

УДК 519.86

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ТЕЛЕВИЗИОННОГО КОНКУРСА «ГОЛОС»*

ЕЛЕНА Н. КОНОВАЛЬЧИКОВА

Забайкальский государственный университет

672039, Чита, ул. Александро-Заводская, 30

e-mail: konovalchikova_en@mail.ru

ВЛАДИМИР В. МАЗАЛОВ

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

В работе представлена теоретико-игровая модель задачи наилучшего выбора с неполной информацией, в которой игроки (эксперты) осуществляют выбор объектов, качество которых состоит из двух компонент, образующих последовательность случайных величин (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Предполагается, что первая компонента качества известна игрокам, а вторая скрыта. Выбор объекта игроками осуществляется только на основании известной характеристики качества x_i . Цель игроков состоит в выборе объекта с суммарным качеством, большим чем у оппонента. Оптимальные стратегии найдены для независимых и зависимых значений качества объектов.

Ключевые слова: игра наилучшего выбора, неполная информация, пороговые стратегии, ТВ шоу «Голос».

1. Введение

В последнее время популярным телевизионным шоу по поиску талантов является вокальный конкурс «Голос». Согласно правилам конкурса нескольким экспертам необходимо набрать команду, состоящую из некоторого числа конкурсантов. Набор команд осуществляется на этапе так называемых «слепых прослушиваний». В процессе «слепых прослушиваний» эксперты оценивают только вокальные данные участников, внешность же участников и другие их качества скрыты от экспертов. Отсутствие визуального контакта экспертов с участниками прослушиваний усложняет процесс выбора. Если вокальные данные конкурсанта устраивают данного эксперта, он делает ему предложение вступить в команду. Аналогично действуют и другие эксперты. Конкурсант, получивший несколько предложений, имеет право выбрать одного из экспертов и участвовать в конкурсе под его руководством. По завершению набора команд конкурс переходит на следующий этап, на котором участники команд соревнуются между собою на выбывание. В результате выигрывает последний оставшийся участник, а победителем конкурса объявляется эксперт, в команду которого входил этот участник. На результат соревнований влияют как вокальные данные участников, так и их внешность. Также важным фактором победы экспертов является их репутация, которая имеет большое значение при выборе конкурсантами того или иного эксперта. Описанная выше модель конкурса представляет собой игру наилучшего выбора с неполной информацией.

Исследование задач наилучшего выбора является одним из важных направлений в теории игр и теории оптимальной остановки. Рассматриваемый класс задач имеет широкое применение при математическом моделировании в естественных, экономических и социальных науках. Впервые задача наилучшего выбора или задача о выборе наилучшего объекта была решена в 1961 году с помощью теории марковских процессов Е. Б. Дынкиным [1]. В зависимости от характера информации о наблюдаемом объекте можно выделить задачи наилучшего выбора с полной информацией [4–6], при отсутствии информации [8, 9] и неполной информацией [3, 7].

В данной работе рассмотрена многошаговая теоретико-игровая модель двух лиц наилучшего выбора с неполной информацией, в которой два игрока просматривают последовательность объектов (конкурсантов) с качеством, состоящим из двух параметров x и y . При этом, первый параметр качества поступает игрокам в явном виде, а второй скрыт от них. Например, в конкурсе «Голос» параметр x отвечает за вокальные данные конкурсанта, а параметр y – за внешние данные. Игрокам необходимо выбрать одного конкурсанта, основываясь только на известном параметре качества x . В процессе выбора игроки обладают равными правами, то есть, если оба игрока делают предложение одному и тому же конкурсанту, то конкурсанта выбирает с одинаковой вероятностью один из игроков. Победителем в данной игре объявляется тот из игроков, у которого сумма параметров качества выбранного конкурсанта больше, чем у другого. В работе [2] была исследована теоретико-игровая модель двух лиц наилучшего выбора, в которой один из игроков обладает приоритетом выбора относительно другого.

В рамках данной модели будет исследована игра наилучшего выбора, в которой качество объектов представлено последовательностью независимых одинаково распределенных на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$ случайных величин (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Затем будет рассмотрена игра наилучшего выбора, в которой параметры качества игроков представляют собой последовательность зависимых случайных величин, и сделано сравнение с независимым случаем.

2. Игра наилучшего выбора с неполной информацией

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим многошаговую игру Γ_n с неполной информацией следующего вида. Пусть два эксперта, являющиеся игроками в данной игре, одновременно просматривают некоторую последовательность конкурсанта. Игрокам необходимо выбрать в свою команду одного конкурсанта, основываясь только на его качестве. При этом, качество конкурсанта определяется двумя параметрами x и y , первый из которых соответствует вокальным данным конкурсанта, а второй – его внешним данным. Предположим, что параметры качества конкурсанта представляют собой последовательность независимых равномерно распределенных на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$ случайных величин

(x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Процесс просмотра конкурсантов организован таким образом, что первый параметр качества экспертам поступает в явном виде, а второй параметр – скрыт от них. Таким образом, игроки принимают решение о выборе или отказе от конкурсанта по известной им характеристике. Цель обоих игроков состоит в максимизации суммы параметров качества выбранного ими конкурсанта. В данной игре выигрывает тот игрок, у которого сумма параметров качества выбранного им конкурсанта больше, чем у его оппонента.

Опишем процесс выбора конкурсантов. На первом шаге оба эксперта наблюдают параметр качества x_1 из набора (x_1, y_1) первого конкурсанта и независимо друг от друга принимают решение о выборе или отказе от данного конкурсанта. Если первого конкурсанта выбрал один из экспертов, то этот эксперт останавливается, а второй эксперт продолжает выбор. Если оба эксперта сделали предложение первому конкурсанту, то конкурсант выбирает одного из экспертов с одинаковой вероятностью. В случае выбора конкурсанта одним из игроков скрытый параметр качества конкурсанта становится известным обоим игрокам, т.е. оба эксперта узнают суммарное значение качества $x_1 + y_1$. Оставшийся в игре эксперт стремится затем выбрать такого конкурсанта i ($i = 2, \dots, n$), у которого сумма параметров качества больше, чем у первого конкурсанта, то есть $x_i + y_i > x_1 + y_1$. В случае, когда оба игрока отвергают первого конкурсанта, игра переходит на следующий этап, и описанная выше процедура повторяется.

Оптимальные стратегии игроков в данной игре будем искать в классе пороговых стратегий вида: если параметр качества конкурсанта x_i больше некоторого значения u_i , эксперт выбирает данного конкурсанта, в противном случае отвергает его. В работе найдены оптимальные пороговые стратегии для игры с равноправными игроками, в которой число конкурсантов $n \geq 2$. Заметим, что в случае одного конкурсанта ($n = 1$) оба игрока делают ему предложение, то есть оптимальные пороги равны нулю. Конкурсант, в свою очередь, выберет одного из экспертов с одинаковой вероятностью. В силу симметрии выигрыши игроков будут равны нулю.

2.2. Игра с двумя конкурсантами

Предположим, что у экспертов есть возможность выбора из двух конкурсантов ($n = 2$). Стратегию выбора опишем в виде поро-

вых значений u и v для первого и второго экспертов, соответственно. Предположим, что $u \geq v$.

После получения наблюдения x_1 качества первого конкурсанта, первый эксперт делает данному конкурсанту предложение, если $x_1 \geq u$, а второй эксперт – при условии, что $x_1 \geq v$. Таким образом, в зависимости от параметра качества конкурсанта возможны следующие ситуации. Если параметр качества конкурсанта $x_1 < v$, то такого конкурсанта отвергают оба игрока. Конкурсанту с параметром качества $v \leq x_1 < u$ сделает предложение только второй эксперт. Если же параметр качества конкурсанта $x_1 \geq u$, то конкурсант получит предложение от обоих игроков и с одинаковой вероятностью выберет одного из них, при этом шансы игроков сохранятся и значение игры на следующем шаге равно нулю.

Таким образом, выигрыш первого игрока равен

$$\begin{aligned} H(u, v) &= E\{0 \cdot I_{\{x_1 \leq v\}} + 0 \cdot I_{\{x_1 \geq u\}} + P\{x_2 + y_2 \geq x_1 + y_1/v < x_1 < u\} - \\ &\quad - P\{x_2 + y_2 < x_1 + y_1/v < x_1 < u\}\} = \\ &= \int_v^u \left[\int_0^{1-x_1} \left[\left(2 \cdot \left(1 - \frac{(x_1 + y_1)^2}{2} \right) - 1 \right) dy_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{1-x_1}^1 \left(2 \cdot \frac{(2 - (x_1 + y_1))^2}{2} - 1 \right) dy_1 \right] dx_1 = \right. \\ &= \frac{u^4}{6} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + \frac{2u}{3} - \frac{v^4}{6} + \frac{v^3}{3} + \frac{v^2}{2} - \frac{2v}{3}, \end{aligned}$$

здесь I_A индикатор события A . Функция $H(u, v)$ является вогнутой по u и выпуклой по v , что гарантирует существование и единственность ситуации равновесия в данной игре. Из симметрии задачи следует, что оптимальные пороги обоих экспертов u^* и v^* равны и находятся из уравнения

$$\frac{2u^3}{3} - u^2 - u + \frac{2}{3} = 0,$$

откуда находим $u^* = v^* = \frac{1}{2}$.

Таким образом, оба эксперта при выборе конкурсантов используют одинаковую стратегию с пороговым значением, равным $\frac{1}{2}$. Следовательно, отбор пройдет тот конкурсант, оцениваемый параметр качества которого будет выше среднего. В силу симметрии значение игры Γ_2 равно нулю.

2.3. Игра с тремя конкурсантами

Допустим, что в конкурсе участвуют три вокалиста ($n = 3$). Аналогично предыдущему случаю стратегии выбора обоих игроков имеют пороговый вид. Пусть u_2 и v_2 – пороговые значения, устанавливаемые первым и вторым игроком при выборе первого конкурсанта, соответственно. Предположим, что $u_2 \geq v_2$.

Таким образом, при выборе первого конкурсанта с известным параметром качества x_1 возможны следующие ситуации. Конкурсант с параметром качества $x_1 < v_2$ не удовлетворяет требованиям обоих экспертов, поэтому игра Γ_3 переходит к стадии Γ_2 , в которой оба эксперта устанавливают равные пороги выбора $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$, и значение игры равно нулю.

Если параметр качества x_1 первого конкурсанта удовлетворяет условию $v_2 \leq x_1 < u_2$, то данный конкурсант получит предложение только от второго эксперта. После этого скрытый параметр качества y_1 становится известным обоим игрокам. Второй эксперт прекращает выбор со значением $x_1 + y_1 = m$, а первый эксперт получает возможность выбора из двух оставшихся конкурсантов при известном значении m . Задача первого эксперта – выбрать конкурсанта i , суммарное качество которого удовлетворяет условию $x_i + y_i > m$ ($i = 2, 3$). Для этого на втором шаге первый эксперт устанавливает новый порог выбора $s = s(m)$: если $x_2 \geq s$, то он принимает данного конкурсанта, в противном случае отвергает его. Найдем оптимальное значение порога s .

Если $m < 1$, то выигрыш первого игрока равен

$$\begin{aligned} & E\{P\{x_3 + y_3 \geq m/x_2 < s\} - P\{x_3 + y_3 < m/x_2 < s\} + \\ & + P\{x_2 + y_2 \geq m\}/x_2 \geq s\} + P\{x_2 + y_2 < m\}/x_2 \geq s\}\} = \\ & = \int_0^s (1-m^2) dx_2 + \int_s^m (1-2 \cdot (m-x_2)) dx_2 + \int_m^1 dx_2 = 1-m^2-s^2+s \cdot m \cdot (2-m). \end{aligned}$$

Максимум выигрыша достигается при $s = m - \frac{m^2}{2}$ и равен $1 - m^3 + \frac{m^4}{4}$. Следовательно, оптимальный порог выбора конкурсанта первым экспертом при $m < 1$ имеет вид

$$s = m - \frac{m^2}{2}.$$

Пусть $m \geq 1$. Заметим, что в этом случае пороговое значение $s \leq 1$. Найдем значение оптимального порога из условия равенства выигрышей при выборе и отказе от конкурсанта. Предположим, что на втором шаге первый эксперт получает наблюдение $x_2 = s$. Если первый эксперт отказывается второму конкурсанту и выбирает третьего конкурсанта, то его выигрыш равен

$$1 \cdot P\{x_3 + y_3 \geq m\} - 1 \cdot P\{x_3 + y_3 < m\} = (2 - m)^2 - 1.$$

Если же он принимает второго конкурсанта, то его выигрыш равен

$$\begin{aligned} & 1 \cdot P\{s + y_2 \geq m\} - 1 \cdot P\{s + y_2 < m\} = \\ & = \begin{cases} 1 - 2 \cdot (m - s), & s \geq m - 1, \\ -1, & s < m - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

При $s \geq m - 1$ оптимальный порог является решением уравнения

$$(2 - m)^2 - 1 = 1 - 2 \cdot (m - s),$$

Откуда находим оптимальное значение $s = 1 - m + \frac{m^2}{2}$.

Таким образом, оптимальный порог для выбора имеет вид

$$\underline{s} = m - \frac{m^2}{2}, \text{ при } m < 1$$

и

$$\bar{s} = 1 - m + \frac{m^2}{2}, \text{ при } m \geq 1.$$

Теперь можно записать выигрыш первого эксперта на первом шаге

$$H(u_2, v_2) = \int_0^{v_2} 0 \cdot dx_1 + \int_{u_2}^1 0 \cdot dx_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{v_2}^{u_2} dx_1 \left[\int_0^{1-x_1} dy_1 \int_0^{\underline{s}} dx_2 + \int_{1-x_1}^1 dy_1 \int_0^{\bar{s}} dx_2 \right] (2 \cdot P\{x_3 + y_3 \geq x_1 + y_1\} - 1) + \\
 & + \int_{v_2}^{u_2} dx_1 \left[\int_0^{1-x_1} dy_1 \int_{\underline{s}}^1 dx_2 + \int_{1-x_1}^1 dy_1 \int_{\bar{s}}^1 dx_2 \right] [2 \cdot P\{x_2 + y_2 \geq x_1 + y_1\} - 1].
 \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$H(u_2, v_2) = \int_{v_2}^{u_2} \left[\frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^3}{6} - x_1^2 - \frac{3x_1}{4} + \frac{4}{5} \right] dx_1.$$

Функция $H(u_2, v_2)$ является вогнутой по u_2 и выпуклой по v_2 , поэтому в данной игре существует единственная ситуация равновесия. Из симметрии задачи следует, что оптимальные пороги u_2^* и v_2^* обоих экспертов равны и находятся из уравнения

$$\frac{u_2^4}{4} + \frac{u_2^3}{6} - u_2^2 - \frac{3u_2}{4} + \frac{4}{5} = 0.$$

Решая данное уравнение, получаем оптимальные пороги для обоих игроков, которые имеют вид $u_2^* = v_2^* \approx 0.637$.

Таким образом, в игре Γ_3 оптимальная стратегия обоих экспертов на первом шаге имеет вид $u_2 = v_2 \approx 0.637$, а на втором шаге она равна $u_1 = v_1 = 0.5$. Заметим, что увеличение числа конкурсантов ведет к повышению к ним требований. Значение игры Γ_3 равно нулю.

2.4. Игра наилучшего выбора с n конкурсантами

Допустим, что в конкурсе участвуют n вокалистов. Оба игрока при выборе конкурсантов руководствуются пороговыми стратегиями вида: если известный параметр качества конкурсанта выше или равен некоторого порогового значения, установленного игроком на данном этапе игры, то игрок делает предложение претенденту. Конкурсант, получивший предложение от обоих игроков, выбирает одного из игроков с вероятностью $\frac{1}{2}$. Из симметрии задачи следует, что значение игры $H_n = 0$, и оптимальные пороги игроков совпадают.

Предположим, что второй эксперт уже сделал выбор, и сумма параметров качества выбранного им кандидата равна m . Обозначим

ожидаемый выигрыш первого эксперта в случае, если для выбора еще доступны n кандидатов, $H_n(m)$. Найдем оптимальный порог для выбора кандидата с параметрами качества (x_1, y_1) . Пусть s_n – некоторое значение искомого порога выбора. Тогда, если $x_1 < s_n$, первый эксперт отказывает претенденту и переходит на следующий шаг, где оптимальный выигрыш равен $H_{n-1}(m)$. Если $x_1 \geq s_n$, первый эксперт выбирает наблюдаемого претендента и он выигрывает у второго эксперта только в том случае, если $x_1 + y_1 \geq m$. Таким образом, уравнение оптимальности имеет вид

$$H_n(m) = E\{H_{n-1}(m) \cdot I_{\{x_1 < s_n\}} + P\{x_1 + y_1 \geq m/x_1 \geq s_n\} - \\ - P\{x_1 + y_1 < m/x_1 \geq s_n\}\}.$$

Возможны два случая: $m < 1$ и $m \geq 1$. Если $m < 1$ уравнение оптимальности имеет вид

$$H_n(m) = H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2m + 2x_1) dx_1 + \int_m^1 dx_1.$$

Уравнение оптимальности при $m \geq 1$ ($s_n \leq 1$) примет вид

$$H_n(m) = H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^1 (1 - 2m + 2x_1) dx_1.$$

Оптимальный порог s_n выберем из условия равенства выигрыша при выборе претендента с качеством $x_1 = s_n$ и выигрыша при продолжении процесса выбора. Оптимальное значение s_n находится из уравнения

$$2 \cdot P\{s_n + y_1 \geq m\} - 1 = H_{n-1}(m),$$

решая которое получаем

$$s_n = m - \frac{1 - H_{n-1}(m)}{2}.$$

Таким образом, выигрыш первого эксперта в случае, когда второй эксперт уже сделал выбор конкурсанта с качеством m , имеет вид

$$H_n(m) = \begin{cases} H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2m - 2x_1) dx_1 + 1 - m, & m < 1, \\ H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^1 (1 - 2m - 2x_1) dx_1, & m \geq 1, \end{cases}$$

где порог

$$s_n = m - \frac{1 - H_{n-1}(m)}{2}.$$

Вернемся к исходной задаче, когда никто их экспертов еще не сделал выбор. Предположим, что эксперты установили пороги u и v . Пусть $u \geq v$ и для выбора доступны n кандидатов. Функция выигрыша в данной игре имеет вид

$$\begin{aligned} H_n(u, v) = & \int_0^v 0 \cdot dx_1 + \int_u^1 0 \cdot dx_1 + \\ & + \int_v^u \left[\int_0^{1-x_1} \left[H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot s_n + \int_{s_n}^{x_1+y_1} (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 1 - (x_1 + y_1) \right] dy_1 + \int_{1-x_1}^1 [H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot s_n + \right. \\ & \left. + \int_{s_n}^1 (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 \right] dy_1 \right] dx_1. \end{aligned}$$

Игра с функцией выигрыша $H(u, v)$ является вогнуто-выпуклой. Оптимальные пороги обоих игроков совпадают и находятся из уравнения

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-u^*} \left[H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 + 1 - (x_1 + y_1) \right] dy_1 + \\ & + \int_{1-u^*}^1 \left[H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot s_n + \int_{s_n}^1 (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 \right] dy_1 = 0. \end{aligned}$$

В следующей таблице представлены оптимальные пороговые стратегии выбора первого из n кандидатов, где $n \leq 6$.

Таблица 1. Оптимальные пороговые стратегии выбора из шести кандидатов

n	2	3	4	5	6
u^*, v^*	0.5	0.637	0.711	0.757	0.790

3. Игра наилучшего выбора с зависимыми параметрами качества конкурсантов

3.1. Вид зависимости

Рассмотрим многошаговую игру Γ_n с зависимыми параметрами качества, а именно, предположим, что совместное распределение случайных величин (x_i, y_i) для любого $i = 1, \dots, n$ имеет плотность вида

$$p(x_i, y_i) = 1 + k \cdot (1 - 2x_i) \cdot (1 - 2y_i)$$

на множестве $[0, 1] \times [0, 1]$. Заметим, что маргинальные распределения обеих случайных величин являются равномерными, в то же время они зависимы и коэффициент корреляции равен $\frac{k}{3}$.

Процесс выбора конкурсантов организован аналогичным образом как и в случае, когда качества конкурсантов были независимы. Оптимальные стратегии игроков будем искать в классе пороговых стратегий вида: если параметр качества конкурсанта x_i больше или равен некоторому значению u_i , игрок выбирает данного конкурсанта, в противном случае переходит на следующий шаг игры. Если конкурсант один, то оптимальные пороги равны нулю, также как и значение игры. Далее найдем оптимальные пороговые стратегии для игры, в которой число конкурсантов $n \geq 2$.

3.2. Игра Γ_2 с зависимыми параметрами качества конкурсантов

Допустим, что в игре экспертам необходимо выбрать из двух конкурсантов ($n = 2$). Обозначим пороги их стратегий соответственно u и v , и предположим, что $u \geq v$. Функция выигрыша примет вид

$$\begin{aligned} H(u, v) &= E\{0 \cdot I_{\{x_1 \leq v\}} + 0 \cdot I_{\{x_1 \geq u\}} + P\{x_2 + y_2 \geq x_1 + y_1/v < x_1 < u\} - \\ &\quad - P\{x_2 + y_2 < x_1 + y_1/v < x_1 < u\}\} = \\ &= \int_v^u \left[\int_0^{1-x_1} [1 - 2 \cdot P\{x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1\}] \cdot p(x_1, y_1) dy_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1-x_1}^1 [1 - 2 \cdot P\{x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1\}] \cdot p(x_1, y_1) dy_1 \right] dx_1. \end{aligned}$$

В Приложении приведены выкладки для вычисления вероятности события $P\{x_2 + y_2 \leq m\}$. Показано, что при $m < 1$

$$P\{x_2 + y_2 \leq m\} = \frac{1}{6} \cdot m^2 (3 + k(m^2 - 4m + 3)).$$

Если же $m \geq 1$, то

$$P\{x_2 + y_2 \geq m\} = 1 - \frac{1}{6} \cdot (m - 2)^2 (k \cdot (m^2 - 1) + 3).$$

Подставляя найденные значения вероятностей, получим

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_v^u \left[\int_0^{1-x_1} \left(1 - \frac{1}{3}(x_1 + y_1)^2 (k(x_1 + y_1 - 3)(x_1 + y_1 - 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3) \right) \cdot p(x_1, y_1) dy_1 + \int_{1-x_1}^1 \left(\frac{1}{3}((x_1 + y_1 - 2)^2 (k(x_1 + y_1 - 1)(x_1 + y_1 + 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3) - 1) \cdot p(x_1, y_1) dy_1 \right] dx_1 = \\ &= \int_v^u \left[-\frac{1}{90} \cdot (2x_1 - 1) \cdot (k^2 \cdot (4x_1^6 - 12x_1^5 - 30x_1^4 + 80x_1^3 - 30x_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - 12x_1 + 1) + 3k \cdot (8x_1^4 - 16x_1^3 + 2x_1^2 + 6x_1 + 3) + 30 \cdot (-x_1^2 + x_1 + 2) \right] dx_1. \end{aligned}$$

Можно показать, что функция $H(u, v)$ является вогнутой по u и выпуклой по v , что гарантирует существование и единственность ситуации равновесия в данной игре. Оптимальные пороги $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$.

3.3. Игра Γ_n с зависимыми параметрами качества конкурсантов

Пусть в конкурсе участвуют n претендентов. Оба эксперта при выборе конкурсантов используют пороговые стратегии. Конкурсант, получивший предложение от обоих экспертов, выбирает одного из них с одинаковой вероятностью.

Обозначим H_n значение игры, если в конкурсе участвуют n конкурсантов. Из симметрии задачи следует, что $H_n = 0$, и основная задача – определить оптимальные стратегии.

Предположим, что второй эксперт уже выбрал конкурсанта, сумма параметров качества которого равна m , и в конкурсе остается участвовать n конкурсантов. В этом случае задача первого эксперта – выбрать такого конкурсанта i , у которого сумма параметров качества будет удовлетворять условию $x_i + y_i \geq m$. Обозначим ожидаемый выигрыш первого эксперта в этом случае $H_n(m)$.

Оптимальный порог на первом шаге s_n найдем, как и раньше, из условия равенства выигрыша при остановке

$$(-1) \cdot P\{x_1 + y_1 < m\} + 1 \cdot P\{x_1 + y_1 \geq m\} = 1 - 2(m - x_1)$$

и продолжении выбора $H_{n-1}(m)$. Отсюда

$$s_n = m - \frac{1 - H_{n-1}}{2}.$$

Уравнение оптимальности имеет вид

$$H_n(m) = E\{H_{n-1}(m) \cdot I_{\{x_1 < s_n\}} + P\{x_1 + y_1 \geq m/x_1 \geq s_n\} - P\{x_1 + y_1 < m/x_1 \geq s_n\}\}.$$

Если $m < 1$, то

$$H_n(m) = H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2 \cdot (m - x_1)) dx_1 + 1 - m.$$

Если же $m \geq 1$, то уравнение оптимальности преобразовывается в следующее:

$$H_n(m) = H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2(m - x_1)) dx_1.$$

Таким образом, выигрыш первого эксперта при условии, что второй эксперт выбрал конкурсанта с суммарным качеством, равным m , и в конкурсе еще участвуют n претендентов, имеет вид

$$H_n(m) = \begin{cases} H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2 \cdot (m - x_1)) dx_1 + 1 - m, & m < 1, \\ H_{n-1}(m) \cdot s_n + \int_{s_n}^m (1 - 2(m - x_1)) dx_1 & m \geq 1, \end{cases}$$

где порог выбора равен

$$s_n = m - \frac{1 - H_{n-1}(m)}{2}.$$

Обозначим порог $s_n(m) = \underline{s}_n$ при $m < 1$, а при $m \geq 1$ обозначим $s_n(m) = \bar{s}_n$.

Перейдем к нахождению равновесия в игре. Обозначим u и v пороги первого и второго экспертов соответственно. Пусть $u \geq v$.

Выигрыш первого игрока имеет вид

$$\begin{aligned} H_n(u, v) &= \int_0^v 0 \cdot dx_1 + \int_v^u \left[\int_0^{1-x_1} [H_{n-1}(m) \cdot \underline{s}_n + \right. \\ &+ \int_{\underline{s}_n}^m (1 - 2 \cdot (m - x_2)) dx_2 + 1 - m] dy_1 + \int_{1-x_1}^1 [H_{n-1}(m) \cdot \bar{s}_n + \\ &+ \int_{\bar{s}_n}^1 (1 - 2m + 2x_2) dx_2] dy_1 \Big] dx_1 + \int_u^1 0 \cdot dx_1 = \\ &= \int_v^u \left[\int_0^{1-x_1} \left[H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot \underline{s}_n + \int_{\underline{s}_n}^{x_1+y_1} (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 + \right. \right. \\ &+ 1 - (x_1 + y_1)] dy_1 + \int_{1-x_1}^1 [H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot \bar{s}_n + \\ &+ \left. \left. \int_{\bar{s}_n}^1 (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 \right] dy_1 \right] dx_1. \end{aligned}$$

Функция $H_n(u, v)$ является вогнуто-выпуклой по u и v , поэтому в данной игре существует единственная ситуация равновесия. Оптимальные пороги обоих экспертов совпадают и находятся из уравнения

$$\int_0^{1-u^*} \left[H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot \underline{s}_n + \int_{\underline{s}_n}^{x_1+y_1} (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2 + \right.$$

$$+1 - (x_1 + y_1)] dy_1 + \int_{1-u^*}^1 [H_{n-1}(x_1 + y_1) \cdot \bar{s}_n + \\ + \int_{\bar{s}_n}^1 (1 - 2(x_1 + y_1) + 2x_2) dx_2] dy_1 = 0.$$

Решая данное уравнение, получаем оптимальные пороги для обоих игроков, которые представлены в следующих таблицах для $n = 3$ и различных коэффициентов корреляции k .

Таблица 2. Оптимальные пороговые стратегии для различных коэффициентов корреляции k

k	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
u_2^*, v_2^*	0.92	0.84	0.76	0.70	0.66	0.637	0.62	0.61	0.61	0.60	0.60

Из таблицы видно, что при увеличении корреляции порог оптимальной стратегии убывает. В случае положительной корреляции это связано с тем, что если наблюдаемое значение первого компонента достаточно большое, то и второе значение с большой вероятностью также большое и шансы увеличиваются. Поэтому оптимальная стратегия предписывает меньшие значения порога, чем в случае независимых переменных. В случае большой отрицательной корреляции наоборот, при большом значении первого компонента, второй компонент с большой вероятностью примет небольшое значение, поэтому, для оптимального поведения следует больше рисковать и ждать кандидата с большим значением первого компонента.

4. Заключение

Рассмотрена игра двух лиц наилучшего выбора, связанная с телевизионным вокальным конкурсом «Голос». Найдены оптимальные стратегии игроков для зависимых и независимых наблюдений.

Заметим что в реальной игре число экспертов больше двух. В дальнейшем предполагается рассмотреть задачу, когда в конкурсе участвуют N вокалистов, и жюри состоит из K членов. Все игроки при выборе конкурсантов руководствуются пороговыми стратегиями вида: если известный параметр качества конкурсанта выше или равен некоторого порогового значения, установленного игроком на данном этапе игры, то игрок делает предложение данному претенденту.

Конкурсант, получивший предложение от нескольких игроков, выбирает одного из них с одинаковой вероятностью. В отличие от игры с двумя экспертами, где выигравший игрок получал $+1$ в случае выигрыша и -1 в случае проигрыша, здесь удобнее предположить, что в случае проигрыша игрок получает нуль. Тогда в силу симметрии выигрыши всех игроков в начале игры одинаковы и равны $H_{K,N} = 1/K$.

Предположим, что конкурс уже начался и находится в некоторой стадии, на которой осталось n конкурсанта, и выбор ведется k членами жюри. При этом, членам жюри известна информация о наилучшем из просмотренных кандидатов с общим значением качества m , $0 \leq m \leq 2$. Значение такой игры обозначим $H_{k,n}(m)$. Заметим, что $H_{K,N} = H_{K,N}(0)$.

Из симметрии задачи следует, что оптимальные стратегии игроков одинаковы и их максимальные выигрыши $H_{k,n}(m)$ совпадают, при этом $H_{k,n}(m) \leq 1/k$. Найти оптимальные стратегии можно из следующих соображений. Предположим, что $k-1$ игроков кроме одного (например, первого) используют одинаковые стратегии v . Профиль всех таких стратегий обозначим v^{k-1} . Найдем наилучший ответ первого игрока u и потребуем, чтобы он был равен v . Таким образом, уравнение оптимальности для значения игры в данном случае имеет вид

$$H_{k,n}(m) = Val\{H_{k,n}(u, v^{k-1}|m)\},$$

где функция выигрыша в данной игре с постоянной суммой имеет вид ($v \leq u$)

$$\begin{aligned} H_{k,n}(u, v^{k-1}|m) = & \int_0^v H_{k,n-1}(m) dx_1 + \int_v^u dx_1 \int_0^1 H_{k-1,n-1}(m \vee x_1 + y_1) dy_1 + \\ & + \int_u^1 dx_1 \left[\frac{1}{k} \int_{(m-x_1) \vee 0}^1 (1 - (k-1)H_{k-1,n-1}(x_1 + y_1)) dy_1 + \right. \\ & \left. + (1 - \frac{1}{k}) \int_0^1 H_{k-1,n-1}(m \vee x_1 + y_1) dy_1 \right], \end{aligned}$$

где обозначено $a \vee b = \max(a, b)$. Первое слагаемое соответствует случаю, когда все члены жюри отвергают кандидата и переходят на следующий шаг. Второй интеграл соответствует случаю, когда кто-то

из членов жюри, исключая первого, выбрал кандидата, а остальные продолжают выбор. При этом, возможно выбранный кандидат лучше, чем предыдущий, т.е. $x_1 + y_1 > m$. В противном случае, значение m процедуре сохраняется. Наконец, третий интеграл соответствует случаю, когда все члены жюри делают выбор, а конкурсант выбирает одного из них с вероятностью $1/k$. Находя максимум выигрыша по u и приравнивая значение максимума v , можно найти оптимальные стратегии на каждом шаге для жюри, состоящего из K экспертов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е.Б. *Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса* // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 2. С. 238–240.
2. Коновальчикова Е.Н. *Модель наилучшего выбора с неполной информацией* // Управление большими системами. 2015. Вып. 54. С. 114–133.
3. Ano K. *On a partial information multiple selection problem* // Game Theory and Application. 1998. V. 4. P. 1–10.
4. Enns E., Ferenstein E. *The horse game* // J. Oper. Res. Soc. Japan. 1985. V. 28. P. 51–62.
5. Gilbert J., Mosteller F. *Recognizing the maximum of a sequence* // J. Amer. Statist. Ass. 1966. V. 61. P. 35–73.
6. Mazalov V. *A game related to optimal stopping of two sequences of independent random variables having different distributions* // Mathematica Japonica. 1996. V. 43. P. 121–128.
7. Neumann P., Porosinski Z., Szajowski K. *On two person full-information best choice problem with imperfect observation* // Game Theory and Application. 1996. V. 2. P. 47–55.
8. Sakaguchi M., Mazalov V. *A non-zero-sum no-information best-choice game* // Mathematical Methods of Operations Research. 2004. V. 60. N 3. P. 437–451.

9. Szaajowski K. *On non-zero-sum game with priority in secretary problem* // *Mathematica Japonica*. 1992. V. 37. P. 415–426.

Приложение

Вычислим вероятность события $P\{x_2 + y_2 \leq m\}$. При $m < 1$, вероятность события $x_2 + y_2 \leq m$ находится как площадь заштрихованной области, изображенной на рис. 1(а):

$$\begin{aligned} P\{y_2 \leq m - x_2\} &= \int_0^m dx_2 \int_0^{m-x_2} p(x_2, y_2) dy_2 = \\ &= \int_0^m dx_2 \int_0^{m-x_2} (1 + k \cdot (1 - 2x_2) \cdot (1 - 2y_2)) dy_2 = \\ &= \int_0^m dx_2 \int_0^{m-x_2} (1 + k \cdot (1 - 2x_2) - 2y_2 k \cdot (1 - 2x_2)) dy_2 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot m^2 (3 + k(m^2 - 4m + 3)). \end{aligned}$$

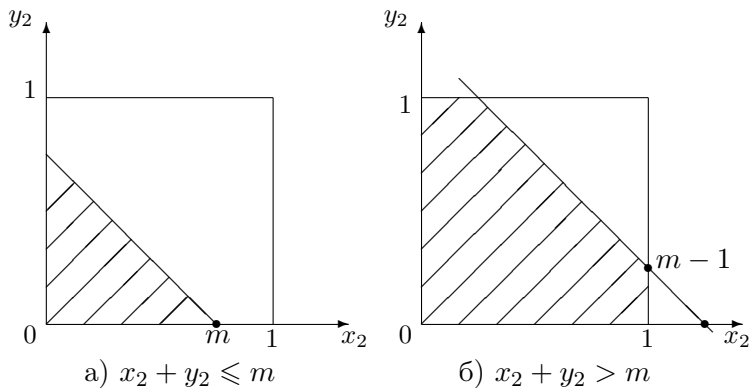


Рисунок 1.

Если же $m > 1$, то вероятность события $x_2 + y_2 \leq m$ находится аналогично, т.е.

$$P\{x_2 + y_2 \geq m\} = 1 - \int_{m-1}^1 dx_2 \int_{m-x_2}^1 p(x_2, y_2) dy_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \int_{m-1}^1 dx_2 \int_{m-x_2}^1 (1 + k \cdot (1 - 2x_2) \cdot (1 - 2y_2)) dy_2 = \\
&= 1 - \frac{1}{6} \cdot ((m-2)^2 (k \cdot ((m^2 - 1) + 3)) .
\end{aligned}$$

Область, удовлетворяющая неравенству $x_2 + y_2 \leq m$, изображена на рис. 1(б).

GAME-THEORETIC MODEL OF TV SHOW "THE VOICE"

Elena N. Konovalchikova, Transbaikal State University, Senior Teacher (konovalchikova_en@mail.ru).

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Dr.Sc., prof. (vmazalov@krc.karelia.ru).

Abstract: A game-theoretic model of two-person best-choice problem with non-complete information is proposed. The players (experts) observe a sequence of random vectors $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ where the value of the first component x_i is known and the second value y_i is hidden. In each stage player can accept the object or reject it. The choice have to made on the base of the value of the first component. A player with maximal value of the sum of the components is winner in the game. The optimal strategies are derived for the dependent and correlated components.

Keywords: best-choice game, incomplete information, threshold strategy, TV show "The Voice".