{cases} (0; 0), & a_i < 1 - \beta_i \sqrt{\frac{p_i}{c}}, \\ (a_1, a_2), & a_i > \frac{2p_{3-i}a_{3-i}^{\beta_{3-i}} - ca_{3-i}}{c}, i = 1, 2. \end{cases}$$

Сравнивая с условиями для u^{\max} в модели (4.1), которые справедливы и здесь, получаем в обоих случаях $CSPA = 1$, т.е. и в этом случае использование механизма пропорционального распределения обеспечивает эффективность равновесий. А вот,

$$CSPA = \begin{cases} 0, & a_i < 1 - \beta_i \sqrt{\frac{p_i}{c}}, \\ 1, & a_i > \frac{2p_{3-i}a_{3-i}^{\beta_{3-i}} - ca_{3-i}}{c}, i = 1, 2, \end{cases} \quad (5.6)$$

т.е. при малых ресурсах общественный доход не производится. Платежная матрица для модели (4.2) принимает вид

	0	a_2
0	$p_1 a_1$	$p_1 a_1$
	$p_2 a_2$	$c a_2^\beta$
a_1	$c a_1^\beta$	$\frac{c(a_1+a_2)^\beta}{2}$
	$p_2 a_2$	$\frac{c(a_1+a_2)^\beta}{2}$

а значения функции благосостояния вновь во всех ситуациях совпадают со значениями для модели (4.2).

С другой стороны, получаем

$$NE = \begin{cases} (0; 0), & a_i \geq 1^{-\beta} \sqrt{\frac{c}{p_i}}, i = 1, 2; \\ (a_1, a_2), & a_i \leq \sqrt{\frac{\beta}{c} \frac{2p_{3-i} a_{3-i}}{c} - a_{3-i}}, i = 1, 2; \\ (0, a_2), & a_2 \leq \sqrt{\frac{\beta}{c} \frac{2p_1 a_1}{c} - a_1}, a_2 \geq 1^{-\beta} \sqrt{\frac{c}{p_2}}; \\ (a_1, 0) & a_1 \leq \sqrt{\frac{\beta}{c} \frac{2p_2 a_2}{c} - a_2}, a_1 \geq 1^{-\beta} \sqrt{\frac{c}{p_1}}. \end{cases}$$

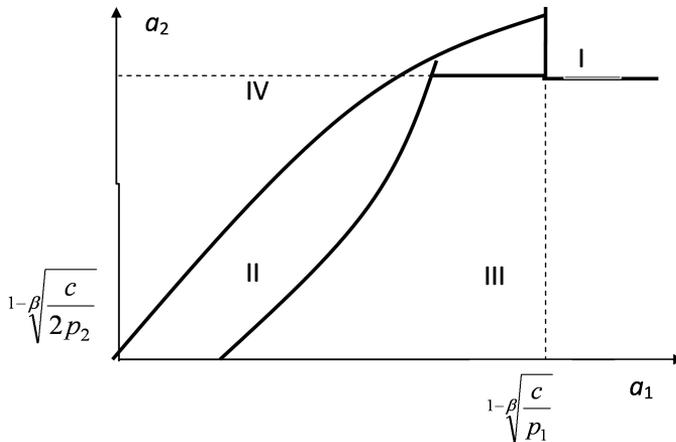


Рисунок 2. Равновесия в задаче 5.4

На рис. 2 область, соответствующая исходу (0, 0), обозначена I, область, соответствующая исходу (a1, a2) обозначена II, области, со-

ответствующие исходам $(0, a_2)$ и $(a_1, 0)$, обозначены III и IV, соответственно.

Сравнивая с условиями существования сильных равновесий для модели (4.2), получаем, что ситуации $(0, 0)$, (a_1, a_2) при указанных выше условиях являются также сильными равновесиями для модели с управлением, т.е. тогда $CPA = 1$. Для нахождения CPA в остальных двух случаях требуются численные расчеты.

Возможны и другие механизмы экономического управления, например,

$$s_i(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\{j:u_j=a_j\}|}, & u_i = a_i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.7)$$

который распределяет общественный доход только между «чистыми» коллективистами. Заметим, что в этом случае всем игрокам остаются только две рациональные стратегии: $\forall i : U_i = \{0, a_i\}$, так что применение механизма (5.7) сводит СОЧИ – модель общего вида к СОЧИ – модели с бинарными множествами стратегий.

Сформулируем теперь задачу дизайна механизмов посредством побуждения в общем виде. Пусть дизайнер механизмов, стремящийся максимизировать функцию общественного благосостояния (2.3), предъявляет всем игрокам с функциями выигрыша (2.1) механизм управления

$$s_i(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\{j:u_j=u_j^{\max}\}|}, & u_i = u_i^{\max}, \\ 0, & \text{иначе, } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5.8)$$

Тогда выигрыши игроков равны

$$g_i(u) = \begin{cases} p_i(a_i - u_i^{\max}) + \frac{c(u_i^{\max}, u_{-i})}{|\{j:u_j=u_j^{\max}\}|}, & u_i = u_i^{\max}, \\ p_i(a_i - u_i), & \text{иначе, } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Очевидно, что в этом случае $U_i = \{0, u_i^{\max}\}$, т.к. при $u_i > 0$, $u_i \neq u_i^{\max}$ имеем $g_i(u) = p_i(a_i - u_i) < p_i(u_i)$. Таким образом, применение механизма (5.8) также сводит СОЧИ – модель общего вида к модели с бинарными множествами стратегий.

Проблема состоит в том, что i -й игрок в момент принятия решения не знает u_{-i} и соответственно $\{j : u_j = u_j^{\max}\}$. Поэтому оценить

эффективность механизма (5.8) (сравнить выигрыши) в общем случае затруднительно. Можно утверждать, что оптимальная реакция i -го игрока на механизм (5.8) имеет вид

$$u_i^{opt}(s_i) = \begin{cases} u_i^{\max}, & \forall u_{-i} \in U_{-i} \quad p_i(a_i) \leq p_i(a_i - u_i) + \frac{c(u_i^{\max}, u_{-i})}{|\{j: u_j = u_j^{\max}\}|}, \\ 0 & \forall u_{-i} \in U_{-i} \quad p_i(a_i) \geq p_i(a_i - u_i) + \frac{c(u_i^{\max}, u_{-i})}{|\{j: u_j = u_j^{\max}\}|}, \end{cases} \quad (5.9)$$

т.е. одна из двух допустимых стратегий доминирует другую и тем самым является доминантной. Однако вопрос об оптимальной реакции остается открытым, если для разных u_{-i} знаки неравенств различны (т.е. обе стратегии недоминируемые). Скажем, для модели со степенной функцией частной деятельности и линейной функцией общей деятельности

$$g_i(u) = p_i(a_i - u_i)^{\beta_i} + s_i c \sum_{j=1}^n u_j \rightarrow \max, 0 \leq u_i \leq a_i,$$

где s_i определяются формулой (5.8), получаем условие (5.9) в виде

$$\forall u_{-i} \in U_{-i} \quad p_i a_i^{\beta_i} \leq p_i(a_i - u_i)^{\beta_i} + \frac{c u_i^{\max} + c \sum_{j \neq i} u_j}{|\{j : u_j = u_j^{\max}\}|}, \quad (5.10)$$

$$u_i^{\max} = \begin{cases} a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c}, & a_i > \sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $a_i \leq \sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c}$, то условие (5.10) выполняется тождественно, в противном случае оно принимает вид

$$\forall u_{-i} \in U_{-i} \quad p_i a_i^{\beta_i} \leq p_i(\sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c})^{\beta_i} + \frac{c \left(a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c} + \sum_{j \neq i} u_j \right)}{|\{j : u_j = u_j^{\max}\}|}.$$

Например, если $\forall i u_i = u_i^{\max}$, то имеем условие (5.10) в виде

$$\forall i \quad p_i a_i^{\beta_i} \leq p_i(\sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c})^{\beta_i} + \frac{c \left(\sum_{j \in N} a_j - \sqrt[1-\beta_i]{\beta_i p_i / c} \right)}{n},$$

а если $\forall j \neq i \ u_j = 0$, то $\forall i \ u_i = u_i^{\max}$, соответственно, в виде $\forall i \ p_i a_i^{\beta_i} \leq p_i \left({}^{1-\beta_i}\sqrt{\beta_i p_i / c} \right)^{\beta_i}$.

6. Административные механизмы управления (принуждение)

Как показывает проведенный выше анализ (см., например, условие, противоположное условию (5.9)), в ряде случаев использование экономических механизмов все же не позволяет обеспечить полную эффективность равновесий при эгоистическом поведении агентов. Тогда, для увеличения общественного благосостояния остается использовать принуждение, которое в СОЧИ – моделях предполагает, что внешний орган управления способен ограничивать область допустимых стратегий снизу: $b_i < u_i < a_i$, $j = 1, \dots, n$, где b_j – параметр, находящийся в распоряжении внешнего органа управления. Увеличивая b_i , внешний управляющий принуждает агента i выделять большую долю ресурса на общественные нужды.

Чтобы постановка задачи была нетривиальной, следует явно учитывать затраты внешнего органа управления на принуждение агентов. Тогда получаем модель вида

$$\begin{aligned} g_0(b_1, \dots, b_n, u_1, \dots, u_n) &= g(u_1, \dots, u_n) - q(b_1, \dots, b_n) \rightarrow \max, \\ &0 \leq b_i \leq a_i, \\ g_i(b_1, \dots, b_n, u_1, \dots, u_n) &= p_i(a_i - u_i) + s_i c(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \max, \\ &b_i \leq u_i \leq a_i, i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где $q(b_1, \dots, b_n)$ – функция затрат внешнего органа управления на принуждение агентов. Естественно считать, что функция q выпуклая, монотонно возрастающая по всем аргументам, $q(0, \dots, 0) = 0$. Рассмотрим в качестве иллюстрации модель вида

$$\begin{aligned} g_0(b, u) &= g(u_1, u_2) - q(b_1, b_2) \rightarrow \max, 0 \leq b_i \leq 1, \\ g_i(b, u) &= p_i(a_i - u_i)^{\beta_i} + c(u_1 + u_2)/2 \rightarrow \max, b_i \leq u_i \leq 1, i = 1, 2 \end{aligned}$$

с функцией общественного благосостояния $g(u) = p_1(a_1 - u_1)^{\beta_1} +$

$+p_2(a_2 - u_2)^{\beta_2} + cu_1 + cu_2$. Пусть $a_i > \sqrt[1-\beta_i]{\frac{2p_i\beta_i}{c}}$. Имеем

$$u^{\max} = \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_2 - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c}} \right),$$

$$g(u^{\max}) = (1 - \beta_1) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} p_1} + (1 - \beta_2) \sqrt[1-\beta_2]{\left(\frac{\beta_2}{c}\right)^{\beta_2} p_2} + c(a_1 + a_2);$$

$$u^{NE} = \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{2p_1\beta_1}{c}}, a_2 - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{2p_2\beta_2}{c}} \right),$$

$$g(u^{NE}) = (1 - 2\beta_1) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{2\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} 2p_1} + (1 - 2\beta_2) \sqrt[1-\beta_2]{\left(\frac{2\beta_2}{c}\right)^{\beta_2} 2p_2} + c(a_1 + a_2);$$

$$PA = \frac{(1-2\beta_1) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{2\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} 2p_1} + (1-2\beta_2) \sqrt[1-\beta_2]{\left(\frac{2\beta_2}{c}\right)^{\beta_2} 2p_2} + c(a_1 + a_2)}{(1-\beta_1) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} p_1} + (1-\beta_2) \sqrt[1-\beta_2]{\left(\frac{\beta_2}{c}\right)^{\beta_2} p_2} + c(a_1 + a_2)}.$$

Используем механизм принуждения вида $a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{p_i\beta_i}{c}} \leq u_i \leq a_i$, т.е. $b_i = a_i - \sqrt[1-\beta_i]{\frac{p_i\beta_i}{c}}, i = 1, 2$. Тогда

$$g_i \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_2 - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c}} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} p_1} + \frac{c(a_1 + a_2)}{2} - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c^{\beta_2}}},$$

$$g(a_1, a_2) = \frac{c(a_1 + a_2)}{2},$$

$$g_1 \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_2 \right) = \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} p_1} + \frac{c(a_1 + a_2)}{2}.$$

Поэтому $g_2 \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_2 \right) = \frac{c(a_1 + a_2)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_1\beta_1}{c^{\beta_1}}}, i = 1, 2$, $\left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_2 - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c}} \right)$ – теперь равновесие в доминантных стратегиях. Поэтому, принуждение выгодно дизайнеру механизмов,

если

$$\begin{aligned}
 g_0 \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}}, a_2 - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c}}, a_2 - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c}} \right) = \\
 = (1 - \beta_1) \sqrt[1-\beta_1]{\left(\frac{\beta_1}{c}\right)^{\beta_1} p_1} + (1 - \beta_2) \sqrt[1-\beta_2]{\left(\frac{\beta_2}{c}\right)^{\beta_2} p_2} + c(a_1 + a_2) - \\
 - q \left(a_1 - \sqrt[1-\beta_1]{\frac{p_1\beta_1}{c}} - \sqrt[1-\beta_2]{\frac{p_2\beta_2}{c}} \right), g_0(0, 0, 0, 0) = c(a_1 + a_2)
 \end{aligned}$$

и невыгодно в противном случае.

Возможна и более сильная с точки зрения отстаивания общественных интересов постановка задачи оптимизации для внешнего органа управления:

$$c(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \max, q(b_1, \dots, b_n) \leq \bar{q}, 0 \leq b_i \leq a_i, i = 1, \dots, n, \quad (6.1)$$

где \bar{q} – предельно допустимая величина затрат на принуждение. В последнем случае, если $q(a_1, \dots, a_n) < \bar{q}$, то внешний управляющий выбором $b_i = a_i, i = 1, \dots, n$ всегда может обеспечить достижение глобального максимума общественного дохода $c(a_1, \dots, a_n)$, при этом $CSPA = 1$. Поэтому задачу (6.1) более реально рассматривать при $q(a_1, \dots, a_n) > \bar{q}$.

7. Заключение

В статье рассмотрены теоретико-игровые модели согласования общественных и частных интересов (СОЧИ – модели), в которых функция выигрыша каждого игрока включает частную составляющую и долю совместно производимого общественного дохода, а стратегией игрока является распределение имеющегося у него ресурса между созданием общественного дохода и реализацией частных интересов. Эта постановка восходит к статье [5] и продолжена, например, в [6–7]. В настоящей статье вычислены значения цены анархии и общественной цены анархии для различных случаев соотношения частной и общественной составляющей выигрыша, представленных степенными производственными функциями. Приведено большое количество примеров, иллюстрирующих идеи исследования.

Если равновесия при эгоистичных агентах неэффективны (цена анархии существенно меньше единицы), то может оказаться целесообразным использование экономических или административных механизмов управления, обеспечивающих увеличение общественного дохода либо общественного благосостояния в целом (с учетом частных интересов). Рассмотрены примеры экономических механизмов управления (побуждения) посредством перераспределения общественного дохода: (5.1) – пропорциональное распределение, (5.7) – стимулирование коллективизма, (5.8) – стимулирование максимизации общественного благосостояния, и ограничение снизу переменной управления агента (доли ресурса на общественные нужды) как пример административного механизма управления (принуждения). В модели (3.1)–(3.2) механизм пропорционального распределения позволяет повысить эффективность равновесий как в непрерывном, так и в дискретном случаях; в модели (3.3)–(3.4) это верно только для показателя SPA.

К сожалению, вопрос об эффективности экономических механизмов перераспределения общественного дохода вида (5.8) в общем случае остается открытым. Что касается принуждения, то с его помощью всегда можно добиться выбора игроками общественно оптимальных стратегий, но практическая реализация принуждения требует учета затрат на его осуществление, а в этом случае результат сопоставления затрат и результатов вновь приходится анализировать в каждой конкретной ситуации.

Большой интерес вызывает рассмотрение СОЧИ – моделей в динамике, что предполагается проделать в будущем. Возможен также учет коррупции в СОЧИ – моделях: в этом случае величины b_i или s_i становятся функциями величины взятки (административная и экономическая коррупция соответственно). Особую актуальность имеет исследование административной коррупции, которая представляется неотъемлемым следствием попыток обеспечения общественных целей посредством принуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Опойцев В.И. *Метаигровой подход к управлению иерархическими системами* // Автоматика и телемеханика. 1974. №.1 С. 103–114.
2. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 3 С. 34–69.
3. Горбанева О.И. *Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т.2. Вып.1. С. 27–46.
4. Клейнер Г.Б. *Производственные функции: теория, методы, применение*. М., 1986.
5. Кукушкин Н.С. *О существовании устойчивых подходов в теоретико-игровой модели экономики с общественными благами* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. №.1 С. 25–28.
6. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения*. СПб.: «Лань», 2010.
7. Николенко С.И. *Теория экономических процессов*. М., 2009.
8. Угольницкий Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием*. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2010.
9. *Algorithmic Game Theory*. Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden. E. Tardos, V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007.
10. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *Purpose and Non-Purpose Resource Use Models in Two-Level Control Systems* // Advances in Systems Science and Application. 2013. V. 13. N 4. P. 378–390.
11. Kukushkin N.S. *A condition for Existence of Nash Equilibrium in Games with Public and Private Objectives* // Games and Economical Behavior. 1994. V. 7. P. 177–192.

12. Papadimitriou C.H. *Algorithms, games, and the Internet* // Proc. 33th Symposium Theory of Computing. 2001. P. 749–753.

PRICE OF ANARCHY AND CONTROL MECHANISMS IN MODELS OF CONCORDANCE OF PUBLIC AND PRIVATE INTERESTS

Olga I. Gorbaneva, South Federal University, Ph.D.
(gorbaneva@mail.ru).

Gennady A. Ougolnitsky, South Federal University, Dr.Sc.
(ougoln@mail.ru).

Abstract: The aim of the paper is to investigate price anarchy in models of concordance of public and private interests based on Germeyer–Vatel idea. To describe agent’s interests we use linear convolution of private activity revenue and some share of public activity revenue. Private and public interests are described by production functions. Control mechanisms (impulsion and compulsion) directed on improving of price of anarchy value are considered. This control problem develops the idea of meta-game synthesis.

Keywords: price of anarchy, Germeyer–Vatel model, public and private interests, administrative and economics control mechanisms.