Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.2, с. 85–116

УДК 517.977.1
ББК 22.18

α-НАБОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИХ УНИФИКАЦИЯ

Владимир Н. Ушаков*
Сергей А. Брыкалов
Григорий В. Паршиков
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: ushak@imm.uran.ru, brykalov@imm.uran.ru,
grigory.parshikov@uran.ru

В статье вводятся α-наборы дифференциальных включений на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ и определяется α-слабо инвариантное множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ – фазовое пространство дифференциальных включений. Изучаются задачи, относящиеся к вопросу о возможности приведения движений (траекторий) дифференциальных включений из α-набора на заданное компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в момент времени ϑ. Обсуждаются проблемы, связанные с выделением множества разрешимости $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ в задаче о приведении движений α-набора на M и вычислением максимального α-слабо инвариантного множества $W^c \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Вводится понятие квазигамильтониана α-набора (α-гамильтониана), являющееся, на наш взгляд, важным при изучении задач о сближении движений α-набора с M.

Ключевые слова: дифференциальное включение, задача о сближении, гамильтониан, инвариантность, слабая инвариантность.

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

1. Введение

Работа включает в себя четыре раздела.

В разделе 2 вводятся α-наборы дифференциальных включений (α-наборы) на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, определяется α-слабо инвариантное множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ — фазовое пространство.

Изучаются две основные задачи, относящиеся к α-наборам:

1. Выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W всех позиций (t_*, x_*), из которых возможно сближение движений дифференциальных включений из α-набора с заданным множеством $M \subset \mathbb{R}^n$ в момент ϑ.

2. Выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ максимальное α-слабо инвариантное множество W^c, $W^c(\vartheta) \subset M$; здесь $W^c(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (\vartheta, x) \in W\}$.

Осуждаются проблемы, связанные с вычислением W и W^c. Точное вычисление или аналитическое описание W и W^c возможно лишь в редких случаях. Поэтому актуальны вопросы, связанные с приближенным вычислением W и W^c.

В разделе 2 представлена схема приближенного вычисления множества W.

В разделе 3 приводится схема приближенного вычисления множества W^c. В связи с этим вводится α-аппроксимирующая система множеств, отвечающая конечному разбиению промежутка времени $[t_0, \vartheta]$. Обосновывается сходимость аппроксимирующей системы множеств к W^c при шаге разбиения, стремящемся к нулю.

При выделении множеств W и W^c и их приближенном вычислении можно подменять α-наборы некоторыми другими наборами (стесненными аналогичными условиями), более удобными для теоретических исследований и проведения приближенных вычислений. Один из таких более удобных наборов может быть получен в результате унификации α-набора.

В разделе 4 описывается унификация α-набора, подобная унификации в дифференциальных играх [3, 4]. Для этого вводится квазигамильтониан α-набора (α-гамильтониан) — основной элемент унификационной конструкции.

Данная работа продолжает исследования Н.Н. Красовского и А.И. Субботина в области теории позиционных дифференциальных игр и обобщенных (минимаксных) решений уравнений Гамильтона-Якоби [7, 17]. В ней идея унификации распространена на задачи о сближении, в которых участвуют наборы дифференциальных включений, первоначально не связанных между собой какой-либо функцией, подобной гамильтониану.

Статья примыкает также к исследованиям [1, 2, 6–11, 18, 12–16, 19, 20].

2. α-набор дифференциальных включений на промежутке $[t_0, \vartheta]$

Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задан набор дифференциальных включений (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathcal{L}; \tag{2.1}$$

здесь $\mathcal{L}$ – некоторое множество.

Отображения $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x)$, $\alpha \in \mathcal{L}$ удовлетворяют следующим условиям:

A.1. Множество $F_\alpha(t, x)$ – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{L}$;

A.2. Для каждой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $\omega^*(\delta)$, $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, что

$$d(F_\alpha(t_*, x_*), F_\alpha(t^*, x^*)) \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \tag{2.2}$$

$$(t_*, x_*), (t^*, x^*) \in \Omega, \qquad \alpha \in \mathcal{L};$$

A.3. Для каждой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая константа $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$d(F_\alpha(t_*, x_*), F_\alpha(t_*, x^*)) \leqslant L\|x_* - x^*\|, \tag{2.3}$$

$$(t_*, x_*), (t_*, x^*) \in \Omega, \qquad \alpha \in \mathcal{L};$$

A.4. Найдется такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$h(F_\alpha(t, x), \{\mathbf{0}\}) \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \tag{2.4}$$

$$(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, \qquad \alpha \in \mathcal{L};$$

A.5. При любых $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{R}^n$ значение $\inf\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} h_{F_\alpha(t,x)}(l)$ достигается на некотором $\alpha_* \in \mathcal{L}$, зависящем, вообще говоря, от (t, x).

Здесь $d(F_*, F^*) = \max(h(F_*, F^*), h(F^*, F_*))$ – хаусдорфово расстояние между компактами F_* и F^* из $\mathbb{R}^n$; $h(F_*, F^*) = \max\limits_{f_* \in F_*} \min\limits_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$ – хаусдорфово отклонение F_* от F^*; $h_{F_*}(l) = \max\limits_{f_* \in F_*} \langle l, f_* \rangle$, $l \in \mathbb{R}^n$ – опорная функция компакта F_* из $\mathbb{R}^n$.

Прокомментируем кратко условия **A.1-A.5**.

Условия **A.1-A.4** обеспечивают выполнение для множества достижимости и интегральных воронок д.в. (2.1) ряда хороших топологических свойств (замкнутость, ограниченность в соответствующих евклидовых пространствах, непрерывную зависимость от начальных позиций, локально-липшицеву зависимость от фазовой компоненты начальных позиций). Условия **A.2**, **A.3** есть условия соответственно равностепенной непрерывности по (t, x) и равностепенной локальной липшицевости по x отображений $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x)$. Условие **A.4** есть условие подлинейного роста правой части д.в. (2.1) по x с одной и той же для всех $\alpha \in \mathcal{L}$ константой γ. Присущая условиям **A.2-A.4** равностепенность относительно $\alpha \in \mathcal{L}$ играет важную роль при обосновании сходимости аппроксимирующих систем множеств к W^c. Условие **A.5** есть чисто техническое условие, облегчающее рассуждения и выкладки.

Введем обозначения для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (2.1), определения которых хорошо известны (см., например, [5, 6, 12, 18, 19]).

Пусть $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $X_* \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Полагаем $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ – множество достижимости в момент t^* д.в. (2.1) с исходным множеством $(t_*, X_*) = \{(t_*, x_*) \colon x_* \in X_*\}$, $X_\alpha(t_*, X_*)$ – интегральная воронка д.в. (2.1) с исходным множеством (t_*, X_*).

В силу условий, наложенных на α-набор, множества $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ и $X_\alpha(t_*, X_*)$ – компакты в соответствующих евклидовых пространствах.

Пусть $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и M – компакт в $\mathbb{R}^n$.

Сформулируем следующую задачу.

Задача 2.1 Выяснить, существует ли для позиции (t_*, x_*) при каждом $\alpha \in \mathcal{L}$ такое движение $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(t_*) = x_*$ д.в. (2.1) на $[t_*, \vartheta]$, что $x_\alpha(\vartheta) \in M$.

Полагаем $W_\alpha = \{(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \colon X_\alpha(\vartheta, t_*, x_*) \cap M \neq \varnothing\}$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Тогда в терминах множеств W_α задача 2.1 заключается в выяснении для позиции (t_*, x_*) выполнения включения $(t_*, x_*) \in W = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} W_\alpha$.

С задачей 2.1, стало быть, тесно связана задача.

Задача 2.2 Выделить в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ множество W.

Множество W назовем множеством разрешимости задачи 2.1.

Учитывая сходимость при каждом $\alpha \in \mathcal{L}$ (в хаусдорфовой метрике) множеств $X_\alpha(\vartheta, t^{(k)}, x^{(k)})$ к $X_\alpha(\vartheta, t_*, x_*)$ при $(t^{(k)}, x^{(k)}) \to (t_*, x_*)$, $k \to \infty$, а также компактность множеств M и $X_\alpha(\vartheta, t^{(k)}, x^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что W – замкнутое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Также, учитывая условие **A.4**, можем указать ту ограниченную и замкнутую область $\bar{\Omega} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, для которой справедливо включение

$$W_\alpha \subset \bar{\Omega}, \qquad \text{при любом } \alpha \in \mathcal{L} \tag{2.5}$$

и, следовательно, $W \subset \bar{\Omega}$.

Полагаем, что область $\bar{\Omega}$ выбрана подобно тому, как это делалось, например, в работе [9] при выборе области D.

Уточним выбор области $\bar{\Omega}$. Он обусловлен размерами целевого множества M и константой $\gamma \in (0, \infty)$ в условии **A.4**.

В дополнение к γ зададим такое $\gamma_0 \in (0, \infty)$, что $h(M(\mathbf{0})) \leqslant \gamma_0$; здесь $\mathbf{0}$ — нуль в $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение замкнутую и ограниченную область $D = \{(t, x) \colon t \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, x \in B(\mathbf{0}; \gamma(t))\} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $B(\mathbf{0}; \gamma) = \{b \in \mathbb{R}^n \colon \|b\| \leqslant \gamma\}$, $\gamma(t) = (\gamma_0 + (t - t_0)\gamma)e^{\gamma(t - t_0)}$ при $t \in [t_0, \vartheta]$.

Область D есть интегральная воронка д.в. $\dfrac{dx}{dt} \in U(x) = B(\mathbf{0}; \gamma(1 + \|x\|))$ на $[t_0, \vartheta]$ с начальным множеством $D(t_0) = B(\mathbf{0}; \gamma_0)$. Из определения D следует, что $X_\alpha(t, t_0, M) \subset D(t)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

По области D сконструируем еще одну ограниченную и замкнутую область $\bar{\Omega}$ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ такую, что $\bar{\Omega}(t_0) = D(\vartheta)$ и $\bar{\Omega} \subset D \colon \bar{\Omega} = \{(t, x) \colon t \in [t_0, \vartheta], x \in B(\mathbf{0}, r(t))\}$, где $r(t) = (r_0 + (t - t_0)\gamma e^{\gamma(t - t_0)})$,

$r_0 = \gamma(\vartheta)$.

Из определения $\bar{\Omega}$ следует, что для любых $(t_*, x_*) \in \bar{\Omega}$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $\alpha \in \mathcal{L}$ и любого движения $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ д.в. (2.1) верно $(t, x(t)) \in \bar{\Omega}$, $t \in [t_0, \vartheta]$

Задав некоторое $\sigma \in (0, \infty)$, рассмотрим, наряду с $\bar{\Omega}$, ограниченную и замкнутую область

$$\Omega^* = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, \bar{\Omega}(t)_\sigma) \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n;$$

здесь $\bar{\Omega}(t)_\sigma$ – σ-окрестность множества $\bar{\Omega}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (t, x) \in \bar{\Omega}\}$.

Именно эту область Ω^* вместе с отвечающими ей константами $L = L(\Omega^*) \in (0, \infty)$ (условие **A.3**), $K = K(\Omega^*) > \max\{h(F_\alpha(t, x), \{\mathbf{0}\}),$ $\alpha \in \mathcal{L}, (t, x) \in \Omega^*\}$ и функцией $\omega^*(\delta)$ (условие **A.2**) будем применять в последующих рассуждениях.

Опишем метод решения задачи 2.2.

Для этого выберем позицию (t_0, x_0), $\alpha \in \mathcal{L}$ и движение $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(t_0) = x_0$ д.в. (2.1) на $[t_0, \vartheta]$.

Справедливо включение

$$\frac{dx_\alpha(t)}{dt} \in F_\alpha(t, x_\alpha(t)) \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.6}$$

где «п.в.» следует понимать как «почти всюду».

Наряду с «прямым» временем $t \in [t_0, \vartheta]$ введем «обратное» время $\tau = t_0 + \vartheta - t \in [t_0, \vartheta]$.

Поставим в соответствие дифференциальному включению (2.1) дифференциальное включение

$$\frac{dz}{d\tau} \in \mathcal{F}_\alpha(\tau, z), \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \tag{2.7}$$

отвечающее «обратному» времени τ; здесь $\mathcal{F}_\alpha(\tau, z) = -F_\alpha(t_0 + \vartheta - \tau, z)$, $(\tau, z) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Любым двум моментам t_* и t^* ($t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$) сопоставим моменты τ_* и τ^* ($t_0 \leqslant \tau^* < \tau_* \leqslant \vartheta$) по формулам $\tau_* = t_0 + \vartheta - t_*$, $\tau^* = t_0 + \vartheta - t^*$.

Движению $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(t_0) = x_0$ д.в. (2.1) сопоставим движение $z_\alpha(\tau)$, $z_\alpha(t_0) = z_0 = x_\alpha(\vartheta)$ д.в. (2.7), удовлетворяющее д.в.

$$\frac{dz_\alpha(\tau)}{d\tau} \in \mathcal{F}_\alpha(\tau, z_\alpha(\tau)) \quad \text{при п.в. } \tau \in [t_0, \vartheta]. \tag{2.8}$$

Переход от движения $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(t_0) = x_0$ к движению $z_\alpha(\tau)$, $z_\alpha(t_0) = z_0$ можно трактовать как представление движения $x_\alpha(t)$ в терминах «обратного» времени τ. Движения $x_\alpha(t)$ и $z_\alpha(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ связаны равенством

$$x_\alpha(t) = z_\alpha(\tau), \qquad t + \tau = t_0 + \vartheta, \qquad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{2.9}$$

В пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ позиций (τ, z) рассмотрим интегральную воронку $Z_\alpha = Z_\alpha(t_0, M)$ д.в. (2.7) с исходным множеством (t_0, M).

Множество W_α, $\alpha \in \mathcal{L}$ в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ позиций (t, x) связано с Z_α. равенствами

$$W_\alpha(t) = Z_\alpha(\tau), \qquad t + \tau = t_0 + \vartheta, \qquad t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.10}$$

а множество W разрешимости в задаче 2.1 связано с множеством $Z = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} Z_\alpha$ равенством

$$W(t) = Z(\tau), \qquad t + \tau = t_0 + \vartheta, \qquad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{2.11}$$

Видим, что вычисление множества разрешимости W в задаче 2.1 может быть сведено к вычислению интегральных воронок Z_α, $\alpha \in \mathcal{L}$ и последующему вычислению их пересечения – множества Z.

В реальности точное вычисление интегральных воронок Z_α, $\alpha \in \mathcal{L}$ или их эффективное аналитическое описание возможны в редких случаях. Поэтому множество Z, а, следовательно, и множество W мы можем вычислить лишь приближенно как пересечение $\tilde{Z} = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} \tilde{Z}_\alpha$ некоторых аппроксимаций $\tilde{Z}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{L}$ интегральных воронок Z_α,
$\alpha \in \mathcal{L}$. Алгоритмы, ориентированные на вычисление интегральных воронок Z_α, описаны, в частности, в работах [1, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 19].

Сформулируем вторую задачу, упомянутую во введении, касающуюся выделения в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ максимального α-слабо инвариантного множества W^c, $W^c(\vartheta) = M$.

В связи с этим напомним определение слабо инвариантного множества $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ относительно д.в. (2.1) [2, 6, 19].

Пусть Φ – замкнутое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) \neq \varnothing$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Определение 2.1. *Множество* Φ *называется слабо инвариантным относительно д.в.* (2.1), *если для любой позиции* $(t_*, x_*) \in \Phi$ *существует движение* $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(t_*) = x_*$ *д.в.* (2.1), *удовлетворяющее включению*

$$(t, x_\alpha(t)) \in \Phi, \qquad t \in [t_*, \vartheta]. \tag{2.12}$$

Определение 2.2. *Множество* Φ *назовем* α*-слабо инвариантным множеством, если оно слабо инвариантно относительно любого д.в.* (2.1).

В случае, когда множество $\mathcal{L}$ есть одноэлементное множество, получаем, что W является α-слабо инвариантным множеством.

Спрашивается, является ли в общем случае множество W α-слабо инвариантным множеством?

Как известно из теории позиционных дифференциальных игр [17], ответ на этот вопрос отрицателен.

Тогда возникает вопрос о способах выделения в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ максимального α-слабо инвариантного множества W^c, $W^c(\vartheta) \subset M$.

Из определения множества W^c следует, что W^c есть объединение всевозможных α-слабо инвариантных множеств $W \subset \bar{\Omega} \subset \Omega^*$, $W^c(\vartheta) \subset M$ и что W^c – замкнутое множество в $\bar{\Omega}$.

В следующем разделе приводится описание схемы, ориентированной на выделение множества W^c.

3. α-аппроксимирующая система множеств

Здесь дается определение α-аппроксимирующей системы множеств из $\mathbb{R}^n$, ориентированное на приближенное вычисление множества W^c.

Понятие α-аппроксимирующей системы множеств возникает при подмене схемы α-слабой инвариантности, отвечающей непрерывному времени, схемой α-слабой инвариантности, отвечающей дискретному времени.

А именно, промежуток $[t_0, \vartheta]$ подменяется разбиением $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \vartheta\}$ и множества $X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$, $\alpha \in \mathcal{L}$ из определения 2.2 (присутствующие неявно в определении) подменяются множествами $x_* + (t^* - t_*)F_\alpha(t_*, x_*) = \{x_* + (t^* - t_*)f \colon f \in F_\alpha(t_*, x_*)\}$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$.

Определения 2.1, 2.2 трансформируются при этом в определения, служащие целям формирования α-аппроксимирующих конструкций, отвечающих дискретному времени t_i, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Итак, пусть $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $X^* \subset \mathbb{R}^n$, $(t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta} = \{(\eta_*, \eta^*)\colon t_0 \leqslant \eta_* < \eta^* \leqslant \vartheta\} \subset [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$.

Полагаем

$$\begin{aligned} X_\alpha^{-1}(t_*, t^*, X^*) &= \{x_* \in \mathbb{R}^n\colon X_\alpha(t^*, t_*, x_*) \bigcap X^* \neq \varnothing\}, \\ \tilde{X}_\alpha(t^*, t_*, x_*) &= x_* + (t^* - t_*) F_\alpha(t_*, x_*), \\ \tilde{X}_\alpha^{-1}(t_*, t^*, X^*) &= \{x_* \in \mathbb{R}^n\colon \tilde{X}_\alpha(t^*, t_*, x_*) \bigcap X^* \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Приведем определение оператора α-поглощения целевого множества M в задаче 2.1 о сближении и в терминах этого оператора запишем определение 2.2 α-слабо инвариантного множества.

Определение 3.1. *Оператором α-поглощения в задаче 2.1 назовем отображение $a\colon \mathbf{\Delta} \times 2^{\mathbb{R}^n} \mapsto 2^{\mathbb{R}^n}$, заданное соотношением*

$$a(t_*, t^*, X^*) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{L}} X_\alpha^{-1}(t_*, t^*, X^*), \qquad (t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}, \quad X^* \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Определение 3.2. *Замкнутое множество $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ называется α-слабо инвариантным множеством, если*

$$\Phi(t_*) \subset a(t_*, t^*, \Phi(t^*)), \qquad (t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}. \quad (3.2)$$

При тех условиях, которым удовлетворяет α-набор, определения 2.2 и 3.2 эквивалентны. Значит, W^c есть максимальное из замкнутых множеств $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих включениям (3.2) и $\Phi(\vartheta) \subset M$.

Дадим определение аппроксимирующего оператора α-поглощения в задаче 2.1 и в терминах этого оператора определим α-аппроксимирующую систему множеств.

Определение 3.3. *Аппроксимирующим оператором α-поглощения в задаче 2.1 назовем отображение $\tilde{a}\colon \mathbf{\Delta} \times 2^{\mathbb{R}^n} \mapsto 2^{\mathbb{R}^n}$, заданное соотношением*

$$\tilde{a}(t_*, t^*, X^*) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{L}} \tilde{X}_\alpha^{-1}(t_*, t^*, X^*), \qquad (t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}, \quad X^* \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Зададим последовательность разбиений $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметрами $\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i = t_{i+1} - t_i\colon 0 \leqslant i \leqslant N(n)-1\} \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Отметим, что моменты t_i разбиений Γ_n – свои для каждого Γ_n; однако, чтобы не усложнять обозначения, эту зависимость моментов t_i от номера n явно отражать не будем.

Каждому Γ_n сопоставим заданный рекуррентно набор $\{\varepsilon_i\}$ чисел $\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + L\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$, $i = 1, \dots, N(n)$, $\varepsilon_0 = 0$; здесь $\omega(\delta) = \delta\omega^*((1+K)\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$, $L = L(\Omega^*)$ и $K = K(\Omega^*)$.

Примем также, что разбиения Γ_n выбраны настолько мелкими, что для любого Γ_n выполняются неравенства

$$\max_{0\leqslant i\leqslant N(n)-1}(1+K)\Delta_i = (1+K)\Delta^{(n)} < \sigma, \qquad \max_{0\leqslant i\leqslant N(n)-1}\varepsilon_i < \sigma. \tag{3.4}$$

Сопоставим каждому разбиению Γ_n последовательность $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ множеств $\tilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^n$, $t_i \in \Gamma_n$, заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного момента $t_{N(n)} = \vartheta$ разбиения Γ_n.

Определение 3.4. *Полагаем* $\tilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$, $\tilde{W}^{(n)}(t_i) = \tilde{a}(t_i, t_{i+1}, \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1}))$, $i = N(n)-1, \dots, 0$.

Последовательность $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\colon t_i \in \Gamma_n\}$ представляет собой попятно заданную последовательность множеств $\tilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^n$. Будем называть ее α-аппроксимирующей системой множеств, отвечающей разбиению Γ_n.

Определим предел Φ^c α-аппроксимирующих систем $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\colon t_i \in \Gamma_n\}$ при $\Delta^{(n)} \downarrow 0$, $n \to \infty$.

Определение 3.5. *Полагаем Φ^c – множество всех точек (t_*, x_*), для каждой из которых найдется такая последовательность*

$$\{(\tau_n, x_n)\colon \tau_n = t_n(t_*), x_n \in \tilde{W}^{(n)}(\tau_n)\}, \tag{3.5}$$

что $(t_*, x_*) = \lim\limits_{n\to\infty}(\tau_n, x_n)$; здесь

$$t_n(t_*) = \begin{cases} t_* \text{ при } t_* = \vartheta, \\ \min\{t_i\colon t_i \in \Gamma_n, t_i > t_*\} \text{ при } t_* < \vartheta. \end{cases}$$

Так как $\tilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$, то сечение $\Phi^c(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon (\vartheta, x) \in \Phi^c\}$ множества Φ^c определяется равенством $\Phi^c(\vartheta) = M$ и, значит, $\Phi^c \neq \varnothing$.

Справедливо следующее утверждение, связывающее W^c с α-аппроксимирующими системами $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\colon t_i \in \Gamma_n\}$.

Теорема 3.1. $\Phi^c = W^c$.

Доказательство. Докажем сначала включение $\Phi^c \subset W^c$. Для этого покажем, что Φ^c – α-слабо инвариантное множество и $\Phi^c(\vartheta) \subset M$.

В самом деле, мы показали выше, что $\Phi^c(\vartheta) = M$ и, значит, $\Phi^c(\vartheta) \subset M$.

Докажем теперь, что

$$\Phi^c(t_*) \subset a(t_*, t^*, \Phi^c(t^*)), \qquad (t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}. \tag{3.6}$$

Зафиксируем для этого произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Phi^c$, $t_* < \vartheta$. Найдется последовательность (3.5) такая, что $(t_*, x_*) = \lim\limits_{n\to\infty} (\tau_n, x_n)$.

Рассмотрим произвольные $\alpha \in \mathcal{L}$, номер n и отвечающий ему отрезок $[\tau_n, \vartheta]$. Из включения $x_n \in \tilde{W}^{(n)}(\tau_n)$ следует, что найдется абсолютно непрерывная на $[\tau_n, \vartheta]$ вектор-функция $\tilde{x}^{(n)}(t)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{x}}^{(n)}(t) \in F_\alpha(t_i, \tilde{x}^{(n)}(t_i)) \text{ п.в. на } [t_i, t_{i+1}) \subset [\tau_n, \vartheta], \\ \tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = x_n, \qquad \tilde{x}^{(n)}(t_i) \in \tilde{W}^{(n)}(t_i) \quad t_i \in (\tau_n, \vartheta). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Введем функции, являющиеся непрерывными продолжениями на промежуток $[t_*, \vartheta]$ функций $\tilde{x}^{(n)}(t)$, $t \in [\tau_n, \vartheta]$:

$$\tilde{y}^{(n)}(t) = \begin{cases} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n), & t_* \leqslant t \leqslant \tau_n, \\ \\ \tilde{x}^{(n)}(t), & \tau_n \leqslant t \leqslant \vartheta, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Так как последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равностепенно непрерывна и равноограничена на $[t_*, \vartheta]$, то из нее по теореме Арцела можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности, считаем, что сама $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равномерно сходится на $[t_*, \vartheta]$. Полагая $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t)$ на $[t_*, \vartheta]$, получаем

$$\begin{gathered} x(t_*) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t_*) = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_*, \\ x(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}^{(n)}(t), \qquad t \in (t_*, \vartheta]. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Из (3.7), (3.8) следует, что предельная вектор-функция $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$ удовлетворяет включению

$$\dot{x} \in F_\alpha(t,x) \text{ п.в. на } [t_*, \vartheta] \tag{3.9}$$

и включению

$$(t, x(t)) \in \Phi^c, \qquad t \in [t_*, \vartheta]. \tag{3.10}$$

В самом деле, включение (3.9) доказывается стандартными методами (см., например, [10]).

Докажем включение (3.10). Зафиксируем произвольный момент $t \in [t_*, \vartheta]$. Для этого момента справедливо равенство $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t)$. По построению функции $\tilde{y}^{(n)}(t)$ на $[t_*, \vartheta]$, выполняется включение $\tilde{y}^{(n)}(t) = \tilde{x}^{(n)}(t) \in \tilde{W}^{(n)}(t_n(t))$, где момент $t_n(t)$ определен выше (см. определение 3.5).

Полагаем $\eta_n = t_n(t)$, $y_n = \tilde{x}^{(n)}(\eta_n) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t))$.

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\|(t, x(t)) - (\eta_n, y_n)\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|(t, x(t)) - (t, \tilde{y}^{(n)}(t))\| + \|(t, \tilde{y}^{(n)}(t)) - (t_n(t), \tilde{y}^{(n)}(t_n(t)))\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|x(t) - \tilde{y}^{(n)}(t)\| + |t - t_n(t)| + \|\tilde{y}^{(n)}(t) - \tilde{y}^{(n)}(t_n(t))\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \|x(t) - \tilde{y}^{(n)}(t)\| + (1+K)\Delta^{(n)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Принимая во внимание (3.11) и соотношения $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}^{(n)}(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta^{(n)} = 0$, получаем

$$(t, x(t)) = \lim_{n\to\infty} (\eta_n, y_n), \qquad \eta_n = t_n(t), y_n \in \tilde{W}^{(n)}(\eta_n).$$

Включение (3.10) доказано.

Вместе с тем показано, что для любой точки $(t_*, x_*) \in \Phi^c$, $t_* < \vartheta$ и любого $\alpha \in \mathcal{L}$ найдется движение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$ д.в. (3.9), удовлетворяющее (3.10). Отсюда следует (3.6). Значит, Φ^c – α-слабо инвариантное множество, удовлетворяющее включению $\Phi^c(\vartheta) \subset M$, и, значит, $\Phi^c \subset W^c$.

Докажем обратное включение $W^c \subset \Phi^c$.

Рассмотрим разбиение Γ_n промежутка $[t_0, \vartheta]$ и все непустые сечения $W^c(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$ множества W^c. Обозначим $T_n = \{t_i \in \Gamma_n \colon W^c(t_i) \neq$

$\varnothing\}$. Так как $W^c(t_{N(n)}) \neq \varnothing$, то $T_n \neq \varnothing$ и, кроме того, T_n обладает свойством: если $t_i \in T_n$, то $t_{i+1} \in T_n$.

Согласно определениям 3.1 и 3.2, α-слабо инвариантное множество W^c удовлетворяет включениям

$$W^c(t_i) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{L}} X_\alpha^{-1}(t_i, t_{i+1}, W^c(t_{i+1})), \qquad t_i \in T_n, \quad t_i < \vartheta$$

и, значит, при любом $\alpha \in \mathcal{L}$ справедливо

$$W^c(t_i) \subset X_\alpha^{-1}(t_i, t_{i+1}, W^c(t_{i+1})), \qquad t_i \in T_n, \quad t_i < \vartheta. \tag{3.12}$$

Выберем произвольные $\alpha \in \mathcal{L}$ и момент $t_i \in T_n$, $t_i < \vartheta$ и рассмотрим множества $W^c(t_i)$ и $W^c(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$, где числа $\omega(\Delta_i)$, $i = 0, \ldots, N(n)$ определены выше.

Покажем, что справедливо включение

$$W^c(t_i) \subset \tilde{X}_\alpha^{-1}(t_i, t_{i+1}, W^c(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}), \qquad t_i \in T_n, \quad t_i < \vartheta. \tag{3.13}$$

Пусть $x^{(i)} \in W^c(t_i)$. Рассмотрим произвольное движение $x(t)$, $x(t_i) = x^{(i)}$ д.в. $\dot{x} \in F_\alpha(t, x)$, $t \geqslant t_i$. Так как $(t_i, x^{(i)}) \in W^c \subset \bar{\Omega} \subset \mathrm{int}\Omega^*$, то при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, достаточно близких к t_i, верно $(t, x(t)) \in \in \mathrm{int}\Omega^*$.

Покажем, что при сделанных относительно Γ_n предположениях верно включение $(t, x(t)) \in \mathrm{int}\Omega^*$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Допустим противное: существует момент $t^\diamond \in [t_i, t_{i+1}]$, в который точка $(t, x(t))$ выходит на границу $\partial\Omega^*$ множества Ω^*. Не умаляя общности рассуждений, можем считать, что $t^\diamond$ – момент первого выхода точки $(t, x(t))$ на границу $\partial\Omega^*$, т.е. $(t, x(t)) \in \mathrm{int}\Omega^*$ при $t \in [t_i, t^\diamond)$ и $(t^\diamond, x(t^\diamond)) \in \partial\Omega^*$. Отсюда следует, что почти всюду на $[t_i, t^\diamond)$ выполняется $\dot{x}(t) = f(t)$, где $\|f(t)\| \leqslant K$. Тогда точка $(t^\diamond, x(t^\diamond))$ удовлетворяет неравенству

$$\|(t^\diamond, x(t^\diamond)) - (t_i, x(t_i))\| \leqslant (t^\diamond - t_i) + K(t^\diamond - t_i) < (1 + K)\Delta_i < \sigma.$$

Отсюда и из включения $(t_i, x(t_i)) \in \bar{\Omega}$ следует включение $(t^\diamond, x(t^\diamond)) \in \in \mathrm{int}\Omega^*$, противоречащее определению момента $t^\diamond$. Вместе с тем установлено, что $(t, x(t)) \in \mathrm{int}\Omega^* \subset \Omega^*$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Для точки $x(t_i) = x^{(i)} \in W^c(t_i)$ рассмотрим множество $X_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i))$. Каждая точка $x(t_{i+1}) \in X_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i))$ есть значение в момент t_{i+1} некоторого решения (движения) $x(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ д.в. $\dot{x} \in$

$F_\alpha(t,x)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ с начальным значением $x(t_i)$. Справедливо равенство

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,dt, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

где $f(t)$ – интегрируемая по Лебегу функция, $f(t) \in F_\alpha(t, x(t))$ п.в. на $[t_i, t_{i+1}]$.

Принимая во внимание определение функции $\omega^*(\Delta)$ и включения $(t_i, x(t_i)) \in \Omega^*$, $(t, x(t)) \in \Omega^*$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, получаем

$$d(F_\alpha(t, x(t)), F_\alpha(t_i, x(t_i))) \leqslant$$

$$\leqslant \omega^*(|t - t_i| + \|x(t) - x(t_i)\|) \leqslant \omega^*((1+K)\Delta_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (3.14)$$

Значит, справедливо включение $f(t) \in F_\alpha(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}$, из которого следует включение

$$\frac{1}{\Delta_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,dt \in F_\alpha(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}. \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует включение

$$x(t_{i+1}) \in \tilde{X}_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}. \quad (3.16)$$

Учитывая, что включение (3.16) получено для произвольной точки $x(t_{i+1}) \in X_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i))$, заключаем, что справедливо включение

$$X_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) \subset \tilde{X}_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}.$$

Из включения $x(t_i) \in W^c(t_i)$ следует

$$W^c(t_{i+1}) \bigcap X_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) \neq \varnothing$$

и, значит,

$$W^c(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \bigcap \tilde{X}_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) \neq \varnothing. \quad (3.17)$$

Поскольку $t_i \in T_n$ $(t_i < \vartheta)$ и $x(t_i) \in W^c(t_i)$ выбраны произвольно, то из (3.17) следует (3.13).

Далее зададим систему $\{\hat{W}^{(n)}\colon t_i\in T_n\}$ множеств $\hat{W}^{(n)}(t_i) = W^c(t_i)_{\varepsilon_i}$. Выполняются включения $W^c(t_i) \subset \hat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$.

Докажем, что для любого $\alpha \in \mathcal{L}$

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{X}_\alpha^{-1}(t_i, t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})), \qquad t_i \in T_n. \tag{3.18}$$

Пусть $x(t_i) \in \hat{W}^{(n)}(t_i)$ и $x^*(t_i)$ – ближайшая точка на $W^c(t_i)$ к точке $x(t_i)$. Справедливо неравенство $\|x(t_i) - x^*(t_i)\| \leqslant \varepsilon_i$. Из включений $x^*(t_i) \in W^c(t_i)$ и (3.13) следует

$$W^c(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \bigcap \tilde{X}_\alpha(t_{i+1}, t_i, x^*(t_i)) \neq \varnothing.$$

Тогда существует точка

$$x^*(t_{i+1}) = x^*(t_i) + \Delta_i f^*(t_i), \quad f^*(t_i) \in F_\alpha(t_i, x^*(t_i)), \tag{3.19}$$

содержащаяся в $W^c(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$.

Так как $(t_i, x^*(t_i)) \in W^c \subset \bar{\Omega} \subset \Omega^*$ и $(t_i, x(t_i)) \in W^c_{\varepsilon_i} \subset W^c_\sigma \subset \bar{\Omega}_\sigma \subset \subset \Omega^*$, то, согласно условию **A.3**, выполняется неравенство

$$d(F_\alpha(t_i, x(t_i)), F_\alpha(t_i, x^*(t_i))) \leqslant L\|x(t_i) - x^*(t_i)\|.$$

Принимая его во внимание, выберем вектор $f(t_i) \in F_\alpha(t_i, x(t_i))$, удовлетворяющий неравенству

$$\|f(t_i) - f^*(t_i)\| \leqslant L\|x(t_i) - x^*(t_i)\| \leqslant \varepsilon_i.$$

Тогда оказывается, что точка $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta_i f(t_i)$ отстоит от точки (3.19) не более, чем на величину

$$\|x(t_i) - x^*(t_i)\| + \Delta_i\|f(t_i) - f^*(t_i)\| \leqslant (1 + L\Delta_i)\varepsilon_i.$$

Значит, $x(t_{i+1}) \in \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})$. Таким образом, показано, что для любых $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in T_n$ и $x(t_i) \in \hat{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется соотношение

$$\hat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \bigcap \tilde{X}_\alpha(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) \neq \varnothing,$$

из которого следует (3.18).

Справедливы также включения

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_i), \qquad t_i \in T_n. \tag{3.20}$$

Докажем (3.20) по индукции. В самом деле, справедливы соотношения

$$\hat{W}^{(n)}(t_i) = W^c(t_i)_{\varepsilon_i} \subset \Omega^*(t_i), \qquad t_i \in T_n, \tag{3.21}$$

$$\hat{W}^{(n)}(t_{N(n)}) = W^c(t_{N(n)})_{\varepsilon_N(n)} = M_{\varepsilon_{N(n)}} = \tilde{W}(t_{N(n)}). \tag{3.22}$$

Следовательно, для $i = N(n)$ включение $\hat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется.

Докажем, что (3.20) выполняется при всех остальных i, для которых $t_i \in T_n$. Для этого предположим, что $t_i \in T_n$, $i \leqslant N(n) - 1$ и для $t_{i+1} \in T_n$ имеет место

$$\hat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1}). \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует включение

$$\tilde{X}_\alpha^{-1}(t_i, t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}(t_{i+1})) \subset \tilde{X}_\alpha^{-1}(t_i, t_{i+1}, \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \qquad \alpha \in \mathcal{L}. \tag{3.24}$$

Из (3.18) и (3.24) следует (3.20).

Применим (3.20) к доказательству включения $W^c \subset \Phi^c$.

В случае, когда $t_* = \vartheta$, верны равенства $W^c(t_*) = M$, $\Phi^c(t_*) = M$ и, значит, $W^c(t_*) = \Phi^c(t_*)$.

Пусть $t_* < \vartheta$. выберем произвольную точку $(t_*, x_*) \in W^c$. Верно неравенство $t_* < t_n(t_*) \leqslant t_* + \Delta^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как $(t_*, x_*) \in W^c$, то для любого $\alpha \in \mathcal{L}$ существует движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$, на $[t_*, \vartheta]$ д.в. $\dot{x} \in F_\alpha(t, x)$, удовлетворяющее включению $(t, x(t)) \in W^c$, $t \in [t_*, \vartheta]$. Отсюда следует

$$x(t_n(t_*)) \in W^c(t_n(t_*)) \subset \hat{W}^{(n)}(t_n(t_*)) \subset \tilde{W}^{(n)}(t_n(t_*)).$$

Значит, при каждом n найдется такая точка $x(t_n(t_*)) \in \tilde{W}^{(n)}(t_n(t_*))$, что $\|x(t_n(t_*)) - x_*\| \leqslant K\|t_n(t_*) - t_*\|$.

Принимая во внимание равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n(t_*) - t_*) = 0$, получаем, что последовательность $\{(t_n(t_*), x(t_n(t_*)))\}$ точек из W^c удовлетворяет равенству $(t_*, x_*) = \lim\limits_{n\to\infty}(t_n(t_*), x(t_n(t_*)))$ и, значит, $(t_*, x_*) \in \Phi^c$. Показано, что $W^c(t_*) \subset \Phi^c(t_*)$, $t_* < \vartheta$.

Из включений $W^c(\vartheta) \subset \Phi^c(\vartheta)$, $W^c(t_*) \subset \Phi^c(t_*)$, $t_* < \vartheta$ следует $W^c \subset \Phi^c$. Из включений $\Phi^c \subset W^c$ и $W^c \subset \Phi^c$ следует $W^c = \Phi^c$. $\square$

4. α-гамильтониан и унификация α-набора д.в. (2.1)

Этот раздел посвящен развитию тех унификационных конструкций в теории дифференциальных игр, которые были предложены Н.Н. Красовским в работах [3, 4] середины 70-х годов XX века. Важную роль в этих конструкциях играет гамильтониан конфликтно управляемой системы.

Введение унификации дифференциальных игр позволило в последующие годы решить ряд важных задач и, в частности, расширить концепцию стабильности, которая является базовой в теории позиционных дифференциальных игр. А.И. Субботин распространил идеи унификации на уравнения Гамильтона-Якоби и более общие уравнения в частных производных 1-го порядка, создав теорию обобщенных (минимаксных) решений уравнений Гамильтона-Якоби и уравнений в частных производных 1-го порядка.

Ниже в этом разделе введем квазигамильтониан α-набора (α-гамильтониан) $H(t,x,l)$, $(t,x,l) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и определим эквивалентный α-набору унификационный набор дифференциальных включений, запараметризованных векторами $l \in S = \{l \in \mathbb{R}^n \colon \|l\| = 1\}$. В определении дифференциальных включений, составляющих унификационный набор (l-набор), участвует α-гамильтониан $H(t,x,l)$.

Эквивалентность α- и l-наборов мы будем понимать в том смысле, что им соответствуют одни и те же α-слабо инвариантные и l-слабо инвариантные множества. Иными словами, любое α-слабо инвариантное множество является l-слабо инвариантным множеством и наоборот. При таком понимании эквивалентности α- и l-наборов любые два набора (α_*-набор и α^*-набор) дифференциальных включений естественно считать эквивалентными, если оба они эквивалентны одному и тому же l-набору.

Здесь α_*- и α^*-наборы есть наборы д.в., удовлетворяющие условиям **A.1-A.5**.

Итак, поставим в соответствие α-набору д.в. (2.1) скалярную функцию

$$H(t,x,l) = \min_{\alpha \in \mathcal{L}} H_\alpha(t,x,l), \tag{4.1}$$

$$(t,x,l) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;$$

здесь $H_\alpha(t,x,l) = h_{F_\alpha(t,x)}(l)$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Функцию $H(t, x, l)$ назовем квазигамильтонианом α-набора (2.1) или просто α-гамильтонианом.

Укажем некоторые свойства α-гамильтониана.

Свойство 4.1. Функция $H(t, x, l)$, $l \in \mathbb{R}^n$ положительно однородна при любых $(t, x) \in \Omega^*$.

Доказательство. Так как функция $H_\alpha(t, x, l)$, $l \in \mathbb{R}^n$ положительно однородна при любых $\alpha \in \mathcal{L}$ и $(t, x) \in \Omega^*$, то положительно однородна и функция $H(t, x, l)$, $l \in \mathbb{R}^n$ при $(t, x) \in \Omega^*$.

Свойство 4.2. Функция $H(t, x, l)$ непрерывна на Ω^* при любых $l \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq \mathbf{0}$. При любых $\alpha \in \mathcal{L}$, (t_*, x_*) и (t^*, x^*) из Ω^* справедлива оценка

$$|H_\alpha(t_*, x_*, l) - H_\alpha(t^*, x^*, l)| = |H_\alpha(t_*, x_*, s_l) - H_\alpha(t^*, x^*, s_l)| \cdot \|l\| \leqslant \\ \leqslant d(F_\alpha(t_*, x_*), F_\alpha(t^*, x^*)) \cdot \|l\|; \quad (4.2)$$

здесь $s_l = \|l\|^{-1} l$, $l \neq \mathbf{0}$.

Принимая во внимание условие **A.2**, получаем при $l \neq \mathbf{0}$

$$|H_\alpha(t_*, x_*, l) - H_\alpha(t^*, x^*, l)| \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|)\|l\|,$$

$\alpha \in \mathcal{L}$, (t_*, x_*) и (t^*, x^*) из Ω^*.

Из этой оценки следует, что при $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq \mathbf{0}$ выполняется

$$|H(t_*, x_*, l) - H(t^*, x^*, l)| \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|)\|l\|, \qquad (4.3)$$

(t_*, x_*) и (t^*, x^*) из Ω^*.

Очевидно, что (4.3) имеет место и при $l = \mathbf{0}$. Свойство **4.2** доказано.

Свойство 4.3. Функция $H(t, x, l)$ локально липшицева по x при любых $l \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. По аналогии с (4.2) справедлива при любых $l \in \mathbb{R}^n$ оценка

$$|H_\alpha(t, x_*, l) - H_\alpha(t, x^*, l)| \leqslant d(F_\alpha(t, x_*), F_\alpha(t, x^*)) \cdot \|l\| \leqslant \\ \leqslant L\|l\|\|x_* - x^*\|; \quad (4.4)$$

здесь (t, x_*) и (t, x^*) из Ω^*, $L = L(\Omega^*)$ – константа из условия **A.3.**

Из оценки (4.4) следует при любых $l \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x_*, l) - H(t, x^*, l)| \leqslant L\|l\|\|x_* - x^*\|, \tag{4.5}$$

(t, x_*) и (t, x^*) из Ω^*.

Свойство **4.3** доказано.

Из (4.5) следует, что при любых $l \in S = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \|s\| = 1\}$ справедлива оценка

$$|H(t, x_*, l) - H(t, x^*, l)| \leqslant L\|x_* - x^*\|, \tag{4.6}$$

(t, x_*) и (t, x^*) из Ω^*.

Свойство 4.4. Функция $H(t, x, l)$ непрерывна по l при любых $(t, x) \in \Omega^*$.

Доказательство. Пусть $(t, x) \in \Omega^*$, l_* и l^* из $\mathbb{R}^n$, а также α_* и α^* из $\mathcal{L}$ удовлетворяют равенствам

$$h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l_*) = H(t, x, l_*), \qquad h_{F_{\alpha^*}(t,x)}(l^*) = H(t, x, l^*).$$

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $H(t, x, l^*) - H(t, x, l_*) \geqslant 0$. Оценим сверху разность $H(t, x, l^*) - H(t, x, l_*)$.

Справедливо соотношение

$$H(t, x, l^*) - H(t, x, l_*) = h_{F_{\alpha^*}(t,x)}(l^*) - h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l_*) \leqslant$$
$$\leqslant h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l^*) - h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l_*). \tag{4.7}$$

Пусть векторы $f_* \in F_{\alpha_*}(t, x)$ и $f^* \in F_{\alpha_*}(t, x)$ таковы, что

$$h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l^*) = \langle l^*, f^* \rangle, \qquad h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l_*) = \langle l_*, f_* \rangle.$$

Справедливо соотношение

$$h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l^*) - h_{F_{\alpha_*}(t,x)}(l_*) = \langle l^*, f^* \rangle - \langle l_*, f_* \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle l^* - l_*, f^* \rangle \leqslant \|l^* - l_*\|\|f^*\|. \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8), учитывая $f^* \in F_{\alpha_*}(t, x)$, $(t, x) \in \Omega^*$, получаем

$$H(t, x, l^*) - H(t, x, l_*) \leqslant K\|l^* - l_*\|, \tag{4.9}$$

где $K = K(\Omega^*)$.

Свойство **4.4** доказано.

Объединяя свойства **4.2** и **4.4**, получаем оценку

$$|H(t_*, x_*, l_*) - H(t^*, x^*, l^*)| \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|) + K\|l^* - l_*\|, \quad (4.10)$$

$$(t_*, x_*, l_*), (t^*, x^*, l^*) \text{ из } \Omega^* \times \mathbb{R}^n.$$

Очевидно также, что (4.10) имеет место при всех (t_*, x_*, l_*) и (t^*, x^*, l^*) из $\Omega^* \times S$.

Из (4.10) следует, что функция $H(t, x, l)$ непрерывна на $\Omega^* \times \mathbb{R}^n$ и равномерно непрерывна на компакте $\Omega^* \times S$.

Положив $(t_*, x_*, l_*) = (t, x, l) \in \Omega^* \times S$, $(t^*, x^*, l^*) = (t, x, \mathbf{0})$ и, учитывая равенство $H(t, x, \mathbf{0}) = 0$, получаем из (4.10)

$$r = \max_{(t,x,l) \in \Omega^* \times S} |H(t, x, l)| \leqslant K. \quad (4.11)$$

Следуя [17], полагаем при $(t, x, l) \in \Omega^* \times S$

$$G = B(\mathbf{0}; K) = \{b \in \mathbb{R}^n \colon \|b\| \leqslant K\},$$

$$\Pi_l(t, x) = \{f \in \mathbb{R}^n \colon \langle l, f \rangle \leqslant H(t, x, l)\}, \quad (4.12)$$

$$F_l(t, x) = \Pi_l(t, x) \bigcap G.$$

Множества $F_l(t, x)$ представляют собой шаровые сегменты в $\mathbb{R}^n$, запараметризованные вектором $l \in S$ при $(t, x) \in \Omega^*$.

Введем в рассмотрение l-набор дифференциальных включений на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F_l(t, x), \qquad l \in S. \quad (4.13)$$

Отображения $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$, $l \in S$ удовлетворяют следующим условиям

L.1 Множество $F_l(t, x)$ –выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ при $(t, x) \in \Omega^*$, $l \in S$;

L.2 Для ограниченной и замкнутой области $\Omega^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$d(F_l(t_*, x_*), F_l(t^*, x^*)) \leqslant \rho^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$
$$(t_*, x_*), (t^*, x^*) \text{ из } \Omega^*, \qquad l \in S; \tag{4.14}$$

здесь $\rho^*(\delta) = \dfrac{K}{\sqrt{K^2 - r^2}}\, \omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$;

L.3 Для ограниченной и замкнутой области $\Omega^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$d(F_l(t, x_*), F_l(t, x^*)) \leqslant \lambda \|x_* - x^*\|, \quad (t, x_*), (t, x^*) \text{ из } \Omega^*, l \in S; \tag{4.15}$$

здесь $\lambda = \lambda(L) = \dfrac{KL}{\sqrt{K^2 - r^2}}$;

L.4 Справедливо неравенство

$$h(F_l(t, x), \{\mathbf{0}\}) \leqslant K, \quad (t, x) \text{ из } \Omega^*, l \in S; \tag{4.16}$$

L.5 При любых $(t, x) \in \Omega^*$, $l \in S$ справедливо равенство

$$\min_{s \in S} h_{F_s(t,x)}(l) = h_{F_l(t,x)}(l) = H(t, x, l). \tag{4.17}$$

Отметим, что свойство **L.4** имеет место по определению числа $K \in (0, \infty)$. Свойство **L.5** означает, что квазигамильтониан l-набора совпадает с квазигамильтонианом α-набора, т.е. α-гамильтониан и l-гамильтониан совпадают на множестве $\Omega^* \times \mathbb{R}^n$.

Для l-набора (4.13) определяются точно так же, как это делалось для α-набора, множества достижимости $X_l(t^*, t_*, x_*)$ и интегральные воронки $X_l(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \Omega^*$, $(t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}$, $l \in S$.

В разделе 2 была выделена область $\Omega^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, содержащая в себе все элементы разрешающей конструкции, а также дано определение 2.2 α-слабо инвариантного множества $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Точно так же, как было определено α-слабо инвариантное множество $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, определим l-слабо инвариантное множество $\Phi \subset \Omega^*$. Дадим определение l-слабо инвариантного множества Φ в терминах оператора l-поглощения в задаче 2.1.

Определение 4.1. *Оператором l-поглощения в задаче 2.1 назовем отображение* $a^*\colon \mathbf{\Delta}\times 2^{\mathbb{R}^n}\mapsto 2^{\mathbb{R}^n}$, *заданное соотношением*

$$a^*(t_*,t^*,X^*)=\bigcap_{l\in S}X_l^{-1}(t_*,t^*,X^*),\quad (t_*,t^*)\in\mathbf{\Delta}, X^*\subset\mathbb{R}^n. \qquad (4.18)$$

Определение 4.2. *Замкнутое множество $\Phi\subset\Omega^*$ называется l-слабо инвариантным множеством, если*

$$\Phi(t_*)\subset a^*(t_*,t^*,\Phi(t^*)),\quad (t_*,t^*)\in\mathbf{\Delta}. \qquad (4.19)$$

Справедливо следующее утверждение об эквивалентности операторов a и a^*. Доказательство утверждения проводится по схеме, близкой к схеме доказательства аналогичного утверждения в дифференциальных играх (см. [8]).

Теорема 4.1. *Операторы a и a^* эквивалентны в том смысле, что замкнутое множество $\Phi\subset\Omega^*$ является α-слабо инвариантным тогда и только тогда, когда Φ – l-слабо инвариантное множество.*

Доказательство. Пусть замкнутое множество $\Phi\subset\Omega^*$, $\Phi(t)\neq\varnothing$, $t\in[t_0,\vartheta]$ α-слабо инвариантно.

Покажем, что Φ – l-слабо инвариантное множество. Для этого достаточно показать, что для любой тройки $(t_*,t^*,l)\in\mathbf{\Delta}\times S$ справедливо включение

$$\Phi(t_*)\subset X_l^{-1}(t_*,t^*,\Phi(t^*)),\quad (t_*,t^*)\in\mathbf{\Delta}. \qquad (4.20)$$

Зафиксируем какую-либо тройку $(t_*,t^*,l)\in\mathbf{\Delta}\times S$ и рассмотрим некоторую вспомогательную конструкцию.

Для этого введем в рассмотрение промежуточные моменты τ_*, τ^* $(t_*\leqslant\tau_*<\tau^*\leqslant\vartheta)$ и точки $(\tau_*,y_*^{(1)})\in\Phi$, $(\tau_*,y_*^{(2)})\in\Omega^*$, $y_*^{(1)}\neq y_*^{(2)}$.

Полагаем $s_*=y_*^{(1)}-y_*^{(2)}$, $s=\|s_*\|^{-1}s_*\in S$.

Пусть элемент $\alpha(s)\in\mathcal{L}$ определяется равенством

$$h_{F_{\alpha(s)}(\tau_*,y_*^{(1)})}(s)=H(\tau_*,y_*^{(1)},s). \qquad (4.21)$$

Учитывая включение $(\tau_*,y_*^{(1)})\in\Phi$ и α-слабую инвариантность множества Φ, получаем

$$\Phi(\tau^*)\bigcap X_{\alpha(s)}(\tau^*,\tau_*,y_*^{(1)})\neq\varnothing. \qquad (4.22)$$

Символом $x^{(1)}(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$ обозначим решение на $[\tau_*, \tau^*]$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_{\alpha(s)}(\tau, x), \qquad x^{(1)}(\tau_*) = y_*^{(1)},$$

удовлетворяющее включению $x^{(1)}(\tau^*) \in \Phi(\tau^*)$.

Вектор-функция $x^{(1)}(\tau)$ удовлетворяет равенству

$$x^{(1)}(t) = y^{(1)} + \int\limits_{\tau_*}^{t} f(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [\tau_*, \tau^*],$$

где $f(\tau)$ измерима по Лебегу на $[\tau_*, \tau^*]$ и $f(\tau) \in F_{\alpha(s)}(\tau, x^{(1)}(\tau))$ п.в. на $[\tau_*, \tau^*]$.

Пусть $f^*(\tau)$ – ближайшая к $f(\tau)$ точка на $F_{\alpha(s)}(\tau_*, y_*^{(1)})$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f^*(\tau) - f(\tau)\| \leqslant d(F_{\alpha(s)}(\tau_*, y_*^{(1)}), F_{\alpha(s)}(\tau, x^{(1)}(\tau))) \leqslant \\ \leqslant \omega^*(|\tau - \tau_*| + \|x^{(1)}(\tau) - y_*^{(1)}\|) \leqslant \omega^*((1+K)(\tau - \tau_*)). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо представление

$$f(\tau) = f^*(\tau) + \xi(\tau), \qquad \|\xi(\tau)\| \leqslant \omega^*((1+K)(\tau - \tau_*))$$

и, значит,

$$x^{(1)}(t) = y_*^{(1)} + \int\limits_{\tau_*}^{t} f^*(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\tau_*}^{t} \xi(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [\tau_*, \tau^*],$$

где $f^*(\tau) \in F_{\alpha(s)}(\tau_*, y_*^{(1)})$ при $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$.

Для отображения $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$, $(t, x) \in \Omega^*$, отвечающего выбранному ранее $l \in S$, справедливо, согласно свойству **L.5**, неравенство

$$h_{F_l(t,x)}(s) \geqslant H(t, x, s), \qquad (t, x) \in \Omega^*. \tag{4.23}$$

Из (4.23) следует

$$H_l(t, x) = F_l(t, x) \bigcap \{f \in \mathbb{R}^n \colon \langle f, s \rangle \geqslant H(t, x, s)\} \neq \varnothing.$$

Многозначное отображение $(t, x) \mapsto H_l(t, x)$, $(t, x) \in \Omega^*$ полунепрерывно сверху по включению.

Рассмотрим абсолютно непрерывную вектор-функцию $x^{(2)}(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$, удовлетворяющую п.в. на $[\tau_*, \tau^*]$ дифференциальному включению

$$\dot{x} \in H_l(\tau, x), \qquad x^{(2)}(\tau_*) = y_*^{(2)}.$$

Вектор-функция $x^{(2)}(t)$ удовлетворяет равенству

$$x^{(2)}(t) = y_*^{(2)} + \int\limits_{\tau_*}^{t} f_l^{\diamond}(\tau)\, d\tau, \qquad t \in [\tau_*, \tau^*],$$

где $f_l^{\diamond}(\tau)$ измерима по Лебегу на $[\tau_*, \tau^*]$ и

$$f_l^{\diamond}(\tau) \in H_l(\tau, x^{(2)}(\tau)) \subset F_l(\tau, x^{(2)}(\tau)), \qquad \tau \in [\tau_*, \tau^*].$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $s(t) = x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)$ на $[\tau_*, \tau^*]$. Оценим сверху величину $\|s(t)\|^2$:

$$\|s(t)\|^2 = \|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\|^2 = \|s_* + \int\limits_{\tau_*}^{t} (f^*(\tau) - f_l^{\diamond}(\tau))\, d\tau + \int\limits_{\tau_*}^{t} \xi(\tau)\, d\tau\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|s_*\|^2 + 2\int\limits_{\tau_*}^{t} \langle s_*, (f^*(\tau) - f_l^{\diamond}(\tau))\rangle\, d\tau + 2\int\limits_{\tau_*}^{t} \langle s_*, \xi(\tau)\rangle\, d\tau +$$

$$+ 2\langle \int\limits_{\tau_*}^{t} (f^*(\tau) - f_l^{\diamond}(\tau))\, d\tau, \int\limits_{\tau_*}^{t} \xi(\tau)\, d\tau\rangle +$$

$$+ \|\int\limits_{\tau_*}^{t} (f^*(\tau) - f_l^{\diamond}(\tau))\, d\tau\|^2 + \|\int\limits_{\tau_*}^{t} \xi(\tau)\, d\tau\|^2.$$

Справедливы следующие оценки

$$|\int\limits_{\tau_*}^{t} \langle s_*, \xi(\tau)\rangle\, d\tau| \leqslant \|s_*\| \int\limits_{\tau_*}^{t} \|\xi(\tau)\|\, d\tau \leqslant \|s_*\|(t - \tau_*)\omega^*((1+K)(t - \tau_*)) \leqslant$$

$$\leqslant K^0 (t - \tau_*)\omega^*((1 + K)(t - \tau_*)),$$

$$|\langle \int\limits_{\tau_*}^{t} (f^*(\tau) - f_l^{\diamond}(\tau))\, d\tau, \int\limits_{\tau_*}^{t} \xi(\tau)\, d\tau\rangle| \leqslant \int\limits_{\tau_*}^{t} \|f^*(\tau) - f_l^{\diamond}(\tau)\|\, d\tau \cdot \int\limits_{\tau_*}^{t} \|\xi(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2K(t - \tau_*)^2 \omega^*((1 + K)(t - \tau_*)),$$

$$\|\int\limits_{\tau_*}^{t}(f^*(\tau)-f_l^{\diamond}(\tau))\,d\tau\|^2\leqslant 4K^2(t-\tau_*)^2,$$

$$\|\int\limits_{\tau_*}^{t}\xi(\tau)\,d\tau\|^2\leqslant (t-\tau_*)^2\omega^*((1+K)(t-\tau_*))^2.$$

Здесь обозначено $K^0=\sup\{\|x_*-x^*\|<\infty\colon (t,x_*),(t,x^*)\in\Omega^*\}$.

Из этих оценок следует при $t\in[\tau_*,\tau^*]$

$$\|s(t)\|^2\leqslant\|s_*\|^2+2\int\limits_{\tau_*}^{t}\langle s_*,(f^*(\tau)-f_l^{\diamond}(\tau))\rangle\,d\tau+(t-\tau_*)\varphi(t-\tau_*). \quad (4.24)$$

Здесь $\varphi(\delta)$, $\delta\in(0,\infty)$ – положительная, монотонно убывающая к нулю при $\delta\downarrow 0$ функция, не зависящая от выбора $\tau_*,y_*^{(1)},y_*^{(2)}$.

Оценим сверху интеграл в правой части неравенства (4.24). Для этого оценим сверху подынтегральное выражение.

Поскольку $f^*(\tau)\in F_{\alpha(s)}(\tau_*,y_*^{(1)})$ при $\tau\in[\tau_*,\tau^*]$, то $\langle s,f^*(\tau)\rangle\leqslant$ $\leqslant H(\tau_*,y_*^{(1)},s)$, $\tau\in[\tau_*,\tau^*]$ и, значит, $\langle s_*,f^*(\tau)\rangle\leqslant H(\tau_*,y_*^{(1)},s_*)$, $\tau\in[\tau_*,\tau^*]$.

Так как $f_l^{\diamond}(\tau)\in H_l(\tau,x^{(2)}(\tau))$ при $\tau\in[\tau_*,\tau^*]$, то $\langle s_*,f_l^{\diamond}(\tau)\rangle\geqslant$ $\geqslant H(\tau,x^{(2)}(\tau),s_*)$, $\tau\in[\tau_*,\tau^*]$.

Значит, справедливо неравенство

$$\langle s_*,f^*(\tau)-f_l^{\diamond}(\tau)\rangle\leqslant H(\tau_*,y_*^{(1)},s_*)-H(\tau,x^{(2)}(\tau),s_*),\qquad \tau\in[\tau_*,\tau^*].$$

Оценим сверху правую часть этого неравенства:

$$H(\tau_*,y_*^{(1)},s_*)-H(\tau,x^{(2)}(\tau),s_*)=\|s_*\|(H(\tau_*,y_*^{(1)},s)-H(\tau,x^{(2)}(\tau),s))=$$

$$=\|s_*\|\{(H(\tau_*,y_*^{(1)},s)-H(\tau_*,y_*^{(2)},s))+(H(\tau_*,y_*^{(2)},s)-H(\tau,x^{(2)}(\tau),s))\}\leqslant$$

$$\leqslant\|s_*\|\{L\|s_*\|+\omega^*((1+K)(\tau-\tau_*))\},\quad \tau\in[\tau_*,\tau^*].$$

Следовательно, при $\tau\in[\tau_*,\tau^*]$ справедливо неравенство

$$\langle s_*,f^*(\tau)-f_l^{\diamond}(\tau)\rangle\leqslant L\|s_*\|^2+K^0\omega^*((1+K)(\tau-\tau_*)). \quad (4.25)$$

Из (4.24), (4.25) получаем при $t \in [\tau_*, \tau^*]$

$$\|s(t)\|^2 \leqslant (1 + 2L(t - \tau_*))\|s_*\|^2 + (t - \tau_*)\varkappa(t - \tau_*), \tag{4.26}$$

где $\varkappa(t - \tau_*) = 2K^0\omega^*((1 + K)(t - \tau_*)) + \varphi(t - \tau_*)$.

Заметим, что оценка (4.26) получена при условии $y_*^{(1)} \neq y_*^{(2)}$, то есть при условии $s_* \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $y_*^{(1)} = y_*^{(2)}$. В этом случае в качестве вектора s возьмем произвольный вектор из S и так же, как и в случае $y_*^{(1)} \neq y_*^{(2)}$, рассмотрим дифференциальные включения на промежутке $[\tau_*, \tau^*]$

$$\dot{x} \in F_{\alpha(s)}(\tau, x), \qquad x^{(1)}(\tau_*) = y_*^{(1)},$$

$$\dot{x} \in H_l(\tau, x), \qquad x^{(2)}(\tau_*) = y_*^{(2)},$$

решениями которых являются $x^{(1)}(\tau)$ и $x^{(2)}(\tau)$.

Наряду с точкой $y_*^{(1)}$ рассмотрим некоторую последовательность $\{y_k^{(1)}\}$ в $\mathbb{R}^n$ такую, что $y_k^{(1)} \neq y_*^{(1)}$ и $\|y_k^{(1)} - y_*^{(1)}\|^{-1}(y_k^{(1)} - y_*^{(1)}) = s$, $k = 1, 2, \ldots$ и, кроме того, удовлетворяющую равенству $\lim\limits_{k\to\infty} y_k^{(1)} = y_*^{(1)}$.

Учитывая условия **A.1-A.3**, наложенные на α-набор, получаем, что для движения $x^{(1)}(\tau)$ на $[\tau_*, \tau^*]$ найдется последовательность $\{x_k^{(1)}(\tau)\}$ на $[\tau_*, \tau^*]$ движений $x_k^{(1)}(\tau)$ дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F_{\alpha(s)}(\tau, x), \qquad x_k^{(1)}(\tau_*) = y_k^{(1)},$$

для которой имеет место $x^{(1)}(\tau) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(1)}(\tau)$ на $[\tau_*, \tau^*]$; здесь $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(1)}(\tau)$ – равномерный предел на $[\tau_*, \tau^*]$.

Полагаем $s_k = y_k^{(1)} - y_*^{(2)}$ и $s_k(t) = x_k^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$, $k = 1, 2, \ldots$

Тогда из оценок

$$\|s_k(t)\|^2 \leqslant (1 + 2L(t - \tau_*))\|s_k\| + (t - \tau_*)\varkappa(t - \tau_*), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.27}$$

выводим, переходя к пределу при $k \to \infty$, оценку

$$\|s(t)\|^2 \leqslant (t - \tau_*)\varkappa(t - \tau_*), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{4.28}$$

Тем самым показано, что и в случае $s_* = \mathbf{0}$ выполняется неравенство (4.26).

Оценку (4.26), имеющую место для всех τ_*, τ^*, $(t_* \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant t^*)$ $(\tau_*, y_*^{(1)}) \in \Phi$, $(\tau_*, y_*^{(2)}) \in \Omega^*$, используем при доказательстве включения (4.20). То есть установим, пользуясь оценкой (4.26), что для произвольно выбранной точки $(t_*, x_*^{(1)}) \in \Phi$ справедливо соотношение

$$\Phi(t^*) \bigcap X_l(t^*, t_*, x_*^{(1)}) \neq \varnothing.$$

Для этого в дополнение к точке $(t_*, x_*^{(1)})$ выберем некоторую точку $(t_*, x_*^{(2)})$, $x_*^{(1)} \neq x_*^{(2)}$ и рассмотрим последовательность $\{\Gamma_n\}$ разбиений $\Gamma_n = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \ldots, \tau_{N(n)} = t^*\}$ промежутка $[t_*, t^*]$ с диаметрами $\Delta^{(n)} \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

Чтобы избежать усложнений в обозначениях, мы не приписываем моментам τ_i разбиения Γ_n номер n.

Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие пару вектор-функций $x_n^{(1)}(\tau)$, $x_n^{(2)}(\tau)$ на $[t_*, t^*]$ $(x_n^{(1)}(t_*) = x_*^{(1)}, \; x_n^{(2)}(t_*) = x_*^{(2)})$, которые определим последовательно по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, N(n) - 1$ разбиения Γ_n следующим образом.

На каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ_n, зная значения $x_n^{(1)}(\tau_i)$, $x_n^{(2)}(\tau_i)$ и, следовательно, – вектор $s_*^{(n)}(\tau_i) = x_n^{(1)}(\tau_i) - x_n^{(2)}(\tau_i)$, определяем вектор

$$s_n(\tau_i) = \begin{cases} \|s_*^{(n)}(\tau_i)\|^{-1} s_*^{(n)}(\tau_i), \text{ если } s_*^{(n)}(\tau_i) \neq \mathbf{0}, \\ \text{произвольный } s \in S, \text{ если } s_*^{(n)}(\tau_i) = \mathbf{0} \end{cases}$$

и элемент $\alpha(s_n(\tau_i)) \in \mathcal{L}$, удовлетворяющий равенству

$$h_{F^*}(s_n(\tau_i)) = H(\tau_i, x_n^{(1)}(\tau_i), s_n(\tau_i)), \qquad F^* = F_{\alpha(s_n(\tau_i))}(\tau_i, x_n^{(1)}(\tau_i)).$$

Вектор-функцию $x_n^{(1)}(\tau)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ определяем как удовлетворяющую п.в. дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F_{\alpha(s_n(\tau_i))}(\tau, x). \tag{4.29}$$

При этом функцию $x_n^{(1)}(\tau)$ в случае, если $x_n^{(1)}(\tau_i) \in \Phi(\tau_i)$, выбираем удовлетворяющей включению $x_n^{(1)}(\tau_{i+1}) \in \Phi(\tau_{i+1})$.

Вектор-функцию $x_n^{(2)}(\tau)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ определяем как удовлетворяющую п.в. дифференциальному включению

$$\dot{x} \in H_l(\tau, x). \tag{4.30}$$

Согласно проведенным выше рассуждениям, для выбранных $l \in S$ и разбиения Γ_n найдутся вектор-функции $x_n^{(1)}(\tau)$, $x_n^{(2)}(\tau)$ на $[t_*, t^*]$, удовлетворяющие на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ_n соответственно (4.29), (4.30) и неравенству

$$\|s_*^{(n)}(\tau_{i+1})\|^2 \leqslant (1 + 2L(\tau_{i+1} - \tau_i))\|s_*^{(n)}(\tau_i)\|^2 + (\tau_{i+1} - \tau_i)\varkappa(\tau_{i+1} - \tau_i), \tag{4.31}$$

$$i = 0, 1, \ldots, N(n) - 1.$$

Кроме того, по построению, вектор-функция $x_n^{(1)}(\tau)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяет включениям

$$x_n^{(1)}(\tau_i) \in \Phi(\tau_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N(n).$$

Из (4.31) вытекает при $i = 0, 1, \ldots, N(n) - 1$ оценка

$$\|s_*^{(n)}(\tau_{i+1})\|^2 \leqslant e^{2L(t^* - t_*)}(\|s_*\|^2 + (t^* - t_*)\varkappa(\Delta^{(n)})), \tag{4.32}$$

где $\varkappa(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Теперь от разбиения Γ_n перейдем к рассмотрению последовательности $\{\Gamma_n\}$.

Последовательности $\{\Gamma_n\}$ отвечают две последовательности $\{x_n^{(1)}(\tau)\}$, $\{x_n^{(2)}(\tau)\}$ функций на $[t_*, t^*]$. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что эти последовательности равномерно сходятся на $[t_*, t^*]$ к некоторым функциям $y(t)$ и $x(t)$ соответственно.

Полагаем $s(t) = y(t) - x(t)$ на $[t_*, t^*]$. Из (4.32) вытекает неравенство

$$\|s(t)\|^2 \leqslant e^{2L(t - t_*)}\|s_*\|^2, \qquad t \in [t_*, t^*]. \tag{4.33}$$

Кроме того, учитывая свойства элементов $x_n^{(1)}(t)$ последовательности $\{x_n^{(1)}(t)\}$ и компактность множества Φ, получаем

$$y(t^*) \in \Phi(t^*). \tag{4.34}$$

Принимая во внимание (4.33) и (4.34), получаем

$$\rho(x(t^*), \Phi(t^*))^2 \leqslant e^{2L(t - t_*)}\|s_*\|^2. \tag{4.35}$$

Учитывая также включение $x(t^*) \in X_l(t^*, t_*, x_*^{(2)})$, непрерывную зависимость множеств достижимости $X_l(t^*, t_*, x_*^{(2)})$ от $x_*^{(2)}$ и устремляя $x_*^{(2)}$ к $x_*^{(1)}$, получаем, что неравенство (4.35) трансформируется в соотношение

$$\Phi(t^*) \bigcap X_l(t^*, t_*, x_*^{(1)}) \neq \varnothing. \tag{4.36}$$

Отсюда следует, что для произвольно выбранных $(t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}$ и $l \in S$ справедливо включение (4.20). Из (4.20) вытекает

$$\Phi(t_*) \subset a^*(t_*, t^*, \Phi(t^*)), \qquad (t_*, t^*) \in \mathbf{\Delta}.$$

Показано, что замкнутое множество $\Phi \subset \Omega^*$, являющееся α-инвариантным множеством, есть в то же время и l-инвариантное множество. Обратное утверждение доказывается с использованием похожей схемы рассуждений. $\square$

5. Заключение

В настоящее время актуально исследование наборов управляемых систем и дифференциальных включений, для которых ставятся различные задачи динамики. Такого рода задачи рассматриваются, например, в работах А.Б. Куржанского. Одной из таких задач является задача о сближении упомянутых наборов с заданным терминальным множеством в фазовом пространстве. В настоящей работе была приведена схема выделения исходных позиций динамических систем, из которых такое сближение возможно. В связи с этим введено важное, на наш взгляд, понятие квазигамильтониана набора дифференциальных включений. Это понятие оказывается весьма полезным при сравнении возможностей двух различных наборов дифференциальных включений относительно их приведения на терминальное множество. Использование квазигамильтониана приводит к унификации наборов дифференциальных включений, подобной унификации Н.Н. Красовского в дифференциальных играх, получившей широкое распространение в теории дифференциальных игр и теории обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби. Цель настоящей работы заключается в развитии этих унификационных конструкций Н.Н. Красовского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. *Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем* // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. №. 2. С. 179–187.

2. Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. *Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения* // Докл. АН СССР. 1988. Т.303. № 4. С. 794–797.

3. Красовский Н.Н. *К задаче унификации дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. №. 6. С. 1260–1263.

4. Красовский Н.Н. *Унификация дифференциальных игр* // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1977. №. 24. С. 32–45.

5. Куржанский А.Б. *Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы* // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. №5. С. 1047–1050.

6. Куржанский А.Б. *Избранные труды.* Изд. Московского Университета, 2009.

7. Субботин А.И., Красовский Н.Н. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби.* М.: Наука, 1991.

8. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. *О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения.* Деп. в ВИНИТИ (2454-83).

9. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В. *Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений* //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. №. 4. С. 23–39.

10. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М:Наука, 1985.

11. Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов.* М.: Наука, 1988.

12. Aubin J.P., Cellina A. *Differential inclusions: set-valued maps and viability theory.* Springer-Verlag New York, Inc., 1984.

13. Basar T., Olsder G.J., Clsder G. *Dynamic noncooperative game theory* // SIAM. 1995. V. 200.

14. Chernousko F.L., Ovseevich A.I. *Properties of the optimal ellipsoids approximating the reachable sets of uncertain systems* // Journal of optimization theory and applications. 2004. V. 120. N 2. P. 223–246.

15. Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L. *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations* // Transactions of the American Mathematical Society. 1984. V. 282. N 2. P. 487–502.

16. Guseinov K.G., Moiseyev A.N., Ushakov V.N. *On approximation of reachable sets of differential inclusions* // 8th International Symposium on Dynamic Games and Applications, Maastricht. 1998. P. 235–238.

17. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* Springer-Verlag, 1988.

18. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Birkhauser, 1997.

19. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory* // Tech. rep., DTIC Document. 1967.

20. Quincampoix M., Veliov V.M. *Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances* // SIAM journal on control and optimization. 2005. V. 43. N 4. P. 1373–1399.

α-SYSTEMS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS AND THEIR UNIFICATION

Vladimir N. Ushakov, Institute of Mathematics and Mechanics, Dr.Sc., professor, Corresponding Member of RAS (ushak@imm.uran.ru)
Sergey A. Brykalov, Institute of Mathematics and Mechanics, Dr.Sc. (brykalov@imm.uran.ru)
Grigory V. Parshikov, Institute of Mathematics and Mechanics (grigory.parshikov@uran.ru)

Abstract: In this article, α-systems of differential inclusions are introduced on a bounded time segment $[t_0, \vartheta]$ and α-weakly invariant sets in $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ are defined, where $\mathbb{R}^n$ is a phase space of the differential inclusions. Problems are studied connected with bringing the motions (trajectories) of differential inclusions in an α-system to a given compact set $M \subset \mathbb{R}^n$ at the time ϑ. Questions are discussed of finding the solvability set $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ of problem of bringing the motions of α-system to M and calculating the maximal α-weakly invariant set $W^c \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. The notion is introduced of quasi-Hamiltonian of α-system (α-Hamiltonian), which we see as important for studying problems of bringing motions of α-system to M.

Keywords: differential inclusion, guidance problem, Hamiltonian, invariance, weak invariance.