

УДК 519.83

ББК 22.18

КООПЕРАТИВНЫЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ С ПОПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ*

МАРИЯ А. БУЛГАКОВА

ЛЕОН А. ПЕТРОСЯН

Санкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики –

процессов управления

198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35

e-mail: mari_bulgakova@mail.ru, spbuoasis7@peterlink.ru

В работе исследуются кооперативные сетевые игры с попарными взаимодействиями. На первом шаге формируется сеть, на втором происходит игра, состоящая из одновременных попарных биматричных игр между соседями по сети. В частном случае игроки могут изменять сеть, разрывая связи с противостоящей коалицией. Рассмотрены как симметричные варианты сети, так и несимметричные. В качестве решения рассматривается вектор Шепли. Доказана выпуклость игры.

Ключевые слова: сеть, попарное взаимодействие, кооперация, вектор Шепли.

1. Введение

Работа посвящена сетевым играм с попарными взаимодействиями. Под сетью понимается граф, вершины которого – игроки, а ребра

©2015 М.А. Булгакова, Л.А. Петросян

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-31141) и Санкт-Петербургского государственного университета (9.38.245.2014).

– связи между ними. Попарное взаимодействие, подробно рассмотренное в [6], подразумевает взаимодействие между игроками один на один. Результат игры в каждой паре не влияет на действия других игроков. Первые исследования, затрагивающие вопрос попарного взаимодействия, относятся к началу 90-х годов, с ними можно ознакомиться в работах [4], [7]. В [7] рассмотрена зависимость между Парето-оптимальностью, доминированием по риску и начальными капитальными издержками с использованием попарного взаимодействия. В [4] рассмотрена эволюционная игра на основе попарного взаимодействия. Процесс формирования сети, а также ее дальнейшая модификация рассмотрены в работе [8].

Работа имеет следующую структуру: в разделе 2 формализуется сетевая игра с попарными взаимодействиями. В разделе 3 вводится характеристическая функция, отвечающая принятым условиям взаимодействия. Далее в разделе 4 рассматривается возможность игроков модифицировать сеть после ее формирования, и связанные с этим изменения в решении игры. В разделе 5 проанализирована выпуклость характеристической функции игры.

2. Сетевая игра с попарными взаимодействиями

Пусть задано конечное множество игроков $N = \{1, \dots, n\}$, обладающих возможностью взаимодействия друг с другом. Взаимодействие подразумевает наличие между игроками некой связи и возможности коммуникации. В рамках таких условий кооперация игроков является ограниченной, а ограничением выступает структура взаимодействия, то есть сеть, определяющая связи. Взаимодействие происходит попарно, с непосредственными соседями по сети [6]. Под сетью понимается граф (N, g) . Здесь N – конечное множество узлов (совпадает с множеством игроков), а $g \in N \times N$ – множество ребер. Если элемент $(i, j) \in g$, это означает, что между игроками i и j есть связь, порождающая взаимодействие этих игроков в сети. В дальнейшем саму сеть будем отождествлять с множеством ребер и обозначать через g , а ребро (i, j) сети – как пару ij . Мы предполагаем, что $ij = ji$.

2.1. Формирование связей

Для множества игроков N определим правило формирования связей стандартным образом: посредством одновременного выбора. Результатом такого выбора является сеть.

Пусть $M_i \subseteq N \setminus \{i\}$ – множество тех игроков, которым игрок $i \in N$ может предложить формирование связи, а величина $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$ представляет собой максимальное количество связей, которые игрок i может поддерживать (а, следовательно, и предложить).

Стратегией игрока $i \in N$ на данном этапе называется n -мерный вектор $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{in})$, компоненты которого определяются согласно правилу

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ желает сформировать связь с } j \in M_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.1)$$

При этом вектор g_i удовлетворяет ограничению

$$\sum_{j \in N} g_{ij} \leq a_i. \quad (2.2)$$

Условие $g_{ii} = 0$ исключает возможность образования в сети петель, а условие (2.2) означает, что число возможных связей у игрока ограничено. При $M_i = N \setminus \{i\}$ игрок i может предлагать связи любым игрокам, а при $a_i = n-1$ этот игрок может поддерживать любое количество связей.

Множество стратегий игрока $i \in N$ на первом этапе, удовлетворяющих условиям (2.1)-(2.2), обозначим через G_i . Декартово произведение $\prod_{i \in N} G_i$ множеств стратегий игроков на первом этапе назовем множеством ситуаций на первом этапе игры – в части формирования связей. Предполагается, что игроки выбирают стратегии на первом этапе одновременно и независимо друг от друга. В частности, игрок $i \in N$ выбирает $g_i \in G_i$, и в результате выбора стратегий всеми игроками формируется ситуация $(g_1, \dots, g_n)$.

В данной постановке в ситуации $(g_1, \dots, g_n)$ в сети g устанавливается связь ij тогда и только тогда, когда $g_{ij} = g_{ji} = 1$. Смысл данного подхода основан на том, что формируемая сеть содержит только те связи, на которые согласны оба игрока.

Определим соседей игрока i в сети g как элементы множества $N_i(g) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g\}$. Для краткости иногда будем обозначать $N_i(g)$ просто как N_i .

3. Характеристическая функция

После того как сформирована сеть происходит игра n -лиц Γ между всеми участниками сети, которая представляет собой совокупность одновременных попарных биматричных игр γ_{ij} между соседями. А именно: пусть $i \in N, j \in N, i \neq j, j \in N_i$, тогда i играет с j в биматричную игру γ_{ij} с матрицами A_{ij} и B_{ji} для игроков i и j соответственно, которые заданы изначально:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} & \cdots & a_{1k}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} & \cdots & a_{2k}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij} & a_{m2}^{ij} & \cdots & a_{mk}^{ij} \end{pmatrix}, \quad B_{ji} = \begin{pmatrix} b_{11}^{ji} & b_{12}^{ji} & \cdots & b_{1k}^{ji} \\ b_{21}^{ji} & b_{22}^{ji} & \cdots & b_{2k}^{ji} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}^{ji} & b_{m2}^{ji} & \cdots & b_{mk}^{ji} \end{pmatrix},$$

$$a_{pl} \geq 0, \quad b_{pl} \geq 0, \\ p = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, k.$$

Игру γ_{ij} можно рассматривать в кооперативной форме. При этом характеристическая функция определяется тривиальным образом. Рассмотрим игру Γ в форме характеристической функции (N, v) , где N – множество игроков, v – характеристическая функция.

Построим характеристическую функцию в игре Γ . Введем нижнее значение игры γ_{ij} (максимин) w_{ij} и w_{ji} , т.е.

$$w_{ij} = \max_p \min_l a_{pl}^{ij}, \quad p = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, k, \quad (3.1)$$

$$w_{ji} = \max_l \min_p b_{pl}^{ji}, \quad p = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

Рассмотрим коалицию $S = \{i, j\}$, где $j \in N_i(g)$. Значение характеристической функции $v(ij)$, как максимальный гарантированный выигрыш коалиции, полагаем равным

$$v(ij) = v(ji) = \max_{p,l} (a_{pl}^{ij} + b_{pl}^{ji}) + \sum_{r \in N_i \setminus \{j\}} w_{ir} + \sum_{q \in N_j \setminus \{i\}} w_{jq}. \quad (3.3)$$

Здесь первое слагаемое означает максимальный суммарный выигрыш i и j , действующих заодно, а второе и третье слагаемые –

выигрыши игроков i и j от взаимодействия с другими соседями, играющими против них.

Если $S = \{i\}$, то $v(i) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}$.

Определим значение характеристической функции для коалиции $S \subset N$ в общем виде.

Положим

$$v(S) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j \in S, j \in N_i} v(ij) + \sum_{i \in S, j \in N_i \setminus S} w_{ik}, \quad S \subset N. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) показывает, что для нахождения значения характеристической функции для коалиции S , необходимо найти максимальный суммарный выигрыш внутри коалиции от попарных взаимодействий игроков из S , а также найти нижнее значение матричных игр с матрицами A_{ij} , где $i \in S$, $j \in N \setminus S$ в случае, если $j \in N_i$.

Для частного случая, когда $S = N$, формула (3.4) принимает вид

$$v(N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j, j \in N_i}^n v(ij). \quad (3.5)$$

Очевидно, что таким образом определенная характеристическая функция для каждой коалиции $S \subset N$ представляет собой нижнее значение антагонистической игры коалиции S против коалиции $N \setminus S$ в игре Γ , и поэтому, супераддитивна.

3.1. Полная сеть

В этом случае $M_i = N \setminus \{i\}$ для всех $i \in N$. Иными словами, все игроки связаны друг с другом. Тогда число соседей у каждого игрока: $n - 1$.

В качестве решения рассмотрим вектор Шепли. При этом при вычислении значения $v(S)$ будем пользоваться формулой (3.4). Для i -й компоненты вектора Шепли имеем

$$\varphi_i[v] = \sum_{T|i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus \{i\})]. \quad (3.6)$$

Заметим, что в (3.6), в слагаемом с фиксированной величиной коалиции (t) , слагаемое $v(ij)$ будет встречаться ровно C_{n-2}^{t-2} раза. Кроме

того, слагаемое $v(T) - v(T \setminus \{i\})$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} v(T) - v(T \setminus \{i\}) &= \sum_{j \in T, j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus T} w_{ij} - \\ &- \sum_{k, j \in T \setminus \{i\}, j \in N_k} v(kj) - \sum_{\substack{j \in N_k(g), \\ N_k(g) \subset N \setminus \{i\}}} w_{ij} = \sum_{j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus S} w_{ij}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В результате имеем

$$\varphi_i[v] = \sum_{T | i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot C_{n-2}^{t-2} \cdot \left(\sum_{j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus S} w_{ij} \right).$$

И, упрощая, получим

$$\begin{aligned} \varphi_i[v] &= \left(\sum_{j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus S} w_{ij} \right) \cdot \sum_{t=2}^n \frac{t-1}{n \cdot (n-1)} = \\ &= \left(\sum_{j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus S} w_{ij} \right) \cdot \left(\frac{1}{n \cdot (n-1)} + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{(n-1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus S} w_{ij} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2. Неполная сеть

Пусть теперь игроки необязательно все связаны друг с другом, и множества M_i для различных игроков i в общем случае не совпадают. Тогда число соседей для каждого игрока (множество N_i) зависит от i .

Так как в этом случае появляются несвязанные между собой игроки, положим $v(ij) = 0$, для всех $i \in N$, если $j \notin N_i(g)$.

Тогда вектор Шепли примет вид

$$\varphi_i[v] = \sum_{t=2}^n \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \left(\sum_{j \in N_i} v(ij) + \sum_{j \in N_i(g), N_i(g) \subset N \setminus S} w_{ij} \right) \quad (3.9)$$

4. Изменение сети на втором этапе

Сформированная на первом этапе сеть может не устроить игроков, поэтому наделим их способностью разрывать уже заключенные связи.

Определим компоненты n -мерного вектора $d_i(g)$ следующим образом:

$$d_{ij}(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ оставляет заключенную на первом} \\ & \text{этапе игры связь с игроком } j \in M_i \text{ в сети } g, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Множество векторов $d_i(g)$, удовлетворяющих (4.1), обозначим через $D_i(g)$, $i \in N$. Очевидно, набор $(d_i(g), \dots, d_n(g))$ влияет на сформированную на первом этапе сеть g , из которой может быть исключен ряд связей. Набор $(d_i(g), \dots, d_n(g))$, примененный к сети g , меняет ее структуру, превращая ее в новую сеть, которую обозначим через g^d . Новая сеть g^d получается из сети g исключением тех связей ij , для которых либо $d_{ij} = 0$, либо $d_{ji} = 0$.

Появившаяся возможность исключать связи на втором шаге влияет на максимальный гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе коалиция S , действуя самостоятельно, поскольку игроки из $N \setminus S$, используя свою возможность отказываться от связей, полученных на первом шаге игры, могут лишить коалицию S связей между игроками из своей коалиции $N \setminus S$. Последнее приводит к уменьшению выигрыша коалиции S поскольку из-за положительности матриц A_{ij} и B_{ji} любая связь дает игроку положительный выигрыш. Это обстоятельство приводит к изменению значений характеристической функции.

4.1. Полная сеть

Рассмотрим случай, когда $M_i = N \setminus \{i\}$ для всех $i \in N$.

Вычислим вектор Шепли для такой сети с учетом возможности разрыва связей между S и $N \setminus S$.

Преобразования и упрощения в данном случае проводятся по схеме, предложенной в пункте 3.1. Разница заключается в отсутствии слагаемых w_{ij} , которые упраздняются стратегией коалиции $N \setminus S$,

исключающей связи с S :

$$\varphi_i[v] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j \in N_i} v(ij). \quad (4.2)$$

Пример. Рассмотрим игру 5 лиц.

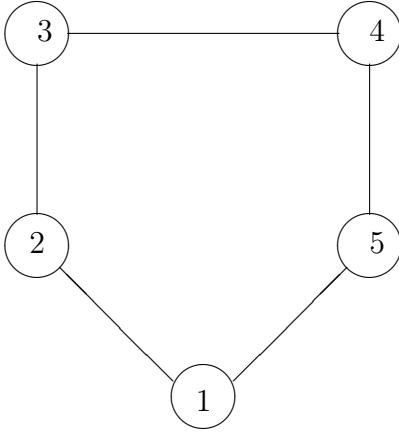


Рисунок 1. Сеть из 5 игроков

$$\begin{aligned}
 A_{12}B_{21} &= \begin{pmatrix} (3; 5) & (6; 4) \\ (2; 0) & (2; 2) \end{pmatrix}, & A_{13}B_{31} &= \begin{pmatrix} (6; 1) & (5; 1) \\ (2; 4) & (4; 0) \end{pmatrix}, \\
 A_{14}B_{41} &= \begin{pmatrix} (0; 2) & (7; 6) \\ (5; 1) & (3; 4) \end{pmatrix}, & A_{15}B_{51} &= \begin{pmatrix} (3; 5) & (10; 8) \\ (2; 0) & (2; 2) \end{pmatrix}, \\
 A_{23}B_{32} &= \begin{pmatrix} (6; 1) & (5; 1) \\ (2; 4) & (10; 9) \end{pmatrix}, & A_{24}B_{42} &= \begin{pmatrix} (0; 2) & (8; 6) \\ (5; 1) & (3; 4) \end{pmatrix}, \\
 A_{25}B_{52} &= \begin{pmatrix} (3; 3) & (1; 2) \\ (2; 0) & (2; 2) \end{pmatrix}, & A_{35}B_{53} &= \begin{pmatrix} (6; 1) & (5; 1) \\ (2; 4) & (6; 6) \end{pmatrix}, \\
 A_{34}B_{43} &= \begin{pmatrix} (0; 2) & (8; 6) \\ (4; 1) & (5; 4) \end{pmatrix}, & A_{45}B_{54} &= \begin{pmatrix} (3; 5) & (10; 6) \\ (2; 0) & (2; 2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 v(12) &= 10, & v(15) &= 18, & v(25) &= 6, & v(13) &= 7, & v(35) &= 12, \\
 v(23) &= 19, & v(45) &= 16, & v(14) &= 13, & v(24) &= 14, & v(34) &= 14,
 \end{aligned}$$

$$v(N) = 129.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{2}(v(12) + v(13) + v(14) + v(15)) = \frac{10 + 7 + 13 + 18}{2} = 24, \\
\varphi_2 &= \frac{1}{2}(v(21) + v(23) + v(24) + v(25)) = \frac{10 + 19 + 14 + 6}{2} = 24.5, \\
\varphi_3 &= \frac{1}{2}(v(31) + v(32) + v(34) + v(35)) = \frac{7 + 19 + 12 + 14}{2} = 26, \\
\varphi_4 &= \frac{1}{2}(v(41) + v(42) + v(43) + v(45)) = \frac{13 + 14 + 14 + 16}{2} = 28.5, \\
\varphi_5 &= \frac{1}{2}(v(51) + v(52) + v(53) + v(54)) = \frac{18 + 6 + 12 + 16}{2} = 26,
\end{aligned}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 24 + 24.5 + 26 + 28.5 + 26 = 129 = v(N).$$

4.2. Неполная сеть

В этом случае при предположениях, принятых в пункте 3.2, упростить формулу не удастся, поскольку число соседей может варьироваться для каждого игрока произвольным образом. Таким образом, для неполной сети имеем формулу

$$\varphi_i[v] = \sum_{t=2}^n \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \sum_{j \in N_i} v(ij). \quad (4.3)$$

5. С-ядро

Исследуем принадлежность вектора Шепли в данной задаче к С-ядру.

Игра (N, v) называется выпуклой, если для любых коалиций $S, T \subset N$ выполняется неравенство:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \quad (5.1)$$

Если игра является выпуклой, то вектор Шепли принадлежит С-ядру [1]. Проверим, является ли выпуклой рассматриваемая игра.

Сперва проанализируем случай, когда игроки имеют возможность разрывать связи на втором этапе игры. В этом случае $w_{ik} = 0$. Используя формулы (3.3) и (3.4), проверим неравенство (5.1). В нашем случае оно принимает вид

$$\sum_{i,j \in S, j \in N_i} v(ij) + \sum_{i,j \in T, j \in N_i} v(ij) \leq \sum_{i,j \in S \cup T, j \in N_i} v(ij) + \sum_{i,j \in S \cap T, j \in N_i} v(ij). \quad (5.2)$$

Неравенство (5.2) справедливо, поскольку выражение $\sum_{i,j \in S \cup T, j \in N_i} v(ij)$ содержит слагаемые $v(ij)$ по всем ребрам из S , из T , а так же по всем ребрам между вершинами из коалиций S и T . В силу положительности слагаемого $v(ij)$ неравенство выполняется. Следовательно, игра является выпуклой.

Рассмотрим теперь случай, когда игроки не могут изменять сеть на втором этапе игры. Неравенство (5.1) в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j \in S, \\ j \in N_i}} v(ij) + \sum_{\substack{i \in S, \\ j \in N_i \setminus S}} w_{ik} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j \in T, \\ j \in N_i}} v(ij) + \sum_{\substack{i \in T, \\ j \in N_i \setminus T}} w_{ik} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j \in S \cup T, \\ j \in N_i}} v(ij) + \sum_{\substack{i \in S \cup T, \\ j \in N_i \setminus (S \cup T)}} w_{ik} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j \in S \cap T, \\ j \in N_i}} v(ij) + \sum_{\substack{i \in S \cap T, \\ j \in N_i \setminus (S \cap T)}} w_{ik}. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j \in S, j \in N_i} v(ij) + \sum_{i,j \in T, j \in N_i} v(ij) - \sum_{i,j \in S \cup T, j \in N_i} v(ij) - \sum_{i,j \in S \cap T, j \in N_i} v(ij) \right) \leq \\ & \leq \sum_{\substack{i \in S \cup T, \\ j \in N_i \setminus (S \cup T)}} w_{ik} + \sum_{\substack{i \in S \cap T, \\ j \in N_i \setminus (S \cap T)}} w_{ik} - \sum_{i \in S, j \in N_i \setminus S} w_{ik} - \sum_{i \in T, j \in N_i \setminus T} w_{ik}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Как это следует из (5.2), левая и правая части неравенства (5.3) отрицательны. Однако, исходя из (3.1), (3.2), (3.3), левая часть больше по модулю, так как рассчитывается через максимум суммы. Игра так же является выпуклой. Отсюда следует, что вектор Шепли принадлежит С-ядру в условиях данной задачи.

6. Заключение

Работа посвящена сетевым играм с попарными взаимодействиями. Рассмотрен кооперативный вариант игры, где в качестве решения выбран вектор Шепли. Проанализирована возможность игроков изменять сеть на втором этапе игры. Это обстоятельство позволяет существенно упростить вычисление значений характеристической функции, а также вектора Шепли. Доказана выпуклость характеристической функции, и, как следствие, принадлежность вектора Шепли к C -ядру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр*. СПб: БХВ-Петербург, 2012.
2. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: аксиомы и решения*. СПб: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2004.
3. Писарук Н.Н. *Введение в теория игр*. Минск: БГУ 2014.
4. Blume, L. *Evolutionary Equilibrium with Forward Looking Players* // EconWPA. 1995. 9509001
5. Davis M., Mashler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Res. Logist. Quart. 1965. V. 12. P. 223–259.
6. Dyer M., Mohanaraj V. *Pairwise-Interaction Games* // ICALP. 2011. V. 1. P. 159–170.
7. Goyal S., Janssen M. *Non-Exclusive Conventions and Social Coordination* // Journal of Economic Theory. 1997. V. 77, issue 1. P. 34–57.
8. Petrosyan L., Sedakov A., Bochkarev A. *Two-stage network games* // Mat. Teor. Igr Pril. 2013. V. 5, issue 4. P. 84–104.

COOPERATIVE NETWORK GAMES WITH PAIRWISE INTERACTIONS

Maria A. Bulgakova, Saint Petersburg State University,
postgraduate (mari_bulgakova@mail.ru).

Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., prof.
(spbuoasis7@peterlink.ru).

Abstract: In the paper network games with pairwise interactions are considered. The main attention is paid to the cooperative version of the game, because of special structure of the game the characteristic function is obtained in explicit form which gives the possibility to determine the Shapley value. The convexity of the game is proved.

Keywords: network, pairwise interactions, cooperation, Shapley value.