Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.1, с. 92–120

УДК 517.977.8+517.521.75
ББК 22.18

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Дмитрий В. Хлопин*
Институт математики и механики УрО РАН
имени Н.Н.Красовского
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Уральский федеральный университет
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Данная работа посвящена распространению тауберовых теорем на дифференциальные игры с нулевой суммой. При достаточно мягких условиях на динамику и функцию мгновенной полезности, рассматриваются два параметризованных семейства игр: с функцией платы «среднее по промежутку значение функции полезности» (Cesaro mean) и с функцией платы «среднее с дисконтированием значение функции полезности» (Abel mean). Исследуются асимптотики цен получившихся игр при стремлении длины промежутка к бесконечности и при стремлении параметра дисконтирования к нулю, соответственно. Показывается, что из существования для одного из этих семейств равномерного предела функции цены (по инвариантному подмножеству фазового пространства) следует как существование такого предела для другого семейства, так и их равенство. Ключевую роль при доказательстве играет принцип оптимальности Беллмана.

* Работа поддержана проектом УрО РАН №12-П-1-1019

Ключевые слова: антагонистические дифференциальные игры, тауберовы теоремы, среднее по промежутку, среднее с дисконтом, принцип динамического программирования.

1. Введение

Как было показано Харди [29], для ограниченных последовательностей выполнено

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=\lim_{\lambda\downarrow 0}\sum_{i=1}^{\infty}(1-\lambda)^{i-1}a_i,$$

если хотя бы один из этих пределов существует. Такие теоремы позволяют для рядов получать хорошие приближения их сумм, используя более быстрые методы суммирования. С легкой руки Харди, такие теоремы были названы тауберовыми (Tauberian theorem), в честь доказанного А.Таубером в 1897 подобного результата для сходящихся рядов. В силу аналогичной тауберовой теоремы [28] для всякой ограниченной непрерывной скалярной функции g обязаны совпадать предел при $T\to\infty$ у ее среднего по промежутку (Cesaro mean)

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt$$

и предел при $\lambda\to+0$ у ее среднего с дисконтом (Abel mean)

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t)\,dt.$$

Можно изучать не пределы таких средних, а пределы оптимальных (в рамках той или иной динамики) значений этих средних. Поясним сказанное. При известных динамике и функции полезности можно ввести два параметризованных семейства задач оптимизации (в общем случае, игр). В одном семействе в качестве платежной функции принять реализующееся в ходе процесса среднее по конечному промежутку (Cesaro mean) значение функции полезности, а в качестве параметра — длину промежутка (число шагов при дискретной постановке). В другом же семействе — использовать среднее дисконтированное значение (Abel mean) функции полезности и параметр дисконтирования, соответственно. В каждом семействе игр для каждого значения параметра получится своя цена; будем, для краткости, называть такие цены оптимальными средними.

По-видимому, впервые асимптотики для оптимальных средних были введены в [19], в рамках стохастической постановки. В [34] была показана тауберова теорема для стохастической игры двух лиц с конечным числом состояний и действий: оптимальные средние по промежутку и оптимальные средние с дисконтом имеют общий предел. Такие пределы рассматривались и в других стохастических задачах; современную библиографию смотрите, например, в [21,41].

В теории управления существование пределов для оптимальных средних исследовалось неоднократно, отметим хотя бы [1,15,23]. В отличие от [19,34], в детерминированном случае начальное состояние известно точно; в частности, оптимальное среднее является функцией от него. Вследствие этого, уже при постановке (для того или иного семейства) вопроса существования предела их оптимальных средних, необходимо уточнить, в какой топологии будет пониматься предел.

В случае эргодичности (более обще, в случае nonexpansive-like case) оптимальные средние сходятся в компактно-открытой топологии к константам, таким образом, предельные функции не зависят от начального состояния, подробнее см. [13,16]. В общем случае это не так: пределы, не обязательно равные константе, рассматривались, например, в [27,36]. Подобные пределы возникают и для решений уравнений Гамильтона-Якоби; отметим, например, [7,8,33].

Для задач управления равенство равномерных пределов оптимальных средних, в случае, когда хотя бы один из пределов – константа, было впервые показано в [14]. Общий случай тауберовой теоремы для управляемых систем (а на самом деле и для динамической управляемой системы в очень общей постановке) был доказан в работе [35]; а именно, там показано, что из существования равномерного (по сильно инвариантному множеству начальных позиций) предела для одного из оптимальных средних следует равномерная сходимость к тому же пределу для другого оптимального среднего. Более подробно библиографию о тауберовых теоремах в задачах оптимизации смотрите в этой же работе.

Для дифференциальных игр работ, посвященных изучению пределов оптимальных средних, достаточно мало. Это прежде всего [12,17,22]; хороший обзор состояния дел в этой области смотрите также в [20, Section 3.4]. Как отмечено в [35], для антагонистических дифференциальных игр двух лиц тауберова теорема показана только в эргодическом случае. Данная работа предназначена для восполнения этого пробела.

2. Постановка дифференциальной игры

Пусть задана конфликтно-управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), a(t), b(t)),\ x(t) \in \mathbb{X},\ a(t) \in A,\ b(t) \in B, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

функционирующая в некотором конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{X}$, здесь A и B – конечномерные компакты.

Обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ множества всевозможных измеримых по Борелю селекторов $\mathbb{R}_{>0} \ni t \mapsto a(t) \in A$, $\mathbb{R}_{>0} \ni t \mapsto b(t) \in B$, соответственно.

Пусть для функций $f : \mathbb{X} \times A \times B \to \mathbb{X}$, $g : \mathbb{X} \times A \times B \to [0,1]$ выполнено:

(C) f и g непрерывны;

(L) f липшицева по фазовой переменной: для некоторого $L > 0$

$$||f(x', a, b) - f(x'', a, b)||_2 \leq L||x' - x''||_2 \quad \forall x', x'' \in \mathbb{X}, a \in A, b \in B.$$

Отметим, что в силу глобальной липшицевости функции f она удовлетворяет условию подлинейного роста, теперь для всякой пары $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$, для каждого начального условия $\omega = x(0) \in \mathbb{X}$ система (2.1) имеет единственное локальное решение, которое, в свою очередь, можно продолжить единственным образом на всю полуось $\mathbb{R}_{\geq 0}$; обозначим такое решение через $y[\omega, a, b] \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{X})$. Естественно при этом имеем тождество $y[\omega, a, b](0) = \omega$. Поместим при каждом $\omega \in \Omega$ в множество $Y[\omega]$ решения $y[\omega, a, b]$ для всех $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Будем далее предполагать, что для некоторого, не обязательно замкнутого, множества $\Omega \subset \mathbb{X}$

(Ω) Ω сильно инвариантно относительно системы (2.1), то есть для всех $\omega \in \Omega, x \in Y[\omega]$ выполнено $x(t) \in \Omega$ для всех $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Обозначим через $Y[\Omega]$ – всевозможные решения $y[\omega, a, b]$ для всех $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, \omega \in \Omega$.

Нам также понадобится условие Айзекса («условие седловой точки в маленькой игре»; см. [5, с.56])

(S) $\forall x, s \in \mathbb{X}$

$$\max_{a\in A}\min_{b\in B}\big[\langle s, f(x,a,b)\rangle + g(x,a,b)\big] = \min_{b\in B}\max_{a\in A}\big[\langle s, f(x,a,b)\rangle + g(x,a,b)\big].$$

Заметим, в частности, что это условие окажется по прежнему выполненным при умножении функции g на произвольное, не зависящее от (x, a, b) выражение, принимающее лишь положительные значения (например на положительную, зависящую лишь от времени, функцию).

Как показано в рамках классической теории дифференциальных игр [2,5,6,32,39], такое условие гарантирует существование цены игры. Более того, хотя создано достаточно много различных способов задать игру и множества стратегий каждого игрока, это условие обеспечивает эквивалентность существенного числа таких формализаций в том смысле, что цена игры в таких постановках – одна и та же. В частности это позволяет иметь выбор среди нескольких постановок, строить стратегии конструктивно, корректно обрабатывать ошибки и случайные помехи [3–5]. Прекрасный обзор, охватывающий значительное число формализаций, смотрите в [39, Ch. III]. В данной статье используется формализация на основе понятия неупреждающих стратегий (однозначных квазистратегий). Это обусловлено следующими обстоятельствами: 1) требуется формализация, для которой доказано существование ε-оптимальной универсальной стратегии; 2) не требуется какой-либо конструктивный, в частности численный, метод построения такой стратегии; 3) с точки зрения ссылок удобнее формализация, применяемая как на конечном, так и бесконечном промежутке.

Определим понятие квазистратегии (неупреждающей стратегии). Впервые для динамических игр оно было предложено в работе [38], получило известность в работах [25,37,40]. Рассматриваемый здесь вариант этого определения взят из [18].

Всякое правило $\alpha : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$ назовем неупреждающей стратегией первого игрока, если для всех $b, b' \in \mathcal{B}$, $t > 0$ из $b|_{]0,t]} = b'|_{]0,t]}$ следует $\alpha(b')|_{]0,t]} = \alpha(b)|_{]0,t]}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всевозможных квазистратегий первого игрока. Аналогично, введем множество $\mathfrak{B}$ неупреждающих стратегий второго игрока как всевозможные отображения $\beta : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ со свойством: для всех $a, a' \in \mathcal{A}$, $t > 0$ из $a|_{]0,t]} = a'|_{]0,t]}$ следует $\beta(a')|_{]0,t]} = \beta(a)|_{]0,t]}$.

Каждая квазистратегия $\alpha \in \mathfrak{A}$ задает каждому начальному значению $x(0) = \omega$ пучок $Y[\omega, \alpha]$ всевозможных порождаемых ею движений $y[\omega, \alpha(b), b]$ (по всем $b \in \mathcal{B}$); при этом естественно выполнено $Y[\omega, \alpha] \subset Y[\omega]$. Введем также для каждой квазистратегии $\alpha \in \mathfrak{A}$ каждому начальному значению $x(0) = \omega$ пучок $Z(\omega, \alpha) \subset C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \Omega) \times \mathcal{A} \times$ $\times \mathcal{B}$ всевозможных процессов, порождаемых из ω квазистратегией α, то есть триплетов вида $\big(y[\omega, \alpha(b), b], \alpha(b), b\big)$ (по всем $b \in \mathcal{B}$). Нам также удобно будет ввести множество $Z(\Omega) \subset C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \Omega) \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ всевозможных процессов, то есть триплетов вида $\big(y[\omega, a, b], a, b\big)$ (по всем $\omega \in \Omega, a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$).

Аналогично введем $Z(\omega, \beta) \subset C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \Omega) \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ для $\omega \in \Omega, \beta \in \mathfrak{B}$.

Введем параметризованное положительным числом T семейство игр с v_T. Зададим для всякого $T > 0$ в качестве критерия качества среднее по промежутку $[0, T]$ (Cesaro mean) значение функции g:

$$v_T(x, a, b) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{T} \int_0^T g(x(t), a(t), b(t))\, dt \qquad \forall z \in (x, a, b) \in Z(\Omega).$$

Задача первого игрока – максимизировать v_T, задача второго – минимизировать его. Тогда можно определить для всякого $\omega \in \Omega$ числа

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \inf_{(x,a,b) \in Z(\omega,\alpha)} v_T(x, a, b), \qquad \inf_{\beta \in \mathfrak{B}} \sup_{(x,a,b) \in Z(\omega,\beta)} v_T(x, a, b). \tag{2.2}$$

Как показано, например, в [6,25,31], в силу условия (S) цена игры существует при всех $T > 0$, в частности, числа из (2.2) совпадают для каждого $\omega \in \Omega$. Теперь корректно для всякого $T > 0$ определить функцию цены (оптимальное среднее при длине промежутка T):

$$V_T(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \inf_{z \in Z(\omega,\alpha)} v_T(z) = \inf_{\beta \in \mathfrak{B}} \sup_{z \in Z(\omega,\beta)} v_T(z) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Введем параметризованное положительным числом λ семейство игр с w_λ. Зададим для всякого $\lambda > 0$ в качестве критерия качества среднее с дисконтом λ (Abel mean) значение функции g:

$$w_\lambda(x,a,b) \stackrel{\triangle}{=} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(x(t),a(t),b(t))\,dt.$$

Задача первого игрока – максимизировать w_λ, задача второго – минимизировать его. Тогда можно определить для всякого $\omega \in \Omega$ числа

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \inf_{(x,a,b)\in Z(\omega,\alpha)} w_\lambda(x,a,b), \qquad \inf_{\beta\in\mathfrak{B}} \sup_{(x,a,b)\in Z(\omega,\beta)} w_\lambda(x,a,b). \tag{2.3}$$

Как показано, например, в [18, Corollary VIII.2.2], в силу условия (S) цена игры существует при всех $\lambda > 0$, в частности числа из (2.3) совпадают для каждого $\omega \in \Omega$. Таким образом, корректно для всякого $\lambda > 0$ определить функцию цены (оптимальное дисконтированное среднее при дисконте λ):

$$W_\lambda(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\alpha)} w_\lambda(z) = \inf_{\beta\in\mathfrak{B}} \sup_{z\in Z(\omega,\beta)} w_\lambda(z) \qquad \forall\omega\in\Omega.$$

Заметим, что поскольку g принимает значения из $[0,1]$, то в тех же пределах заключены также значения отображений $w_\lambda, W_\lambda, v_T, V_T$.

Основной результат данной работы – следующая теорема:

Теорема 2.1. *Предположим выполнены условия $(C), (L), (\Omega), (S)$.*

Тогда, если существует равномерный по $\omega \in \Omega$ предел

$$V_*(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{T\to+\infty} V_T(\omega),$$

то существует равномерный по $\omega \in \Omega$ предел

$$W_*(\omega) = \lim_{\lambda\to+0} W_\lambda(\omega);$$

более того, эти два предела совпадают.

Обратно, если существует равномерный по $\omega \in \Omega$ предел

$$W_*(\omega) = \lim_{\lambda\to+0} W_\lambda(\omega),$$

то существует равномерный по $\omega \in \Omega$ предел

$$V_*(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{T\to+\infty} V_T(\omega);$$

более того, эти два предела совпадают.

Подготовка к доказательству теоремы начнется со следующего раздела. Отметим пока несколько следствий.

Если убрать одного из игроков – например, взяв в качестве A или B одноэлементное множество, то мы получим равномерную тауберову теорему для управляемых систем. Такая теорема показана в [35] для достаточно общей динамической системы с одним игроком. Как показано там же, условие равномерности пределов существенно уже для управляемых систем.

Для данной теоремы цены V_T, W_λ вводились с помощью неупреждающих стратегий (квазистратегий), однако понятно, что можно было бы использовать любую формализацию, эквивалентную с точки зрения цен. Подробнее смотрите [39, Ch. III].

Конфликтно-управляемая система (2.1) не содержит явно параметр t. Однако результат теоремы автоматически переносится на системы вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t), b(t)),\ x(t) \in \mathbb{X},\ a(t) \in A,\ b(t) \in B, \quad t \geq 0$$

при дополнительном условии липшицевости по t правой части, поскольку ее можно будет записать в виде

$$\begin{gathered} \dot{w}(t) = 1, \quad \dot{x}(t) = f(w(t), x(t), a(t), b(t)), \\ (w(t), x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{X}, \quad a(t) \in A, \quad b(t) \in B, \quad t \geq 0. \end{gathered}$$

При этом, естественно, равномерная сходимость V_T, W_λ требуется на инвариантном подмножестве Ω уже множества $\mathbb{R}\times\mathbb{X}$, а не множества $\mathbb{X}$, как для системы (2.1).

В качестве применения этой теоремы сформулируем еще одно следствие. Заметим, что цена дифференциальной игры может быть описана с помощью уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Для этого вслед за [39, Sect. 11.1] и [18, (VIII.1.16)] определим гамильтонианы

$$\begin{aligned} H(x,s) &\stackrel{\triangle}{=} \max_{a\in A}\min_{v\in Q}\big[\langle s, f(x,a,b)\rangle + g(x,a,b)\big] \quad \forall x,s\in\mathbb{X}; \\ \bar{H}(x,s) &\stackrel{\triangle}{=} \min_{a\in A}\max_{b\in B}\big[-\langle s, f(x,a,b)\rangle - g(x,a,b)\big] \quad \forall x,s\in\mathbb{X}. \end{aligned}$$

Теперь, см. [39], терминальная задача

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + H(x, D_x u(t,x)) \;=\; 0 \qquad \forall t \le 0, x \in \mathbb{X}, \tag{2.4}$$

$$u(0,x) \equiv 0 \qquad \forall x \in \mathbb{X} \tag{2.5}$$

имеет единственное минимаксное (вязкостное) решение $u \in C(\mathbb{R}_{\le 0} \times \times \mathbb{X})$, при этом для всех $(T,x) \in \mathbb{R}_{>0} \times \Omega$ выполнено

$$V_T(x) = \frac{u(-T,x)}{T}.$$

Аналогично, см. [18], для всех $\lambda > 0$ уравнение Гамильтона–Якоби

$$\lambda \bar{u}(x) + \bar{H}(x, D_x \bar{u}(x)) \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbb{X} \tag{2.6}$$

имеет единственное вязкостное решение $\bar{u}_\lambda$ в $BC(\mathbb{X})$ (в классе ограниченных непрерывных функций); более того, при этом для всех $x \in \Omega$ выполнено

$$W_\lambda(x) = \lambda \bar{u}_\lambda(x).$$

Теперь, как прямое следствие теоремы, также имеем:

Следствие 2.1. *Предположим выполнены условия* $(C), (L), (\Omega), (S)$.

Пусть $u \in C(\mathbb{R}_{\le 0} \times \mathbb{X})$ *– минимаксное (вязкостное) решение задачи* (2.4),(2.5). *Пусть для каждого* $\lambda > 0$ *функция* $\bar{u}_\lambda \in BC(\mathbb{X})$ *является вязкостным решением уравнения* (2.6).

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *существует равномерный по* $x \in \Omega$ *предел* $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda \bar{u}_\lambda(x)$;
2. *существует равномерный по* $x \in \Omega$ *предел* $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda u(-1/\lambda, x)$;
3. *каждый из двух пределов* $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda \bar{u}_\lambda(x)$, $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda u(-1/\lambda, x)$ *существует для всякого* $x \in \Omega$ *и равномерен по* $x \in \Omega$; *более того, эти пределы совпадают.*

Отметим, что вязкостное решение уравнения (2.6) при заданном $\lambda > 0$ решить, вообще говоря, проще, чем найти решение у (2.4),(2.5) (соответствующие численные методы можно найти в [39], [18]). Показанное следствие усиливает соответствующие результаты в [12,17,22].

3. Вспомогательные построения

Прежде всего нам потребуется более широкий класс стратегий. Это мотивировано следующим обстоятельством. Изложенная выше формализация позволяет в рассматриваемых нами играх гарантировать для всякого $\varepsilon > 0$ существование для всякой начальной позиции ω у каждого игрока стратегий (соответственно $\alpha^\omega \in \mathfrak{A}$, $\beta^\omega \in \mathfrak{B}$), ε-оптимальных для этой позиции. Нам требуется больше, существование у каждого игрока стратегий, ε-оптимальных в заданной игре для всякой начальной позиции $\omega \in \Omega$. Это можно сделать, перейдя от квазистратегий к неупреждающим операторам. Такие операторы были введены, например в [6, с. 180], [10]; дальнейшее их применение смотрите в [11,24].

Назовем неупреждающим оператором первого игрока (второго игрока) произвольное отображение из Ω в $\mathfrak{A}$ (в $\mathfrak{B}$); обозначим через $\mathbb{A}$ (через $\mathbb{B}$). Каждому неупреждающему оператору ζ из $\mathbb{A}$ или $\mathbb{B}$, по аналогии с введенными ранее $Z(\omega, \alpha)$, $Z(\omega, \beta)$, определим

$$Z(Gr\,\zeta) \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\omega \in \Omega} Z(\omega, \zeta(\omega)).$$

Заметим, что при любом ограниченном функционале качества c (в частности для описанных выше v_T или w_λ) для всех $\omega \in \Omega$ выполнено

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \inf_{z \in Z(\omega,\alpha)} c(z) = \sup_{\zeta \in \mathbb{A}} \inf_{z \in Z(\omega,\zeta(\omega))} c(z), \tag{3.1}$$
$$\inf_{\beta \in \mathfrak{B}} \sup_{z \in Z(\omega,\beta)} c(z) = \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega,\xi(\omega))} c(z).$$

Тогда, для всех $\lambda, T > 0$ можно считать, что

$$V_T(\omega) = \sup_{\zeta \in \mathbb{A}} \inf_{z \in Z(\omega,\zeta(\omega))} v_T(z) = \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega,\xi(\omega))} w_\lambda(z) \qquad \forall \omega \in \Omega, \tag{3.2}$$
$$W_\lambda(\omega) = \sup_{\zeta \in \mathbb{A}} \inf_{z \in Z(\omega,\zeta(\omega))} w_\lambda(z) = \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega,\xi(\omega))} w_\lambda(z) \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.3}$$

Более того, пусть в некоторой игре с ограниченным функционалом качества (например с критериями v_T или w_λ) для всякого $\varepsilon > 0$, для всякой начальной позиции ω у каждого игрока найдется стратегия (соответственно $\alpha^\omega \in \mathfrak{A}$, $\beta^\omega \in \mathfrak{B}$), ε-оптимальная для этой точки. Введем неупреждающие операторы $\zeta \in \mathbb{A}$, $\xi \in \mathbb{B}$ по правилу: $\zeta(\omega) = \alpha^\omega$, $\xi(\omega) = \beta^\omega$. Теперь они являются ε-оптимальными неупреждающими операторами (каждый – для своего игрока). Итак:

Замечание 3.1. В играх с ограниченным функционалом качества у каждого игрока для всякого параметра точности $\varepsilon > 0$ имеются ε-оптимальные на всем Ω неупреждающие операторы.

Нам потребуется также для неупреждающих операторов ввести операции. Определим сначала для каждого момента времени $\tau > 0$ всякой паре функций $a', a'' \in \mathcal{A}$ их склейку – функцию $a' \diamond_\tau a'' \in \mathcal{A}$ – правилом:

$$(a' \diamond_\tau a'')(t) \triangleq \begin{cases} a'(t), & 0 \le t \le \tau, \\ a''(t-\tau), & t > \tau. \end{cases}$$

Заметим, что $a' \diamond_\tau a'' \in \mathcal{A}$; более того, всякий элемент $a \in \mathcal{A}$ для всякого $\tau > 0$ при некоторых $a', a'' \in \mathcal{A}$ представим в виде $a = a' \diamond_\tau a''$. Аналогично определим склейку $b' \diamond_\tau b'' \in \mathcal{B}$ для всех $b', b'' \in \mathcal{B}$.

Наша задача – ввести операцию $\diamond_\tau$ уже для неупреждающих операторов. Зафиксируем некоторые $\tau > 0, \zeta', \zeta'' \in \mathbb{A}$. Достаточно определить $\zeta' \diamond_\tau \zeta''$ в каждой точке $\omega \in \Omega$. Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Определим сначала отображение $\eta = \eta_{\zeta',\zeta'',\omega} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ правилом:

$$\eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b', b'') \triangleq \zeta''\big(y[\omega, \zeta'(\omega)(b'), b'](\tau)\big)(b'') \quad \forall b', b'' \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что оно не зависит от $b'|_{]\tau,\infty[}$, в частности, для всех $b'' \in \mathcal{B}$

$$\eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b' \diamond_\tau b'', b'') = \zeta''\big(y[\omega, \zeta'(\omega)(b'), b'](\tau)\big)(b''). \tag{3.4}$$

Поскольку образ у ζ'' лежит в $\mathfrak{A}$, то для всех $b' \diamond_\tau b'', \bar{b}' \diamond_\tau \bar{b}'' \in \mathcal{B}, \delta > 0$

$$\begin{gathered}\big(b'|_{[0,\tau]} \;=\; \bar{b}'|_{[0,\tau]},\; b''|_{]0,\delta]} \;=\; \bar{b}''|_{]0,\delta]}\big) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \big(\eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b' \diamond_\tau b'', b'')|_{[0,\delta]} = \eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(\bar{b}' \diamond_\tau \bar{b}'', \bar{b}'')|_{[0,\delta]}\big).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Для всякого $\omega \in \Omega$ зададим значение $(\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)$: это отображение из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, введенное правилом:

$$(\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)(b) \triangleq \zeta'(\omega)(b) \diamond_\tau \eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b, b'') \qquad \forall b = b' \diamond_\tau b'' \in \mathcal{B}. \tag{3.6}$$

В силу (3.4) и неупреждаемости $\zeta'(\omega)$ корректно записать:

$$(\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)(b) = \zeta'(\omega)(b') \diamond_\tau \eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b', b'') \qquad \forall b = b' \diamond_\tau b'' \in \mathcal{B}.$$

Теперь отображение $(\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)$ будет неупреждающим, если для всякого $t > \tau$ при любых $b, \bar{b} \in \mathcal{B}$ из $b|_{[0,t]} = \bar{b}|_{[0,t]}$ следует $\alpha(b)|_{]\tau,t]} =$

$= \alpha(\bar{b})|_{]\tau,t]}$, но это выполнено в силу (3.5). Итак, $(\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)$ – неупреждающая квазистратегия. В силу произвольности выбора $\omega \in \Omega$, $\zeta' \diamond_\tau \zeta''$ – неупреждающий оператор, то есть элемент из $\mathbb{A}$. Итак, на множестве $\mathbb{A}$ определена операция $\diamond_\tau$.

Определим теперь для всех $\tau > 0, x', x'' \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \Omega)$ таких, что $x'(\tau) = x''(0)$, функцию $x' \diamond_\tau x''$ правилом:

$$(x' \diamond_\tau x'')(t) \triangleq \begin{cases} x'(t), & t < \tau, \\ x''(t-\tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Теперь для всех $z' \triangleq (x', a', b'), z'' \triangleq (x'', a'', b'')$ со свойством $x'(\tau) = x''(\tau)$ (и только для таких z', z'') определим их склейку

$$z' \diamond_\tau z'' \triangleq \big(x' \diamond_\tau x'', a' \diamond_\tau a'', b' \diamond_\tau b''\big).$$

Более того, для всех $\omega \in \Omega$, $a', a'' \in \mathcal{A}, b', b'' \in \mathcal{B}, x', x'' \in Y[\Omega]$

$$\Big(x'|_{[0,\tau]} = y[\omega, a', b']|_{[0,\tau]},\ x'' = y[x'(\tau), a'', b'']\Big) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big(x' \diamond_\tau x'' = y[\omega, a' \diamond_\tau a'', b' \diamond_\tau b'']\Big).$$

Теперь при любых $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{A}$ для $a' = \alpha'(b'), a'' = \alpha'(b'')$ имеем

$$\Big(x'|_{[0,\tau]} = y[\omega, \alpha'(b'), b']|_{[0,\tau]}, x'' = y\big[x'(\tau), \alpha''(b''), b''\big]\Big) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big(x' \diamond_\tau x'' = y\big[\omega, \alpha'(b') \diamond_\tau \alpha''(b''), b' \diamond_\tau b''\big]\Big).$$

Приняв $\alpha' = \zeta'(\omega)$, $\alpha'' = \zeta''(x'(\tau))$, получаем для всех $\zeta', \zeta'' \in \mathbb{A}$

$$\Big(x'\big|_{[0,\tau]} = y\big[\omega, \zeta'(\omega)(b'), b'\big]\big|_{[0,\tau]},\ x'' = y\big[x'(\tau), \zeta''(x'(\tau))(b''), b''\big]\Big) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big(x' \diamond_\tau x'' = y\big[\omega, \zeta'(\omega)(b') \diamond_\tau \zeta''(x'(\tau))(b''), b' \diamond_\tau b''\big]\Big).$$

Поскольку из (3.6) и неупреждаемости $\zeta'(\omega)$ следует

$$(\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)(b' \diamond_\tau b'') = \zeta'(\omega)(b') \diamond_\tau \eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b' \diamond_\tau b'', b''),$$

а в силу (3.4) выполнено $\zeta''(x'(\tau))(b'') = \eta_{\zeta',\zeta'',\omega}(b' \diamond_\tau b'', b'')$, то

$$\Big(x'|_{[0,\tau]} = y[\omega, \zeta'(\omega)(b'), b']|_{[0,\tau]},\ x'' = y[x'(\tau), \zeta''(x'(\tau))(b''), b'']\Big) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big(x' \diamond_\tau x'' = y[\omega, (\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega), b' \diamond_\tau b'']\Big).$$

Итак, показано, что

Замечание 3.2. Для всех $\omega \in \Omega, \zeta', \zeta'' \in \mathbb{A}, \tau > 0$

$$\begin{aligned} Z(\omega, (\zeta' \diamond_\tau \zeta'')(\omega)) &= \Big\{ z' \diamond_\tau z'' \,|\, z' \stackrel{\triangle}{=} \big(x', \zeta'(\omega)(b'), b'\big) \in Z\big(\omega, \zeta'(\omega)\big), \\ &\qquad z'' \stackrel{\triangle}{=} \big(x'', \zeta''(x'(\tau))(b''), b''\big) \in Z\big(x'(\tau), \zeta'(x'(\tau))\big)\Big\}; \\ Z(Gr\,\zeta' \diamond_\tau \zeta'') &= \Big\{ z' \diamond_\tau z'' \,|\, z' = (x', a', b') \in Z(Gr\,\zeta'), \\ &\qquad z'' \in Z\big(x'(\tau), \zeta''(x'(\tau))\big)\Big\}. \end{aligned}$$

Заметим также, хотя это нам далее и не потребуется, все сделанные выше построения можно провести и для второго игрока.

Всюду далее, для определенности, для всех $\tau', \tau'' > 0$, $\zeta, \zeta', \zeta'' \in \mathbb{A}$ примем $\zeta \diamond_{\tau'} \zeta' \diamond_{\tau''} \zeta'' \stackrel{\triangle}{=} (\zeta \diamond_{\tau'} \zeta') \diamond_{\tau''} \zeta''$.

Рассмотрим произвольный процесс $z \in Z(\Omega)$ и произвольное число $T \geq 0$. Определим процесс z_T правилом: $z_T(t) \stackrel{\triangle}{=} z(t+T)$. Естественно, если при этом $z = (x' = y[\omega, a, b], a, b)$, то для $z_T = (x'_T, a_T, b_T)$ выполнено $x'_T = y[x'(\tau), a_T, b_T]$; в силу этого z_T также процесс.

Такое сокращение удобно, в частности, при доказательстве следующих равенств: для всех $T > 0, \lambda > 0, 0 < T' < T, z \in Z(\Omega)$

$$\begin{aligned} w_\lambda(z) - e^{-\lambda T} w_\lambda(z_T) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(z(t))\,dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(t+T)} g(z(t+T))\,dt = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(z(t))\,dt - \lambda \int_T^\infty e^{-\lambda t} g(z(t))\,dt = \\ &= \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} g(z(t))\,dt; \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} v_T(z) - \frac{T'}{T} v_{T'}(z_{T-T'}) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(z(t))\,dt - \frac{T'}{TT'} \int_0^{T'} g(z_{T-T'}(t+T))\,dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T g(z(t))\,dt - \frac{1}{T} \int_{T-T'}^T g(z(t))\,dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T-T'} g(z(t))\,dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для построенных выше игр имеет место принцип динамического программирования:

Замечание 3.3. Для любых $\omega \in \Omega$, $\lambda > 0, T > 0$ выполнено

$$W_\lambda(\omega) \;=\; \sup_{\zeta\in\mathbb{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))} \Big[w_\lambda(z) - e^{-\lambda T} w_\lambda(z_T) + e^{-\lambda T} W_\lambda(z(T))\Big] \overset{(3.7)}{=}$$

$$\overset{(3.7)}{=} \sup_{\zeta\in\mathbb{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))} \Big[\int_0^T \lambda e^{-\lambda t} g(z(t))\,dt + e^{-\lambda T} W_\lambda(z(T))\Big]. \qquad (3.9)$$

Замечание 3.4. Для всех $\omega \in \Omega, T' > 0, T > T'$ выполнено

$$V_T(\omega) \;=\; \sup_{\zeta\in\mathbb{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))} \Big[v_T(z) - \frac{T'}{T} v_{T'}(z_{T-T'}) + \frac{T'}{T} V_{T'}(z(T-T'))\Big] \overset{(3.8)}{=}$$

$$\overset{(3.8)}{=} \sup_{\zeta\in\mathbb{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))} \Big[\frac{1}{T}\int_0^{T-T'} g(z(t))\,dt + \frac{T'}{T} V_{T'}(z(T-T'))\Big]. \qquad (3.10)$$

В терминах квазистратегий принцип динамического программирования для игр на конечном промежутке, в частности для критерия v_T, хорошо известен, смотрите, например [26]. Такой принцип для критерия w_λ следует из [18, Theorem VIII.1.9]. В силу (3.1), если принцип выполнен для неупреждающих стратегий, то выполнен и для неупреждающих операторов. Таким образом, замечания 3.3, 3.4 показаны.

4. Оценка $V_* \leq W$

Покажем, что, если у функций V_T имеется равномерный предел V_*, то первый игрок может обеспечить значение функционала w_λ не хуже V_* с любой заранее заданной точностью для достаточно малых λ. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, опишем общую идею его доказательства.

Для заданного $\lambda > 0$ подбирается промежуток $[0, \tau_k[$ и его разбиение на подынтервалы $[\tau_i, \tau_{i-1}[$, затем по ним строится кусочно-постоянная функция h, приближающая функцию $e^{-\lambda t}$ с заданной точностью. После этого функционал w_λ подменяется новым функционалом c, зависящим лишь от интеграла функции h вдоль траектории, реализовавшейся к моменту τ_k, и от позиции в этот момент. Остается найти для этого функционала неупреждающий оператор, гарантирующий ему с нужной точностью значения не меньше V_*.

Такой оператор строится методом динамического программирования: склеиванием операторов, близких к оптимальным в специально подобранных задачах на меньших промежутках времени. Для этого функционал c раскладывается в сумму (4.10). Последняя строка этой суммы имеет вид выражения в квадратных скобках из (3.10). Теперь замечание 3.4 позволяет подобрать на промежутке $[\tau_{k-1},\tau_k[$ такой неупреждающий оператор, для реализаций которого последняя строка в (4.10) оценивается функцией от реализовавшейся в момент τ_{k-1} позиции. Равномерность предела V_T позволяет оценить уже эту функцию так, чтобы к последней строке получившейся оценки (4.11) было применимо замечание 3.4. Повторение этой процедуры еще $k-1$ раз дает нужную оценку.

Предложение 4.1. *Пусть имеет место равномерный по $\omega\in\Omega$ предел*

$$V_*(\omega)\stackrel{\triangle}{=}\lim_{T\to+\infty}\sup_{\zeta\in\mathbb{A}}\inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))}v_T(z).$$

Тогда

$$V_*(\omega)\le\liminf_{\lambda\to+0}\sup_{\zeta\in\mathbb{A}}\inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))}w_\lambda(z),$$

более того для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\bar\lambda>0$, что, если $0<\lambda\le\bar\lambda$, то для некоторого неупреждающего оператора $\zeta\in\mathbb{A}$ при всякой его реализации $z\in Z(Gr\,\zeta)$ выполнено $w_\lambda(z)>V_*(\omega)-\varepsilon$.

Доказательство.

Шаг 1. *Выбор констант и вспомогательные оценки.* Зафиксируем некоторое целое число

$$k>2. \tag{4.1}$$

С одной стороны, по условию найдется $T_0>k$, при котором

$$\left|V_{T'}(\omega)-V_{T''}(\omega)\right|<\frac{1}{k^2}\qquad T',T''>T_0/2\quad\forall\omega\in\Omega. \tag{4.2}$$

С другой стороны, достаточно показать, что при $\lambda<2/T_0$ для некоторого неупреждающего оператора $\zeta=\zeta^\lambda\in\mathbb{A}$

$$w_\lambda(z)\ge V_*(z(0))-\frac{2+3\ln k}{k}\qquad\forall z\in Z(Gr\,\zeta^\lambda). \tag{4.3}$$

Зафиксируем произвольное $\lambda < 2/T_0$. Примем

$$p = \frac{1}{1 - \frac{\ln k}{k}},\ \delta = \frac{\ln p}{\lambda},\ T = \frac{\delta p}{p-1},\ \tau_i = i\delta \qquad \forall i \in \overline{0,k}.$$

Тогда, в силу $1 < \dfrac{p\ln p}{p-1} < p \overset{(4.1)}{<} 1 + \dfrac{2\ln k}{k} \overset{(4.1)}{<} 2$, последовательно имеем

$$1 < \lambda T = \frac{\lambda\delta p}{p-1} = \frac{p\ln p}{p-1} < p, \quad T^{-1} < \lambda < pT^{-1} < 2T^{-1}, \tag{4.4}$$

$$p^{-k} = \Big(1 - \frac{\ln k}{k}\Big)^k < \frac{1}{k},\ \frac{T-\delta}{T} = p^{-1},\ e^{\lambda\delta} = p < 1 + \frac{2\ln k}{k}. \tag{4.5}$$

Отметим, что в силу (4.4) и $\lambda < 2/T_0$, имеем $p^{-1}T > \lambda^{-1} > T_0/2$, таким образом, для $T' = p^{-1}T, T'' = T$ выполнено (4.2).

Шаг 2. *Построение близкого к w_λ функционала c.* Определим теперь на $[0,\tau_k[$ ступенчатую функцию h правилом:

$$h(t) = e^{-\lambda\tau_i} \overset{(4.5)}{=} p^{-i} \qquad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, i \in \overline{0,k-1}.$$

Тогда $h(t)e^{\lambda t} \geq 1$; теперь для всех $t \in [0,\tau_k]$

$$1 \leq h(t)e^{\lambda t} = h(\tau_i)e^{\lambda t} \leq h(\tau_i)e^{\lambda\tau_{i+1}} = p^{-i}p^{i+1} = p. \tag{4.6}$$

Рассмотрим игру с критерием качества

$$c(z) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{T}\int_0^{\tau_k} h(t)g(z(t))dt + p^{-k}V_{p^{-1}T}(z(\tau_k)).$$

Отметим, что для всех $x \in \mathbb{X}, a \in A, b \in \mathbb{B}$ выполнено $0 \leq g(x,a,b) \leq 1$, откуда

$$0 \leq p^{-k}V_{p^{-1}T}(z(\tau_k)) \leq p^{-k} \overset{(4.5)}{\leq} \frac{1}{k} \overset{(4.1)}{\leq} \frac{\ln k}{k}.$$

Из (4.4) следует $1 < \lambda T < p$, теперь для любого процесса z

$$\begin{aligned}
w_\lambda(z) &\overset{(4.6)}{\leq} \lambda\int_0^{\tau_k} h(t)g(z(t))dt + e^{-\lambda\tau_k}w_\lambda(z_{\tau_k})\\
&\leq \lambda T\, c(z) + \frac{\ln k}{k} \overset{(4.4)}{\leq} p\, c(z) + \frac{\ln k}{k};\\
c(z) &\overset{(4.6)}{\leq} \frac{1}{T}\int_0^{\tau_k} pe^{-\lambda t}g(z(t))dt + \frac{\ln k}{k}\\
&\leq \frac{p}{T\lambda}w_\lambda(z) + \frac{\ln k}{k} \overset{(4.4)}{\leq} p\, w_\lambda(z) + \frac{\ln k}{k}.
\end{aligned}$$

В частности, для любого процесса $z \in z(\Omega)$ выполнено

$$|w_\lambda(z) - c(z)| < \frac{\ln k}{k} + p - 1 \overset{(4.5)}{\leq} \frac{3\ln k}{k}. \tag{4.7}$$

Шаг 3. *Построение неупреждающего оператора ζ^*.* В силу замечания 3.1 найдется неупреждающий оператор $\zeta \in \mathbb{A}$, $1/k^2$-оптимальный на всем Ω для игры с критерием качества

$$v_T(z) - p^{-1}v_{p^{-1}T}(z_\delta) + p^{-1}V_{p^{-1}T}(z(\delta)).$$

В силу замечания 3.4 цена этой игры совпадает с V_T, поэтому для всех $z \in Z(Gr\,\zeta)$

$$v_T(z) - p^{-1}v_{p^{-1}T}(z_\delta) + p^{-1}V_{p^{-1}T}(z(\delta)) \geq V_T(z(0)) - \frac{1}{k^2}. \tag{4.8}$$

Более того, поскольку значение этой игры не зависит от процесса после момента δ, то (4.8) выполнено помимо $z \in Z(Gr\,\zeta)$ также для любой склейки вида $z \diamond_\delta z'$. Тогда (4.8) выполнено для всех $z \in Z(\omega, \zeta \diamond_\tau \zeta')$ при любом операторе $\zeta' \in \mathbb{A}$.

Покажем, что оператор

$$\zeta^* \triangleq \zeta \diamond_{\tau_1} \zeta \diamond_{\tau_2} \cdots \diamond_{\tau_{i-1}} \zeta \diamond_{\tau_i} \cdots \diamond_{\tau_{k-1}} \zeta \in \mathbb{A}$$

гарантирует для всех своих процессов $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$

$$c(z) > V_T(z(0)) - \frac{2}{k}, \tag{4.9}$$

что вместе с (4.7) будет давать необходимую нам оценку (4.3).

Шаг 4. *Итерационная процедура.* Напомним, что $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $h(\tau_i) = p^{-i}$, $p^{-1}T = T - \delta$. Теперь

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h(t)g(z(t))dt = \frac{1}{T}\int_0^\delta h(\tau_i)g(z(t+\tau_i))dt = \\ = \frac{h(\tau_i)}{T}\int_0^\delta g(z(t+\tau_i))dt \overset{(3.8)}{=} \\ \overset{(3.8)}{=} p^{-i}\Big[v_T(z_{\tau_i}) - p^{-1}v_{p^{-1}T}(z_{\tau_i+\delta})\Big] = \\ = p^{-i}v_T(z_{\tau_i}) - p^{-i-1}v_{p^{-1}T}(z_{\tau_{i+1}}).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} c(z) = \upsilon_T(z) - p^{-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_1}) &\ + \\ +p^{-1}\upsilon_T(z_{\tau_1}) - p^{-2}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_2}) &\ + \ \ldots \\ +p^{-i}\upsilon_T(z_{\tau_i}) - p^{-i-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{i+1}}) &\ + \ \ldots \\ +p^{-k+2}\upsilon_T(z_{\tau_{k-2}}) - p^{-k+1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{k-1}}) &\ + \\ +p^{-k+1}\upsilon_T(z_{\tau_{k-1}}) - p^{-k}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_k}) &\ + \ p^{-k}V_{p^{-1}T}(z(\tau_k)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Отметим, что $z_{\tau_{k-1}} \in Z(Gr\,\zeta)$ у любой $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$, тогда для $z_{\tau_{k-1}}$ выполнено (4.8), то есть

$$\upsilon_T(z_{\tau_{k-1}}) - p^{-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_k}) + p^{-1}V_{p^{-1}T}(z(\tau_k)) \geq V_T(z(\tau_{k-1})) - 1/k^2.$$

С учетом (4.2) значение последней строки в (4.10) не менее $p^{-k+1}V_{p^{-1}T}(z(\tau_{k-1})) - 2p^{-k+1}/k^2$. Итак, оператор ζ^* гарантирует для всякого своего процесса $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$

$$\begin{aligned} c(z) \geq \upsilon_T(z) - p^{-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_1}) &\ + \\ +p^{-1}\upsilon_T(z_{\tau_1}) - p^{-2}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_2}) &\ + \ \ldots \\ +p^{-i}\upsilon_T(z_{\tau_i}) - p^{-i-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{i+1}}) &\ + \ \ldots \\ +p^{-k+2}\upsilon_T(z_{\tau_{k-2}}) - p^{-k+1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{k-1}}) &\ + p^{-k+1}V_{p^{-1}T}(z(\tau_{k-1})) - \frac{2}{k^2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Отметим, что $z_{\tau_{k-2}} \in Z(Gr\,\zeta \diamond_\delta \zeta)$, тогда для $z_{\tau_{k-2}}$ выполнено (4.8), то есть

$$\upsilon_T(z_{\tau_{k-2}}) - p^{-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{k-1}}) + p^{-1}V_{p^{-1}T}(z(\tau_{k-1})) \geq V_T(z(\tau_{k-2})) - 1/k^2.$$

Итак, с учетом (4.2), для $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$

$$\begin{aligned} c(z) \geq \upsilon_T(z) - p^{-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_1}) &\ + \\ +p^{-1}\upsilon_T(z_{\tau_1}) - p^{-2}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_2}) &\ + \ \ldots \\ +p^{-i}\upsilon_T(z_{\tau_i}) - p^{-i-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{i+1}}) &\ + \ \ldots \\ +p^{-k+3}\upsilon_T(z_{\tau_{k-3}}) - p^{-k+2}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{k-2}}) &\ + \ p^{-k-2}V_{p^{-1}T}(z(\tau_{k-2})) - \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Аналогично, для всех $l \in \overline{1, k-3}$ поскольку $z_{\tau_l} \in Z(Gr\,\zeta \diamond_\delta \zeta')$ для некоторого оператора ζ', то для z_{τ_l} имеет место (4.8), теперь из (4.2) следует

$$\upsilon_T(z_{\tau_l}) - p^{-1}\upsilon_{p^{-1}T}(z_{\tau_{l+1}}) + p^{-1}V_{p^{-1}T}(z(\tau_{l+1})) \geq V_T(z(\tau_l)) - 2/k^2.$$

Теперь для $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$, последовательно, при каждом $l \in \overline{1, k-3}$

$$\begin{aligned} c(z) \geq v_T(z) - p^{-1} v_{p^{-1}T}(z_{\tau_1}) &\;+ \\ +p^{-1} v_T(z_{\tau_1}) - p^{-2} v_{p^{-1}T}(z_{\tau_2}) &\;+\;\ldots \\ +p^{-l} v_T(z_{\tau_l}) - p^{-l-1} v_{p^{-1}T}(z_{\tau_{l+1}}) &\;+\; p^{-l-1} V_{p^{-1}T}(z(\tau_{l+1})) - \frac{2(k-l)}{k^2}. \end{aligned}$$

В частности, для момента времени τ_1

$$c(z) \geq v_T(z) - p^{-1} v_{p^{-1}T}(z_{\tau_1}) + p^{-1} V_{p^{-1}T}(z(\tau_1)) - \frac{2(k-1)}{k^2}.$$

Теперь из выбора оператора ζ^* для $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$ выполнено

$$c(z) \geq V_T(z(0)) - \frac{2}{k},$$

то есть (4.9), что и требовалось. □

5. Оценка $W_* \leq V$

Покажем, что, если у функций W_λ имеется равномерный предел W_*, то первый игрок может обеспечить значение функционала v_T не хуже W_* с любой заранее заданной точностью для достаточно больших T. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, опишем общую идею его доказательства.

Для заданного $T > 0$ выбирается $\lambda > 0$, промежуток $[0, T[$ разбивается на некоторое число k подынтервалов вида $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, длины которых образуют геометрическую прогрессию; затем по ним строится близкая к единице функция h, равная произведению кусочно-постоянной на $e^{-\lambda t}$. После этого v_T подменяется новым функционалом c, зависящим лишь от интеграла функции h вдоль траектории, реализовавшейся к моменту τ_k, и от позиции в этот момент. Остается найти для этого функционала неупреждающий оператор, гарантирующий ему с необходимой точностью значение не хуже W_*.

Такой оператор строится методом динамического программирования: склеиванием операторов, близких к оптимальным в специально подобранных задачах на меньших промежутках времени. Для этого функционал c раскладывается в сумму (5.10). Последняя строка этой суммы имеет вид выражения в квадратных скобках из (3.9). Теперь замечание 3.3 позволяет подобрать на промежутке $[\tau_{k-1},\tau_k[$ такой неупреждающий оператор, для реализаций которого последняя строка в (5.10) оценивается функцией от реализовавшейся в момент τ_{k-1} позиции. Равномерность предела для W_λ позволяет оценить уже эту функцию так, чтобы к последней строке получившейся оценки (5.11) вновь было применимо замечание 3.3. Повторяя эту процедуру еще $k-1$ раз, получаем нужную оценку.

Предложение 5.1. *Пусть имеет место равномерный по $\omega \in \Omega$ предел*

$$W_*(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\lambda\to+0} \sup_{\zeta\in\mathbb{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))} w_\lambda(z).$$

Тогда

$$W_*(\omega) \le \liminf_{T\to+\infty} \sup_{\zeta\in\mathbb{A}} \inf_{z\in Z(\omega,\zeta(\omega))} v_T(z),$$

более того, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\bar{T} > 0$, что при всяком $T > \bar{T}$ для некоторого неупреждающего оператора $\zeta \in \mathbb{A}$ для всякой его реализации $z \in Z(Gr\,\zeta)$ выполнено $v_T(z) > W_*(z(0)) - \varepsilon$.

Доказательство. **Шаг 1.** *Выбор констант и вспомогательные оценки.* Рассмотрим произвольное натуральное число $k > 1$, тогда найдется такое число $M > 1$, для которого $k = M\ln M$. Найдется $T_k > 1$, что для всех $\lambda', \lambda'' < \frac{M}{T_k}$

$$\left|W_{\lambda'}(\omega) - W_{\lambda''}(\omega)\right| < \frac{1}{k^2} \quad \forall\omega\in\Omega. \tag{5.1}$$

Для доказательства достаточно показать, что для каждого $T > T_k$ при некотором неупреждающем операторе $\zeta^T \in \mathbb{A}$ у всякой его реализации $z \in Z(Gr\,\zeta^T)$

$$v_T(z) > W_*(z(0)) - \frac{2}{M} - \frac{2}{k}. \tag{5.2}$$

Зафиксируем $T > T_k$. Примем

$$p = e^{1/M},\ t_0 = \frac{T(1-e^{-1/M})}{1-\frac{1}{M}},\ \lambda = \frac{1}{Mt_0}, \tau_0 = 0,$$
$$t_i = t_0 p^{-i},\ \tau_i = \tau_{i-1} + t_i \qquad \forall i \in \overline{1,k}.$$

Отметим, что $t_0 > 0$ в силу $M > 1$. Заметим, что t_i образуют монотонно убывающую геометрическую прогрессию, τ_i – их частичные суммы, и

$$p^k = e^{\ln M} = M,\ \tau_k = t_0\frac{1-p^{-k}}{1-p} = \frac{T(1-e^{-1/M})}{1-\frac{1}{M}}\cdot\frac{1-\frac{1}{M}}{1-e^{-1/M}} = T.$$

Кроме того, поскольку $1-\frac{1}{M} < e^{-1/M} < 1-\frac{1}{M}+\frac{1}{2M^2}$, то есть $1-\frac{1}{2M} < < M(1-e^{-1/M}) < 1$, выполнены

$$1-\frac{1}{M} < \lambda T = \frac{T}{Mt_0} = \frac{1-\frac{1}{M}}{M(1-e^{-1/M})} < 1, \tag{5.3}$$

$$p^{-k} = e^{-\ln M} = \frac{1}{M},\ \lambda p^k = \lambda M = \frac{1}{t_0} \overset{(5.3)}{\leq} \frac{M}{T}. \tag{5.4}$$

Теперь из (5.4), для всех λp^i в качестве λ', λ'' выполнено (5.1).

Шаг 2. *Построение близкого к v_T функционала c.* Определим теперь на $]0,\tau_k] =]0,T]$ скалярную функцию s правилом:

$$s(t) = e^{-\lambda p^i(t-\tau_{i-1})}$$

для всех $t \in]\tau_{i-1},\tau_i]$.

Отметим, что на каждом таком промежутке $s(t) \leq 1$,

$$s(t) \geq s(\tau_i) = e^{-\lambda p^i(\tau_{i+1}-\tau_i)} = e^{-\lambda p^i t_i} = e^{-\lambda t_0} = p^{-1} > 1-\frac{1}{M}, \tag{5.5}$$

и в силу (5.3) показано, что

$$1 \geq \lambda T s(t) \geq \Big(1-\frac{1}{M}\Big)^2 \geq 1-\frac{2}{M} \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{5.6}$$

Рассмотрим игру с функцией платы

$$c(z) \triangleq \lambda\int_0^T s(t)g(z(t))dt + p^{-k}W_{\lambda p^{k-1}}(z(T)).$$

Заметим, что для любого процесса $z \in Z(\Omega)$ имеет место

$$v_T(z) = \frac{1}{T}\int_0^T g(z(t))dt \overset{(5.6)}{\geq} \int_0^T \lambda s(t)g(z(t))dt \overset{(5.4)}{\geq} c(z) - \frac{1}{M};$$

$$v_T(z) - \frac{2}{M} \leq \Big(1-\frac{2}{M}\Big)\frac{1}{T}\int_0^T g(z(t))dt \overset{(5.6)}{\leq} \int_0^T \lambda s(t)g(z(t))dt \leq c(z).$$

В частности, для любого процесса $z \in Z(\Omega)$ выполнено

$$|v_T(z) - c(z)| < \frac{2}{M}. \tag{5.7}$$

Шаг 3. *Построение неупреждающего оператора* ζ^*. Для каждого $i \in \overline{0, k-1}$ найдется неупреждающий оператор $\zeta_i \in \mathbb{A}$, $1/k^2$-оптимальный для игры с критерием качества

$$w_{\lambda p^i}(z) - p^{-1} w_{\lambda p^i}(z_{t_{i+1}}) + p^{-1} W_{\lambda p^i}(z(t_{i+1})).$$

Поскольку $p = e^{\lambda t_0} = e^{\lambda p^i t_{i+1}}$, а функция цены этой игры совпадает с $W_{\lambda p^i}$, то для всех $z \in Z(Gr\,\zeta_i)$

$$w_{\lambda p^i}(z) - p^{-1} w_{\lambda p^i}(z_{t_{i+1}}) + p^{-1} W_{\lambda p^i}(z(t_{i+1})) \geq W_{\lambda p^i}(z(0)) - \frac{1}{k^2}. \tag{5.8}$$

Более того, поскольку значение это игры не зависит от поведения игроков после момента t_{i+1}, то эта оценка имеет место помимо $z \in \in Z(Gr\,\zeta)$ также для любой склейки вида $z \diamond_{t_{i+1}} z'$. Тогда (5.8) также выполнено при всех $z \in Z(Gr\,\zeta_i \diamond_{t_{i+1}} \zeta')$ для всякого оператора $\zeta' \in \mathbb{A}$.

Покажем, что оператор

$$\zeta^* \stackrel{\triangle}{=} \zeta_0 \diamond_{\tau_1} \zeta_1 \diamond_{\tau_2} \cdots \diamond_{\tau_{i-1}} \zeta_{i-1} \diamond_{\tau_i} \cdots \diamond_{\tau_{k-1}} \zeta_{k-1} \in \mathbb{A}$$

гарантирует для всех своих процессов $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$

$$c(z) > W_*(z(0)) - \frac{2}{k}, \tag{5.9}$$

что вместе с (5.7) будет давать необходимую нам оценку (5.2).

Шаг 4. *Итерационная процедура.* Заметим, что для всякого $i \in \overline{0, k-1}$ имеем $e^{-\lambda p^i(\tau_{i+1} - \tau_i)} = p^{-1}$ в силу (5.5), откуда

$$\lambda \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} s(t) g(z_t) dt = \lambda \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{-\lambda p^i (t - \tau_i)} g(z(t))\, dt \stackrel{(3.7)}{=}$$
$$\stackrel{(3.7)}{=} p^{-i} w_{\lambda p^i}(z_{\tau_i}) - p^{-i-1} w_{\lambda p^i}(z_{\tau_{i+1}}).$$

Теперь, складывая по всем промежуткам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, имеем

$$\begin{array}{rcl} c(z) = w_\lambda(z) - p^{-1} w_\lambda(z_{\tau_1}) & + & \\ +p^{-1} w_{\lambda p}(z_{\tau_1}) - p^{-2} w_{\lambda p}(z_{\tau_2}) & + & \ldots \\ +p^{-i} w_{\lambda p^i}(z_{\tau_i}) - p^{-i-1} w_{\lambda p^i}(z_{\tau_{i+1}}) & + & \ldots \\ +p^{-k+1} w_{\lambda p^{k-1}}(z_{T - t_{k-1}}) - p^{-k} w_{\lambda p^{k-1}}(z_T) & + & p^{-k} W_{\lambda p^{k-1}}(z(T)) \end{array} \tag{5.10}$$

Отметим, что $z_{\tau_k} \in Z(Gr\,\zeta_{k-1})$, тогда для него выполнено (5.8), то есть

$$\begin{aligned} w_{\lambda p^{k-1}}(z_{\tau_{k-1}}) \ &- \\ -p^{-1}w_{\lambda p^{k-1}}(z_{\tau_k}) \ &+ \ p^{-1}W_{\lambda p^{k-1}}(z(\tau_k)) \geq W_{\lambda p^{k-1}}(z(\tau_{k-1})) - 1/k^2. \end{aligned}$$

Тогда значение строки (5.10) не менее $p^{-k+1}W_{\lambda p^{k-1}}(z(\tau_{k-1}))-p^{-k+1}/k^2$, в силу (5.1) это не хуже, чем

$$p^{-k+1}W_{\lambda p^{k-2}}(z(\tau_{k-1})) - 2/k^2.$$

Теперь, для всякого процесса $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$ имеем

$$\begin{aligned} c(z) \geq w_\lambda(z) - p^{-1}w_\lambda(z_{\tau_1}) \ &+ \\ +p^{-1}w_{\lambda p}(z_{\tau_1}) - p^{-2}w_{\lambda p}(z_{\tau_2}) \ &+ \ \ldots \\ +p^{-i}w_{\lambda p^i}(z_{\tau_i}) - p^{-i-1}w_{\lambda p^i}(z_{\tau_{i+1}}) \ &+ \ \ldots \\ +p^{-k+2}w_{\lambda p^{k-2}}(z_{t_{k-2}}) - p^{-k+1}w_{\lambda p^{k-2}}(z_{t_{k-1}}) \ &+ \ p^{-k+1}W_{\lambda p^{k-2}}(z(\tau_{k-1})) - 2/k^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Отметим, что $z_{\tau_{k-2}} \in Z(Gr\,\zeta_{k-2} \diamond_{t_{k-1}} \zeta_{k-1})$, тогда для него выполнено (5.8), то есть

$$\begin{aligned} w_{\lambda p^{k-2}}(z_{\tau_{k-2}}) \ &- \\ -p^{-1}w_{\lambda p^{k-2}}(z_{\tau_{k-1}}) \ &+ \ p^{-1}W_{\lambda p^{k-2}}(z(\tau_k)) \geq W_{\lambda p^{k-2}}(z(\tau_{k-2})) - 1/k^2. \end{aligned}$$

Теперь значение последней строки в (5.11) не менее $p^{-k+2}W_{\lambda p^{k-2}}(\tau_{k-2}) - p^{-k+2}/k^2 - 2/k^2$, то есть не менее $p^{-k+2}W_{\lambda p^{k-3}}(\tau_{k-2}) - 4/k^2$. Таким образом, для всякого процесса $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$ имеем

$$\begin{aligned} c(z) \geq w_\lambda(z) - p^{-1}w_\lambda(z_{\tau_1}) \ &+ \\ +p^{-1}w_{\lambda p}(z_{\tau_1}) - p^{-2}w_{\lambda p}(z_{\tau_2}) \ &+ \ \ldots \\ +p^{-i}w_{\lambda p^i}(z_{\tau_i}) - p^{-i-1}w_{\lambda p^i}(z_{\tau_{i+1}}) \ &+ \ \ldots \\ +p^{-k+3}w_{\lambda p^{k-3}}(z_{t_{k-3}}) - p^{-k+2}w_{\lambda p^{k-3}}(z_{t_{k-2}}) \ &+ \ p^{-k-2}W_{\lambda p^{k-3}}(z(\tau_{k-2})) - 4/k^2. \end{aligned}$$

Аналогично, поскольку (при всех $l \in \overline{i, k-3}$) имеет место $z_{\tau_l} \in Z(Gr\,\zeta_l \diamond_{t_{l+1}} \zeta')$ для некоторого $\zeta' \in \mathbb{A}$, то для z_{τ_l} выполнено (5.8), в силу (5.1) имеем

$$\begin{aligned} c(z) \geq w_\lambda(z) - p^{-1}w_\lambda(z_{\tau_1}) \ &+ \\ +p^{-1}w_{\lambda p}(z_{\tau_1}) - p^{-2}w_{\lambda p}(z_{\tau_2}) \ &+ \ \ldots \\ +p^{-l}w_{\lambda p^l}(z_{\tau_l}) - p^{-l-1}w_{\lambda p^l}(z_{\tau_{l+1}}) \ &+ \ p^{-l-1}W_{\lambda p^{l-1}}(z(\tau_{l+1})) - 2(k-l)/k^2. \end{aligned}$$

В частности, для момента времени τ_1 у всякого $z \in Z(Gr\,\zeta^*)$

$$c(z) \geq w_\lambda(z) - p^{-1}w_\lambda(z_{\tau_1}) + p^{-1}W_*(z(\tau_1)) - 2(k-1)/k^2.$$

Теперь из (5.8) следует

$$c(z) \geq W_*(z(0)) - \frac{2}{k},$$

то есть (5.9) для всех $T > T_k$. □

6. Собственно доказательство теоремы

Введем функцию $g^- = 1 - g$, а с ней и соответствующие v_T^-, w_λ^-. Введем также множества $\mathbb{B}^- \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{A}$, $\mathbb{A}^- \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{B}$ и операции над ними. Легко видеть, что из $g + g^- \equiv 1$ следует для всех $T, \lambda > 0, \omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} v_T(z) + v_T^-(z) \equiv 1, &\qquad w_\lambda(z) + w_\lambda^-(z) \equiv 1, \\ \sup_{\zeta^- \in \mathbb{A}^-} \inf_{z \in Z(\omega, \zeta^-(\omega))} v_T^-(z) &\equiv 1 - \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega, \xi(\omega))} v_T(z), \\ \sup_{\zeta^- \in \mathbb{A}^-} \inf_{z \in Z(\omega, \zeta^-(\omega))} w_\lambda^-(z) &\equiv 1 - \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega, \xi(\omega))} w_\lambda(z). \end{aligned}$$

Применяя теперь предложения 4.1, 5.1 для игры с $1 - g^-$ получаем:

Предложение 6.1. *Пусть имеет место равномерный по $\omega \in \Omega$ предел*

$$V_*(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{T \to +\infty} \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega, \xi(\omega))} v_T(z).$$

Тогда $V_*(\omega) \geq \limsup_{\lambda \to +0} \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega, \xi(\omega))} w_\lambda(z)$.

Предложение 6.2. *Пусть имеет место равномерный по $\omega \in \Omega$ предел*

$$W_*(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\lambda \to +0} \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega, \xi(\omega))} w_\lambda(z).$$

Тогда $W_*(\omega) \geq \limsup_{T \to +\infty} \inf_{\xi \in \mathbb{B}} \sup_{z \in Z(\omega, \xi(\omega))} v_T(z)$.

Теперь одна часть доказательства теоремы следует из предложений 4.1, 6.1, а другая – из предложений 5.1, 6.2.

Отметим, что результат этой теоремы был анонсирован автором в [9,30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайцгори В.Г. *К вопросу об использовании метода усреднения в задачах управления* // Дифференциальные уравнения. 1986. № 11. С. 1876–1886.

2. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* М:Наука, 1985.

3. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. *Унификация дифференциальных игр. Обобщенные решения уравнений типа Гамильтона-Якоби. Стохастический поводырь* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1618–1668.

4. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. *Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре* // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т.17. № 2. С. 97—104.

5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М:Наука, 1974.

6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М:Наука, 1981.

7. Субботина Н.Н. *Сингулярные аппроксимации минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби* // Труды ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 190—208.

8. Субботина Н.Н. *Метод характеристик для уравнений Гамильтона—Якоби и его приложения в динамической оптимизации* // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20 С. 3–132.

9. Хлопин Д.В. *Теоремы тауберова типа для конфликтно-управляемых систем*// Тезисы докладов Международной конференции «Динамика систем и процессы управления»(SDCP-2014), посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Красовского, Екатеринбург, 15-20 сентября 2014. С. 204–206.

10. Ченцов А.Г. *Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения* // Дифференциальные уравнения. Т. 16. № 10. С. 1801–1808.

11. Ченцов А.Г. *К вопросу о соотношений различных версий метода программных итераций: позиционный вариант* // Кибернетика и системный анализ. 2002. N 3. С. 130–149.

12. Alvarez O., Bardi M. *Ergodic Problems in Differential Games.* In: Advances in dynamic game theory. Boston:Birkhäuser. 2007. P.131–152.

13. Alvarez O., Bardi M. *Ergodicity, stabilization, and singular perturbations for Bellman-Isaacs equations* // Mem. Am. Math. Soc. 2010. V. 960. P. 1–90.

14. Arisawa M. *Ergodic problem for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation II* // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. 1998. V. 15. N 1. P. 1–24.

15. Artstein Z. Bright I. *Periodic optimization suffices for infinite horizon planar optimal control* // SIAM J. Control Optim. 2010. V. 48. N 8. P.4963–4986.

16. Artstein Z., Gaitsgory V. *The value function of singularly perturbed control systems* // Appl. Math. Optim. 2000. V. 41. N 3. P. 425–445.

17. Bardi M. *On differential games with long-time-average cost.* In: Advances in dynamic games and their applications. Boston:Birkhäuser. 2009. P. 3–18.

18. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.* Boston:Birkhauser, 1997.

19. Blackwell D. *Discrete Dynamic programming* // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. N 2. P. 719–726.

20. Buckdahn R., Cardaliaguet P., Quincampoix M. *Some Recent Aspects of Differential Game Theory* // Dyn. Games Appl. 2011. V. 1. N 1. P. 74–114.

21. Buckdahn R., Goreac D., Quincampoix M. *Existence of Asymptotic Values for Nonexpansive Stochastic Control Systems* // Applied Mathematics & Optimization. 2014. V. 70. N 1. P. 1–28.

22. Cardaliaguet P. *Ergodicity of Hamilton-Jacobi equations with a non coercive non convex Hamiltonian in* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. 1998. V. 27. N 3. P. 837–856.

23. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. *Optimal Control on Infinite Time Horizon.* Berlin:Springer, 1991.

24. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations.* Mathematics and its Applications, 542. Dordrecht:Kluwer, 2002.

25. Elliot R.J., Kalton N. *The Existence of Value for Differential Games* // Memoir of the American Mathematical Society. V. 126. American Mathematical Soc., 1972.

26. Evans L., Souganidis P.E. *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations* // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. P. 773–797.

27. Gaitsgory V. Quincampoix M. *On sets of occupational measures generated by a deterministic control system on an infinite time horizon* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2011. V. 88. P. 27–41.

28. Hardy G.H. *Divergent series.* Oxford:Oxford University Press, 1949.

29. Hardy G.H., Littlewood J.E. *Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive* // Proc. London Math. Soc. 1914. V. 13. P.174–191.

30. Khlopin D.V. *A uniform Tauberian theorem for abstract game* // Abstracts of the Fourth International School-Seminar “Nonlinear analysis and extremal problems”, June 22-28, 2014. P. 59.

31. Krasovskii N.N., Chentsov A.G. *On the design of differential games, I* // Probl. Control and Inform. Theory. 1977. V.6. N 5-6. P. 381–395.

32. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York:Springer-Verlag, 1988.

33. Lions P.-L., Papanicolaou G., Varadhan S.R.S. *Homogenization of Hamilton-Jacobi Equations*, unpublished work.

34. Mertens J.F., Neyman A. *Stochastic Games* // International Journal of Game Theory. 1981. V. 10. N 2. P.53–66.

35. Oliu-Barton M., Vigeral G. *A uniform Tauberian theorem in optimal control.* In: Advances in Dynamic Games. P. Cardaliaguet and R. Cressman (eds.), Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston:Birkhäuser, 2013. P. 199–215.

36. Quincampoix M., Renault J. *On the existence of a limit value in some non expansive optimal control problems* // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. N 5. P. 2118–2132.

37. Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // Journal Optimization Theory and Application. 1969. V. 3. N 3. P. 153–163.

38. Ryll-Nardzewski C. *A theory of pursuit and evasion.* In Advances in Game Theory (ed. M.Dresher, R.J.Aumann). Princeton University Press. 1964. P. 113–126.

39. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs.* Boston:Birkhauser. 1995.

40. Varaiya P.P. *On the existence of solutions to a differential game* // SIAM J. Control. 1967. V. 5. N 1. P. 153–162.

41. Vigeral G. *A zero-sum stochastic game with compact action sets and no asymptotic value* // Dynamic Games and Applications. 2013. V. 3. N 2. P. 172–186.

UNIFORM TAUBERIAN THEOREM IN DIFFERENTIAL GAMES

Dmitry V. Khlopin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc. (khlopin@imm.uran.ru); Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University (glukanat@mail.ru).

Abstract: The uniform Tauberian theorem for differential games with zero-sum is obtained. We investigated the asymptotic behaviour of value function of the game with Cesaro mean and Abel mean. Under the usual assumptions for dynamics system, we prove that uniform convergence of the first of them implies uniform convergence of the second of them to same limit. The dynamic programming principle was the cornerstone of proof.

Keywords: differential game with zero sum, Tauberian theorem, dynamic programming principle, Abel means, Cesaro means.